

УДК 539.3:534.1

© 1992 г. В. Л. ЯКУШЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

В настоящее время существует ряд методов, позволяющих исследовать докритическое и закритическое поведение оболочек. В общем случае нелинейные уравнения должны учитывать силы инерции. Тогда решение однозначно зависит от времени, критерием устойчивости является наличие переходного процесса. Неустойчивые формы автоматически исключаются из рассмотрения. Такой подход наиболее обоснован, поскольку в нем используются уравнения движения. Однако их решение связано с определенными трудностями. Поэтому наиболее развитыми оказались методы, основанные на использовании статических уравнений, а среди них методы продолжения по параметру [1]. Но так как силы инерции и вязкости играют определяющую роль для реальных оболочек в процессе потери устойчивости, то при таком подходе приходится проследивать изменение решения вдоль кривой деформирования, а ее части, соответствующие неустойчивым состояниям, нельзя исключать из рассмотрения. Траектории в пространстве девиаторов напряжений и деформаций могут отличаться от реальных, что приводит к искажению решения при использовании теорий пластичности с дифференциальными зависимостями [2].

Достоинства обоих подходов можно в значительной степени учесть путем введения в статические уравнения дополнительной вязкости¹. Ее можно добавить или в соотношения между девиаторами деформаций и напряжений (реологическая вязкость), или в уравнения равновесия в виде дополнительных внешних сил, пропорциональных скоростям перемещений (внешняя вязкость). Благодаря этому решение однозначно зависит только от одного параметра — времени. Численное решение уравнений оказывается проще, чем при рассмотрении динамики оболочки, а алгоритмы достаточно универсальными. При постоянной внешней нагрузке метод дополнительной вязкости сводится к итерационному процессу, отличающемуся хорошей сходимостью, в том числе и около критических нагрузок, что не всегда бывает при других итерационных схемах. Введение реологической вязкости сводит задачу на каждом временном слое к рассмотрению линейной системы уравнений эллиптического типа с коэффициентами, зависящими от пространственных координат, а в одномерном случае — к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это особенно удобно при использовании таких численных методов, как конечных разностей или конечных элементов. В тех случаях, когда решение аппроксимируется рядами по заданным функциям, а коэффициенты разложения ищутся по методу типа Бубнова — Галеркина, целесообразно вводить внешнюю вязкость.

Применение метода показано на примере исследования осесимметричной потери устойчивости сферических куполов. Найдены до- и закритические нагрузки. Рассмотрена потеря устойчивости при постоянной нагрузке и постоянном объеме.

1. Рассмотрим вначале решение задач устойчивости при введении дополнительной вязкости в реологические уравнения. Вязкость должна быть прибавлена таким образом, чтобы полученные соотношения не допускали мгновенных изменений деформаций. В противном случае для непрерывного описания во времени перехода от докритического к закритическому состоянию при потере устойчивости потребуются учет сил инерции. Изменение деформации будет определено во все моменты времени при прене-

¹ Якушев В. Л. Вопросы оптимизации и системный подход к задачам проектирования и технологии. Решение задач о потере устойчивости оболочек вращения. Госбюджетный отчет. N гос. регистрации 79039155. Инв. N Б767963. МФТИ 1978.

брежении силами инерции только в том случае, если в реологических соотношениях будет отсутствовать производная от напряжений по времени.

Простейшей моделью ползучести, отвечающей этому требованию, является тело Фохта

$$s_{ij} = 2G(\tau e_{ij} + e_{ij}), \quad K\sigma = \tau \dot{\epsilon} + \epsilon \quad (1.1)$$

где e_{ij} и s_{ij} — девиаторы деформаций и напряжений. Точка над переменной означает дифференцирование по времени t , а τ — постоянная

$$\epsilon = {}^1/3 \epsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = {}^1/3 \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad K = (1 - 2\nu)/E, \quad G = E/[2(1 + \nu)] \quad (1.2)$$

где ϵ_{ij} и σ_{ij} — соответственно компоненты тензоров деформаций и напряжений, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. При $\dot{e}_{ij} = 0$ получаем закон Гука. Если в (1.1) считать G функцией интенсивности деформаций, то при отсутствии ползучести приходим к соотношениям деформационной теории пластичности.

2. Нелинейные уравнения осесимметричной деформации оболочек вращения при произвольных смещениях и углах поворота срединной поверхности [3] запишем в системе координат x, y, ϑ . Ось y является осью вращения, ось x перпендикулярна к ней, угол ϑ отсчитывается в окружном направлении. Координаты следа срединной поверхности в плоскости x, y , угол наклона φ между касательной к ней и осью x , радиусы кривизны в меридиональном r_1 и в окружном r_2 направлениях являются функциями длины дуги срединной линии S . Соответствующие величины в недеформированном состоянии отмечаются индексом «ноль». Нормаль к срединной линии направим так, чтобы она и касательная составляли правую систему координат.

На основании гипотез Кирхгофа — Лява деформации в точке, лежащей на расстоянии z вдоль нормали от срединной линии, равны

$$\epsilon_\varphi = \epsilon_1 - zk_1, \quad \epsilon_\theta = \epsilon_2 - zk_2 \quad (2.1)$$

Индекс φ указывает на направление вдоль касательной, а θ отмечена деформация в окружном направлении. Входящие в (2.1) величины определяются следующим образом

$$\epsilon_1 = dS/dS_0 - 1, \quad k_1 = (1 + \epsilon_1)/r_1 - 1/r_{10} \quad (2.2)$$

$$\epsilon_2 = x/x_0 - 1, \quad k_2 = (\sin \varphi - \sin \varphi_0)/x_0 \quad (2.3)$$

Координаты деформированной срединной линии определяются из соотношений

$$d\varphi/dS_0 = k_1 + 1/r_{10}, \quad dx/dS_0 = (1 + \epsilon_1) \cos \varphi \quad (2.4)$$

$$dy/dS_0 = (1 + \epsilon_1) \sin \varphi$$

Между величинами (2.2) и (2.3) существует связь в виде уравнений совместности деформаций

$$x_0 d\epsilon_2/dS_0 = (1 + \epsilon_1) \cos \varphi - (1 + \epsilon_1) \cos \varphi_0 \quad (2.5)$$

$$x_0 dk_2/dS_0 = (k_1 + 1/r_{10}) \cos \varphi - (k_2 + 1/r_{10}) \cos \varphi_0$$

Уравнения равновесия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial S_0} + (1 + \epsilon_1) \frac{N_\theta \sin \varphi + Q_\varphi \cos \varphi}{x} + N_\varphi \left(k_1 + \frac{1}{r_{10}} \right) + (1 + \epsilon_1) p_z = 0 \\ \frac{dN_\varphi}{dS_0} + (1 + \epsilon_1) \frac{N_\varphi \cos \varphi - N_\theta \sin \varphi}{x} - Q_\varphi \left(k_1 + \frac{1}{r_{10}} \right) + (1 + \epsilon_1) p_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{dM_p}{dS_0} + (1+\varepsilon_1) \frac{M_\varphi \cos \varphi - M_0 \cos \varphi}{x} - Q_\varphi (1+\varepsilon_1) = 0$$

Где Q_φ — поперечная сила, N_φ и N_0 — результирующие нормальные силы, M_φ и M_0 — изгибающие моменты, p_φ и p_z — соответственно касательная и нормальная к срединной линии составляющие внешней распределенной нагрузки. Применение различных приближений теории оболочек при исследовании потери устойчивости сферических куполов рассматривалось в [4].

При введении реологической вязкости согласно (1.1) получаем выражения для нормальных сил и моментов

$$N_\varphi = Eh/(1-\nu^2) [\tau(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + \varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2] \quad (2.7)$$

$$N_0 = Eh/(1-\nu^2) [\tau(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + \varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1]$$

$$M_\varphi = -Eh^3/[12(1-\nu^2)] [\tau(k_1 + \nu k_2) + k_1 + \nu k_2] \quad (2.8)$$

$$M_0 = -Eh^3/[12(1-\nu^2)] [\tau(k_2 + \nu k_1) + k_2 + \nu k_1]$$

По аналогии с (2.7) для поперечной силы Q_φ вводится величина γ :

$$Q_\varphi = Eh/(1-\nu^2) (\tau\gamma + \gamma) \quad (2.9)$$

Построение разрешающей системы уравнений осуществлялось в такой последовательности. Выражения для сил и моментов (2.7)–(2.9) подставлялись в уравнения равновесия. Производные $\partial^2\varepsilon_2/\partial S_0\partial t$ и $\partial^2k_2/\partial S_0\partial t$ брались из продифференцированных по t соотношений совместности (2.5). Аналогично находились $\partial\varepsilon_2/\partial t$ и $\partial k_2/\partial t$ из (2.3). В качестве примера выпишем окончательный вид первого из уравнений (2.6):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2\gamma}{\partial S_0\partial t} + \frac{(1+\varepsilon_1)\cos\varphi}{x} \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \left[\nu \frac{(1+\varepsilon_1)\sin\varphi}{x} + k_1 + \frac{1}{r_{10}} \right] \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{x_0} \left[\frac{(1+\varepsilon_1)\sin\varphi}{x} + \nu \left(k_1 + \frac{1}{r_{10}} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial\gamma}{\partial S_0} + \frac{(1+\varepsilon_1)}{x} + \right. \\ & \left. + [(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)\sin\varphi + \gamma\cos\varphi] + \left(k_1 + \frac{1}{r_{10}} \right) (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \right) (1+\varepsilon_1)p_z \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Другие три уравнения были получены после дифференцирования по t выражений для координат срединной поверхности (2.4) и последующего сложения с ними в исходной форме. Так, для перемещений вдоль оси симметрии y имеем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial S_0\partial t} - \sin\varphi \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - (1+\varepsilon_1)\cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial y}{\partial S_0} - (1+\varepsilon_1)\sin\varphi \right\} = 0 \quad (2.11)$$

Таким образом была получена система шести уравнений в частных производных гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial S_0\partial t} + a_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial S_0} + b_i \right\} = 0 \quad (2.12)$$

Индексы i и j изменяются в пределах от 1 до 6. Компоненты определяются равенствами

$$f_1 = \gamma, \quad f_2 = \varepsilon_1, \quad f_3 = k_1, \quad f_4 = \varphi, \quad f_5 = x, \quad f_6 = y \quad (2.13)$$

Величины a_{ij} и b_i являются функциями f_i . Часть уравнений, стоящая в фигурных скобках в (2.12), есть нелинейные дифференциальные выраже-

ния типа стоящих в таких же скобках в (2.10) и (2.11). Причем система

$$\partial f_i / \partial S_0 + b_i = 0 \quad (2.14)$$

дает решение статической задачи, что, как следует из (2.12), может быть только при $\partial f_i / \partial t = 0$.

Уравнения (2.12) решались численно, методом описанным в [3]. По t использовалась схема первого порядка точности с переменным шагом. При этом для ряда точек вдоль образующей необходимо хранить в памяти ЭВМ компоненты f_i с предыдущего шага по t .

3. Необходимо рассмотреть вопрос об адекватности критериев устойчивости, следующих из полученной после введения реологической вязкости системы (2.12) и нелинейных уравнений динамики, описывающих движение оболочки:

$$\partial f_j / \partial S_0 + b_j + c_{ij} \partial^2 f_j / \partial t^2 = 0 \quad (3.1)$$

c_{ij} — квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только в правой верхней четверти.

Для малых отклонений ρ_i величин f_i от состояний равновесия, описываемых (2.14) из (3.1), следует

$$\partial \rho_i / \partial S_0 + \rho_j \partial b_i / \partial f_j + c_{ij} \partial^2 \rho_j / \partial t^2 = 0 \quad (3.2)$$

Решение этих уравнений записывается в виде

$$\rho_i = F_i(S_0) \cos \omega t \quad (3.3)$$

После его подстановки в (3.2) получим

$$\partial F_i / \partial S_0 + F_j \partial b_i / \partial f_j - \omega^2 c_{ij} F_j = 0 \quad (3.4)$$

Эта однородная линейная система совместно с граничными условиями, соответствующими закреплению оболочки, представляет собой задачу на собственные значения. Условием перехода от устойчивых к неустойчивым состояниям будет обращение в ноль наименьшего значения в спектре ω^2 , порождаемого (3.4), что приводит к системе уравнений

$$\partial F_i / \partial S_0 + F_j \partial b_i / \partial f_j = 0 \quad (3.5)$$

Аналогично получаются уравнения для малых отклонений из (2.12):

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial S_0 \partial t} + \frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial \rho_i}{\partial S_0} + \frac{\partial b_i}{\partial f_j} \rho_j \right\} = 0 \quad (3.6)$$

Их решение в зависимости от времени имеет экспоненциальный характер

$$\rho_i = U_i(S_0) \exp \mu t \quad (3.7)$$

Для величин U_i и параметра μ получаем систему

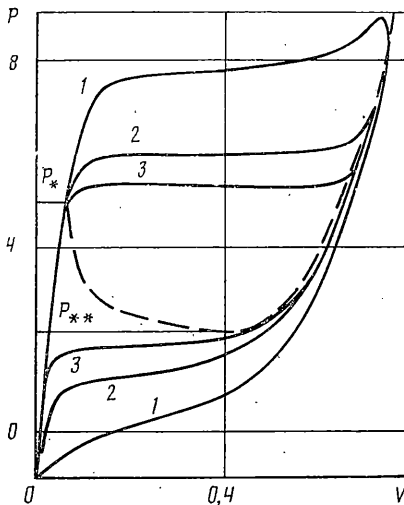
$$\mu \tau (dU_i / dS_0 + a_{ij} U_j) + dU_i + U_j \partial b_i / \partial f_j = 0 \quad (3.8)$$

Параметр μ действителен, так как если предположить, что μ и U_i комплексны, то из (3.8) отдельно для действительной и комплексной частей получаем два линейных уравнения, которые противоречат друг другу. Это естественно, поскольку (3.8) получена из (2.12), в которой учитываются только силы вязкости, а инерционные силы отсутствуют.

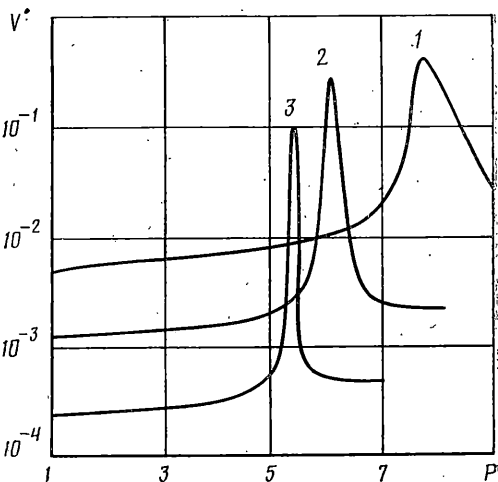
Значение $\mu = 0$ дает критерий потери устойчивости

$$dU_i / dS_0 + \partial b_i / \partial f_j U_j = 0 \quad (3.9)$$

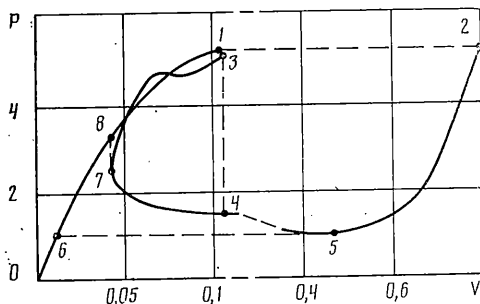
Как видно, условия устойчивости (3.5) и (3.9) записываются одинаковым образом, а функции F_i и U_i могут различаться лишь постоянным



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

множителем. Таким образом, и при использовании нелинейных уравнений динамики и уравнений с реологической вязкостью критерии потери устойчивости совпадают и сводятся к системе (3.5). Ее решение возможно лишь при некоторых значениях нагрузки, являющихся критическими.

Проверка выполнения условия (3.5) требует знания решения нелинейной системы (2.14), получить которое затруднительно. Кроме того, оно является только достаточным для окончательного решения вопроса об устойчивости необходимо исследование нелинейных уравнений. Поэтому целесообразно сразу решать систему (2.12), алгоритм интегрирования которой известен [3], и делать вывод о характере поведения оболочки из анализа решения и наличия переходного процесса, который свидетельствует о потере устойчивости. Все приведенные ниже результаты получены именно таким образом.

4. Применение реологической вязкости к исследованию устойчивости оболочек рассмотрим на примере пологих сферических куполов, нагруженных равномерным внешним давлением $P_z = P$, $P_\varphi = 0$ и имеющих по краю жесткое защемление. В дальнейшем R_0 — радиус основания купола, H — высота его подъема. В целях сравнения полученных результатов с уже известными ряд отношений H/h принят таким же, как и в [5]. В [6] эти результаты были продолжены до почти полного выворачивания оболочек и выхода на устойчивую закрытую ветвь.

Ниже использованы безразмерные величины

$$P = 10^5 p R_0 / E h, \quad T = t / \tau, \quad V = 1/2 (v_0 - v) / v_0, \quad \kappa = H / h \quad (4.1)$$

Где v_0 — объем между оболочкой и плоскостью основания до нагружения, v — текущий объем, вычисляемый так же, как и v_0 . Определенная таким образом величина относительного вытесненного объема V будет вначале равна нулю, а при зеркальном отражении купола по отношению к основанию равна единице.

Поскольку развитая выше теория не предполагает пологости оболочек, то в расчетах было принято $H/R_0=0,04$. Угол полураствора купола в этом случае равен 0,0799, что должно обеспечивать хорошее совпадение с решениями полученными по теории пологих оболочек [5]. Коэффициент Пуассона $\nu=0,3$.

Вначале была рассмотрена деформация купола с $\kappa=4$ при увеличении внешней нагрузки с постоянной скоростью P . Изменение V в зависимости от P показано на фиг. 1. Пунктиром дано статическое решение [6], P_* и P_{**} — верхняя и нижняя критические нагрузки. На фиг. 2 представлена зависимость скорости V от нагрузки P . Кривые 1—3 получены при скоростях нагружения, равных 0,5; 0,1 и 0,02 соответственно.

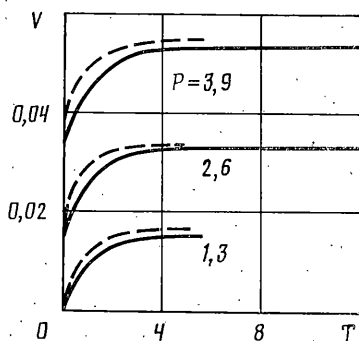
До P_* все кривые практически совпадают со статической. Однако при ее превышении скорость V вначале резко возрастает, оболочка начинает быстро менять свою форму и переходит к устойчивому закритическому состоянию, при приближении к которому V вновь становится малой.

В качестве критической нагрузки можно принять значение P , соответствующее максимальному значению скорости V на фиг. 2. При уменьшении скорости нагружения определяемая таким образом величина стремится к P_* , найденной из статического решения.

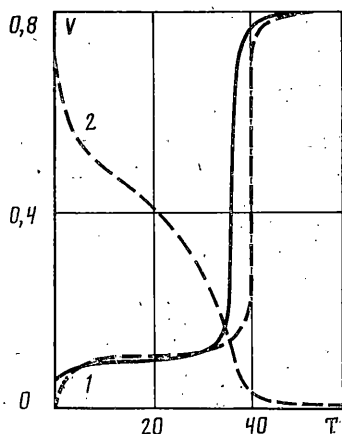
При приближении к устойчивой закритической ветви знак скорости нагружения менялся на противоположный и оболочка переходила в исходное докритическое состояние (фиг. 1). При этом скорость менялась аналогично зависимости представленной на фиг. 2. Таким образом можно найти нижнюю критическую нагрузку P_{**} .

При линейном увеличении нагрузки для нахождения ее критических значений с необходимой точностью приходится выбирать скорость нагружения достаточно малой. Вместе с тем шаг по времени должен быть ограничен по величине, так как характер изменения скорости V вблизи максимума практически не зависит от P при стремлении ее к нулю и объем вычислений может стать неоправданно большим. Поэтому целесообразно изменять нагрузку не непрерывно, а ступенчато и решение вести для ряда значений P до установления, т. е. пока скорости искомым функций не станут меньше заданной величины. Таким образом была решена задача с $\kappa=6$. Зависимость $P-V$ представлена на фиг. 3. Сплошной линией дана кривая для статической задачи. Нагрузка изменялась с шагом $\Delta P=1,3$. Изменение V от времени T показано сплошными линиями на фиг. 4. При $P=5,2$ ($P_*=5,14$) происходила потеря устойчивости, и оболочка из состояния 1 (фиг. 3) переходила в устойчивое закритическое состояние 2. Зависимость $V(T)$ для этой нагрузки показана сплошной линией на фиг. 5. Скорость V менялась качественно так же, как и для оболочек с $\kappa=4$ (фиг. 2). При уменьшении нагрузки наблюдается обратный переход из закритического в докритическое состояние вдоль штриховой линии 5—6.

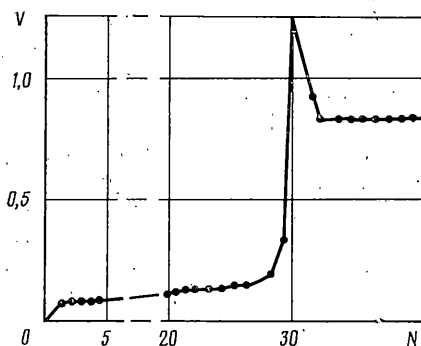
Для демонстрации хорошей сходимости итерационного процесса был проведен расчет, когда к недеформированной оболочке сразу же была приложена нагрузка, превышающая критическую и равная $P=5,2$. Полученное решение дано штриховой линией 1 на фиг. 5. Каких-либо специфических проблем получение этого результата не вызвало, хорошая сходимость наблюдалась и для больших нагрузок при нулевых начальных значениях, штриховой линией 2 на фиг. 5 представлен результат, полученный при обратном переходе от закритического к докритическому состоянию. Нагрузка изменялась скачком от 5,2 до 1,0.



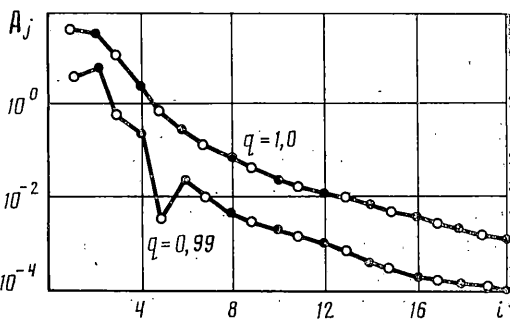
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

При ступенчатом изменении нагрузки нет необходимости в получении гладких кривых типа представленных на фиг. 4. Они найдены с малым шагом по T , обеспечивающим достаточную точность решения, т. е. вид кривых не будет меняться при уменьшении ΔT . Для сокращения времени счета можно отказаться от требования гладкости кривых и выбрать шаг только из условия сходимости. Одно из таких решений, полученных с шагом $\Delta T=1,2$, представлено на фиг. 6. N — число шагов по T . Нагрузка равна 5,2, начальные условия соответствовали недеформированной оболочке.

Преыдушие расчеты были выполнены, когда значение внешней нагрузки было задано. Однако возможны и другие случаи нагружения. Рассмотрим, например, вариант, когда под оболочкой находится несжимаемая жидкость, вытекающая через отверстие. Тогда заданной величиной будет объем, а нагрузка должна определяться из решения. Исходя из структуры уравнения (2.10) и всей системы (2.12) можно сделать вывод, что скорость относительного вытесненного объема связана с нагрузкой соотношением

$$V^* = \alpha + \beta P \quad (4.2)$$

Здесь α и β неизвестные переменные величины. Для их определения на каждом шаге по времени дважды решалась система (2.12) для двух различных значений P . Зная скорости функций (2.13), можно найти две соответствующие скорости V^* . Тогда из (4.3) следуют два уравнения для определения α и β , и из (4.2) можно определить давление P , обеспечивающее заданную скорость V^* и вычислить истинные скорости искомых функций.

При решении задачи с $\kappa=6$ величина V менялась ступенчато, т. е. ве-

личины прогибов увеличивались пропорционально, так, чтобы обеспечить необходимое приращение ΔV , а затем находилось решение и P при условии $V=0$. Счет велся до установления решения.

Такой режим нагружения приводит к тому, что оболочка при потере устойчивости переходит из состояния 3 в 4 (фиг. 3), а затем при увеличении объема деформируется вдоль участка 4-5-2. При обратном проходе потеря устойчивости наступает в точке 7 и оболочка при постоянном объеме деформируется до состояния, соответствующего точке 8.

Таким образом, решая задачу для двух режимов нагружения удается найти большую часть статической кривой, кроме участка 3-7, где устойчивые состояния отсутствуют.

В уравнении (4.2) вместо V можно использовать и другой параметр, например прогиб в центре купола.

Сходимость итерационного процесса определяется видом матрицы a_{ij} в уравнении (2.12). В данной работе она выбрана из физических соображений и зависит от закона (1.1). При ином задании a_{ij} сходимость может нарушаться. Так эту матрицу можно взять из условия

$$a_{ij} = \partial b_i / \partial f_j \quad (4.3)$$

Такой выбор a_{ij} соответствует самокорректирующемуся методу первого порядка [7]. На докритическом участке его сходимость будет более быстрая по сравнению с методом реологической вязкости. Результаты для этого случая представлены пунктирными кривыми на фиг. 4. Однако при нагрузках, близких к критическим, итерационный процесс расходится. Уменьшение шага по времени часто только усугубляет ситуацию. Так не удалось решить этим методом задачи приведенные в данной статье, а также в [6]. Аналогичный результат получается и при введении вязкости только в изгибающие моменты.

Метод реологической вязкости принципиально отличается от самокорректирующегося метода первого порядка тем, что в нем используется реальная вязкость материала и не допускаются мгновенные изменения деформаций при конечных напряжениях. Это дает сходящийся итерационный процесс при переходе от докритической к закритической стадии. Он успешно использовался для решения различных задач устойчивости [8-12]. Похожий подход применен в [13].

5. Построение итерационного процесса при введении внешней вязкости рассмотрим на примере решения известных уравнений для пологих оболочек. Для этого из уравнения равновесия вычтем величину, пропорциональную скорости прогиба $\gamma \partial W^* / \partial t$, γ — постоянная. После введения безразмерных величин [14]

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\eta} \frac{W^*}{h}, & F &= \eta \frac{F^*}{E h^2}, & q &= \frac{\sqrt{\eta} q^*}{4E} \left(\frac{R}{h} \right)^2, & r &= \sqrt{\rho} \frac{r^*}{a} \\ \rho &= \sqrt{\eta} \frac{a^2}{R h}, & \eta &= 12(1-\nu^2), & t &= \frac{E}{\gamma R^2} t^*, & b &= \sqrt{\rho} \end{aligned} \quad (5.1)$$

где F^* — функция напряжений, q^* — внешнее давление, r^* — текущий радиус, a — радиус основания, R — радиус сферы, t^* — время, получаем следующие два уравнения:

$$\nabla^4 W = \nabla^2 F + L(W, F) + 4q - \partial W / \partial t, \quad \nabla^4 F = -\nabla^2 W - \frac{1}{2} L(W, W) \quad (5.2)$$

$$L(W, F) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} \right), \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (5.3)$$

Решение будем вести по методу взвешенных невязок. В качестве функций, по которым раскладывается решение, используем собственные формы колебаний купола [15]:

$$W_i = J_0(\beta_i r) + L_i I_0(\beta_i r) - 4M_i/\beta_i^2 \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.4)$$

$$F_i = \beta_i^{-2} [J_0(\beta_i r) - L_i I_0(\beta_i r) + M_i(1 + \beta_i^4)r^2] \quad (5.5)$$

$$\beta_i^4 = \omega_{0i}^2 - 1, \quad \omega_{0i}^2 = gR^2 \omega_{0i}^{*2}/E \quad (5.6)$$

где g — плотность, ω_{0i}^* — частоты собственных колебаний оболочки.

Базисные функции находятся из частотного уравнения, следующего из условий жесткого зацебления по контуру $r=b$:

$$J_0(X_i)I_1(X_i) + J_1(X_i)I_0(X_i) + \frac{4\lambda}{X_i(X_i^4 - \lambda)} J_1(X_i)I_1(X_i) = 0$$

$$X_i = b\beta_i, \quad \lambda = (1+\nu)b^4/(1-\nu) \quad (5.7)$$

Постоянные L_i и M_i задаются соотношениями

$$L_i = \frac{J_1(X_i)}{I_1(X_i)}, \quad M_i = \frac{\beta_i^4}{4} \left[J_0(X_i) + \frac{J_1(X_i)}{I_1(X_i)} I_0(X_i) \right] \quad (5.8)$$

Введем также вспомогательные функции ψ_i , определяемые из уравнения

$$\nabla^2 \psi_i = -W_i \quad (5.9)$$

$$\psi_i = \beta_i^{-2} [J_0(\beta_i r) - L_i I_0(\beta_i r) + M_i r^2] \quad (5.10)$$

Для W_i, F_i, ψ_i выполняются условия ортогональности

$$\int_0^b W_i W_j r dr = 0, \quad \int_0^b \nabla^4 F_i \psi_j r dr = 0, \quad (i \neq j) \quad (5.11)$$

При решении уравнений (5.2) функции прогиба и напряжений разложим в ряды

$$W = \sum_{i=1}^n A_i W_i, \quad F = \sum_{i=1}^n B_i F_i \quad (5.12)$$

Подставим их в уравнения (5.2). Затем последовательно умножая первое на $W_j r$, второе на $\psi_j r$ и производя интегрирование в пределах от 0 до b , получим систему уравнений, которая после некоторых преобразований записывается в виде

$$A_i^* = -\omega_{0i}^2 A_i + f_i, \quad B_i = A_i - \frac{1}{X_i} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Z_{ijk} A_j A_k \quad (5.13)$$

$$f_i = \frac{1}{X_i} \left[\sum_{j=1}^n S_{ij} (B_j - A_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} A_k B_j + 4Q_i q \right]$$

$$Q_i = \int_0^b W_i r dr,$$

$$X_i = \int_0^b W_i W_j r dr, \quad S_{ij} = \int_0^b W_i \nabla^2 F_j r dr \quad (5.14)$$

$$T_{ijk} = - \int_0^b \frac{dW_i}{dr} \frac{dW_k}{dr} \frac{dF_j}{dr} dr, \quad Z_{ijk} = - \frac{1}{2} \int_0^b \frac{d\psi_i}{dr} \frac{dW_k}{dr} \frac{dW_l}{dr} dr$$

Система (5.13) удобна для ее решения итерационными методами. Если известны A_i , то B_i находятся из соответствующих уравнений, правая часть которых зависит только от A_i , а затем и скорости \dot{A}_i . Этап нахождения корней каких-либо уравнений отсутствует.

Однако при интегрировании этой системы возникают трудности, связанные с ее жесткостью, обусловленной тем, что квадраты частот резко возрастают с увеличением их номера. Вместе с тем жесткость обусловлена только линейной частью в первом уравнении (5.13). Это видно из зависимости от нагрузки частот малых линейных колебаний, наложенных на нелинейное деформированное состояние. Эти частоты находились как собственные значения матрицы

$$\|\delta_{ik}(\omega_{i0}^2 - \omega_i^2) - a_{ik}\| \quad (5.15)$$

$$a_{ik} = \frac{1}{X_i} \sum_{j=1}^n \left(-S_{ij} M_{jk} + T_{ijk} B_j + T_{ij} A_j - M_{jk} \sum_{l=1}^n T_{ijl} A_l \right) \quad (5.16)$$

$$\bar{M}_{ij} = \frac{2}{X_i} \sum_{k=1}^n Z_{ijk} A_k$$

Значения A_j и B_j для вычисления a_{ik} брались из (5.13) после установления решения для каждой величины внешней нагрузки. Таким образом, эти частоты соответствуют устойчивым состояниям оболочки.

Результаты расчетов при $H/h=6$ для нескольких значений q приведены в таблице. Строка для $q=0$ соответствует частотам ω_{0i} . При $q=0,99$

q	W	ω_i^2				
		i=1	5	10	15	20
0	0	1,61	3,99 10 ¹	6,21 10 ²	3,14 10 ³	9,91 10 ³
0,99	1,18	1,65 10 ⁻¹	2,90 10 ¹	5,72 10 ²	3,03 10 ³	9,71 10 ³
1,00	38,3	1,28	5,05 10 ¹	6,51 10 ²	3,20 10 ³	1,00 10 ⁴

оболочка находится в докритическом состоянии, а при $q=1,0$ теряет устойчивость и переходила в закритическое состояние. Там же приведен прогиб W в центре купола. Чем выше номер частоты, тем в меньшей степени она зависит от нагрузки, и поскольку жесткость системы определяется собственными числами матрицы (5.15) вдоль кривой деформирования, то нелинейные слагаемые f_i мало влияют на жесткость системы (5.13) [16]. Воспользовавшись этим обстоятельством, линейную часть в (5.13) дискретизируем по неявной схеме средней точки, а нелинейную по явной

$$\bar{A}_i = [A_i(t) + \Delta t f_i(A_i(t))] (1 + \Delta t \omega_{0i}^2)^{-1} \quad (5.17)$$

$$A_i(t + \Delta t) = \{A_i(t) + \Delta t f_i[(\bar{A}_i + A_i(t))/2]\} (1 + \Delta t \omega_{0i}^2)^{-1}$$

Для каждого значения нагрузки решение велось до тех пор, пока для всех A_i не выполнялось условие

$$|(A_i(t + \Delta t) - \bar{A}_i)/A_i(t)| \leq \delta \quad (5.18)$$

При $\delta=10^{-5}$, шаге по времени $\Delta t=1,25$ и $n=20$ для $q=0,99$ потребовался 141 шаг, а при $q=1,0$ 195 шагов. В обоих случаях начальные значе-

ния A_i были равны нулям. Абсолютные величины коэффициентов A_i в логарифмическом масштабе в зависимости от номера представлены для этих нагрузок на фиг. 7. Светлые кружки соответствуют положительным A_i , черные отрицательным. Как видно, начиная с некоторого номера, A_i монотонно убывают и становятся знакопередающимися.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Шалишвили В. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 231 с.
2. Клошников В. Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
3. Ширко И. В., Якушев В. Л. Физически и геометрически нелинейные деформации оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. N 6. С. 103–109.
4. Григолюк Э. И., Мамай В. И., Фролов А. Н. Исследование устойчивости непологих сферических оболочек при конечных перемещениях на основе различных уравнений теории оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. N 5. С. 154–165.
5. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // ПММ. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 265–274.
6. Якушев В. Л. Устойчивость пологих сферических куполов // Современные вопросы гидродинамики, аэрофизики и прикладной механики. М.: МФТИ, 1986. С. 89–96.
7. Stricklin J. A., Haisler W. E., Von Riesenman W. A. Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically nonlinear structural analysis // AIAA J. 1973. V. 11. No. 3. P. 292–299.
8. Козырев В. С., Якушев В. Л. Исследование закритических деформаций оболочек с помощью введения фиктивной вязкости // Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981. С. 198.
9. Якушев В. Л. Решение задачи об устойчивости стержневой системы методом реологической вязкости // Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1984. С. 134–143.
10. Зайцев Б. П., Якушев В. Л. Решение двумерных задач о потере устойчивости оболочек методом реологической вязкости // Современные вопросы гидродинамики, аэрофизики и прикладной механики. М.: МФТИ, 1986. С. 67–74.
11. Якушев В. Л. Решение задач устойчивости полусферических оболочек методом реологической вязкости // Современные вопросы механики сплошной среды в геокосмических исследованиях. М.: МФТИ, 1987. С. 105–112.
12. Якушев В. Л. Решение задач устойчивости оболочек методом реологической вязкости при конечно-элементной дискретизации по сдвиговой модели Тимошенко // Прикладные задачи аэромеханики и геокосмической физики. М.: МФТИ, 1990. С. 127–133.
13. Kropf В.-Н. A viscous approach to post buckling analysis // Eng. Struct. 1981. V. 3. No. 3. P. 187–189.
14. Валишвили Н. В. Неосесимметричное деформирование и устойчивость пологих оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 22–28.
15. Петренко М. П. Динамика полой сферической оболочки // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 220–226.
16. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 332 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.II.1990