

УДК 533.6:013.42

© 1992 г. Л. М. ЗОРИЦ, Н. И. СОРОКАТЫЙ

**О СТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ ВЛИЯНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ  
И ЖЕСТКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ФЛАТТЕР ПАНЕЛЕЙ  
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ  
ПОТОКЕ**

Вопросам колебаний и устойчивости упругих панелей с присоединенными элементами в потоке газа посвящены работы [1, 2]. В них впервые даны различные постановки задачи, приведены методы ее исследования и выявлено существенное дестабилизирующее влияние упругоподвешенных масс на панельный флаттер. В данной работе методом характеристических рядов [3-6] изучаются соответствующие упругие системы с конечным числом степеней свободы и с распределенными параметрами. При этом предполагается возможность полного разделения переменных и применение поршневой теории. Дается методика рационального построения характеристических уравнений и получены новые качественные результаты. Показано, что в ряде случаев изменение направления обтекания панели с упругоподвешенными массами не влияет на частоты колебаний и критическую скорость. Установлены условия, при которых панель с одним и двумя осцилляторами практически не теряет устойчивости. Разработаны эффективные приемы численного исследования рассматриваемых задач. Показано, каким образом определенными сочетаниями характеристик системы «панель — осциллятор» можно избежать известных дестабилизирующих влияний. Дан также способ построения областей достоверной устойчивости соответствующих систем с двумя степенями свободы.

**1. Постановка задачи и построение характеристического уравнения.** Рассматривается плоская упругая панель, обтекаемая с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. С противоположной стороны в точках  $x_i$  сосредоточены массы  $m_i$  (ось  $OX$  направлена вдоль потока слева направо). Протяженность панели поперек потока предполагается достаточно большой по сравнению с пролетом  $a$  (цилиндрический изгиб).

Уравнение малых колебаний имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D(x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + b(x) \frac{\partial \omega}{\partial t} + c(x) \omega + \\ & + \sum_{i=1}^n M_i \delta(x-x_i) \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \frac{\kappa p_\infty}{c_\infty} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$m(x) = \rho(x)h(x) + \sum_{i=1}^n m_i \delta(x-x_i), \quad b(x) = \varepsilon \rho(x)h(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \delta(x-x_i)$$

$$c(x) = r(x) + \sum_{i=1}^n k_i \delta(x-x_i), \quad D(x) = Eh^3/12(1-\nu^2) > 0$$

где  $h(x)$  — толщина панели;  $\rho(x)h(x)$  — масса, приходящаяся на единицу длины;  $\omega(x, t)$  — прогиб панели;  $u$  — скорость потока,  $M_i$  — масса присоединенного элемента;  $q_i(t)$  — его перемещение;  $\varepsilon \rho(x)h(x)$  — коэффици-

ент внешнего трения;  $p_\infty$  — невозмущенное давление потока;  $c$  — невозмущенная скорость звука;  $\kappa$  — показатель политропы;  $\delta(x)$  — дельта-функция;  $m_i$  — сосредоточенная масса;  $k_i, \varepsilon_i$  — соответствующие ей параметры жесткости и трения;  $r(x)$  — жесткость упругого основания;  $D(x)$  — цилиндрическая жесткость.

Кромки панели предполагаются упругозакрепленными

$$\omega|_{x=0}=0, \quad \omega|_{x=a}=0 \quad (1.2)$$

$$(D(x)\partial^2\omega/\partial x^2 - \Psi_0\partial\omega/\partial x)|_{x=0}=0, \quad (D(x)\partial^2\omega/\partial x^2 + \Psi_1\partial\omega/\partial x)|_{x=a}=0$$

Параметры закрепления  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$  считаются неотрицательными. Перемещение присоединенного элемента  $q_i(t)$  удовлетворяет уравнению

$$M_i d^2 q_i / dt^2 + E_i (dq_i / dt - \dot{\omega}_i / dt) + c_i (q_i - \omega_i) = 0 \quad (1.3)$$

где  $\omega_i = \omega(x_i, t)$ ;  $E_i, c_i$  — коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно. Представляя  $\omega(x, t)$  и  $q_i(t)$  в виде  $\omega(x, t) = W(x) \exp(st)$ ,  $q_i(t) = Q_i \exp(st)$ , из (1.1) — (1.3) получаем такую задачу на собственные значения

$$L[W] = (DW'')'' - \gamma W' - \lambda W = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(x - x_i) \quad (1.4)$$

$$W(0) = 0, \quad W(a) = 0 \quad (1.5)$$

$$DW''(0) - \Psi_0 W(0) = 0, \quad DW''(a) + \Psi_1 W'(a) = 0$$

$$\gamma = -\kappa p_\infty u / c_\infty; \quad \lambda = -(\rho h s^2 + (\varepsilon \rho h + \kappa p_\infty / c_\infty) s + r)$$

$$\alpha_i = -(M_i s^2 (E_i s + c_i) / (M_i s^2 + E_i s + c_i) + m_i s^2 + \varepsilon_i s + k_i)$$

$$W_i = W(x_i)$$

Для построения характеристического уравнения (уравнения частот) рассматриваемой задачи применяется разработанная ранее методика [6].

Общее решение уравнения  $L[W] = 0$  представим в виде

$$W(x) = D_0 K(x, \alpha) + D_1 K'(x, \alpha) + D_2 K''(x, \alpha) + D_3 K'''(x, \alpha) \quad (1.6)$$

где  $K(x, \alpha)$  — функция Коши, а точкой обозначено дифференцирование по параметру  $\alpha$ ;  $D_i$  ( $i=0, 1, \dots, 3$ ) — постоянные.

Рассмотрим сначала случай, когда присоединенные и сосредоточенные массы отсутствуют ( $\alpha_i = 0, i=1, \dots, n$ ). Подставляя (1.6) в (1.5), приходим к характеристическому уравнению

$$[\Psi_0 \Psi_1 F(x, \alpha) + D(a) \Psi_0 F'(x, \alpha) - D(0) \Psi_1 F'(x, \alpha) - D(0) D(a) F''(x, \alpha)]|_{x=a, \alpha=0} = 0 \quad (1.7)$$

$$F(x, \alpha) = K(x, \alpha) K''(x, \alpha) - K'(x, \alpha) K'(x, \alpha) \quad (1.8)$$

При построении уравнения (1.7) параметр  $\alpha$  был выбран равным координате передней кромки панели. Такой выбор позволяет при удовлетворении условий (1.5) на передней кромке воспользоваться соотношениями, которым удовлетворяет функция Коши и ее производные. Это приводит, во-первых, к рациональному и компактному представлению характеристического уравнения в виде (1.7). Во-вторых, исходя из метода построения общих решений уравнений вида (1.4) с особенностями типа дельта-функции и ее производных [5] и частотного уравнения (1.7), можно строить характеристические определители для более сложных задач.

В частности, если в (1.4) параметры  $\alpha_i \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), то следует

в (1.7) вместо функции  $K(x, \alpha)$  подставить функцию  $Q(x, \alpha)$  [5]

$$Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + \sum_{i=1}^n \alpha_i K(x_i, \alpha) K(x, x_i) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j K(x_i, \alpha) K(x_j, x_i) K(x, x_i) + \dots + \alpha_1 \dots \alpha_n K(x_1, \alpha) K(x_2, x_1) \dots \\ \dots K(x_n, x_{n-1}) K(x, x_n); \quad (x > x_n) \quad (1.9)$$

Очевидно, полученное таким образом характеристическое уравнение задачи (1.4)–(1.5) определяется функцией  $K(x, \alpha)$ , ее частными производными по аргументу  $x$  и параметру  $\alpha$ , а также параметрами  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$ . Заметим, что задачи построения фундаментальной системы решений обыкновенного дифференциального уравнения и построения соответствующей функции Коши в известном смысле являются равносильными [4–6]. Тем не менее использование последней и ее свойств приводит не только к отмеченным выше результатам (1.7)–(1.9), но позволяет получать также определенные качественные выводы.

**2. Малые колебания и устойчивость панели с одним осциллятором.** Рассмотрим случай  $n=1$ . При этом  $Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + \alpha_1 K(x_1, \alpha) K(x, x_1)$ , ( $x > x_1$ ). После подстановки  $Q(x, \alpha)$  в (1.8) и затем в (1.7) приходим к довольно громоздкому уравнению. Его можно существенно упростить, используя тождество<sup>1</sup>

$$K(x, \alpha) = Y_0(x, x_1) K(x_1, \alpha) + Y_1(x, x_1) K'(x_1, \alpha) + \\ + Y_2(x, x_1) K''(x, \alpha) + Y_3(x, x_1) K'''(x_1, \alpha)$$

и формулы для нормальных фундаментальных функций [6]:

$$Y_0(x, \alpha) = 2\gamma K(x, \alpha) - D'(\alpha) K''(x, \alpha) - D(\alpha) K'''(x, \alpha) \\ Y_1(x, \alpha) = D(\alpha) K''(x, \alpha), \quad Y_2(x, \alpha) = D'(\alpha) K(x, \alpha) - \\ - D(\alpha) K'(x, \alpha), \quad Y_3(x, \alpha) = D(\alpha) K(x, \alpha)$$

приведем характеристическое уравнение задачи к такому виду

$$[\Psi_0 \Psi_1 \Delta(x, \alpha) + D(\alpha) \Psi_0 \Delta'(x, \alpha) - D(0) \Psi_1 \Delta^*(x, \alpha) - \\ - D(0) D(\alpha) \Delta''(x, \alpha)]|_{x=a, \alpha=0} = 0 \quad (2.1) \\ \Delta(x, \alpha) = F(x, \alpha) - \alpha_1 [F'(x_1, \alpha) F(x, x_1) - F(x_1, \alpha) F'(x, x_1)]$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\Delta(x, \alpha)|_{x=a, \alpha=0} = 0, \quad \Delta'(x, \alpha)|_{x=a, \alpha=0} = 0 \\ \Delta^*(x, \alpha)|_{x=a, \alpha=0} = 0, \quad \Delta''(x, \alpha)|_{x=a, \alpha=0} = 0 \quad (2.2)$$

Первое из них отвечает жесткой заделке кромок панели ( $\Psi_0 = \Psi_1 = \infty$ ); второе – жестко защемленной передней и шарнирно опертой задней ( $\Psi_0 = \infty, \Psi_1 = 0$ ); третье – шарнирно опертой передней и жестко защемленной задней ( $\Psi_0 = 0, \Psi_1 = \infty$ ); четвертое – панели с шарнирно опертыми кромками ( $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ ) (уравнения (2.2) согласуются с известными [6]).

Рассмотрим теперь панель постоянной толщины при  $r(x) = 0$ . В этом случае, например, третье из уравнений (2.2) приводится к виду

$$D^{-1} F'(a) - \alpha_1 [F'(x_1) F'(a - x_1) + F''(x_1) F(a - x_1)] = 0 \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> Зорий Л. М. Развитие метода начальных параметров и динамическое поведение упругих систем // Механика неоднородных структур. Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. Киев: Наук. думка, 1983. С. 88–89.

Функция  $F$ , а следовательно, и левая часть уравнения (2.3) может быть представлена в замкнутой форме или в виде ряда. Это зависит от выбора представления функции Коши [4]

$$K(x, \alpha) = \sum_{i=1}^4 \frac{\exp[s_i(x-\alpha)]}{p'(s_i)}, \quad p(s) = s^4 - \gamma s - \lambda \quad (2.4)$$

$$K(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_j(x-\alpha)^{3+j}}{(3+j)!}, \quad J_j = \gamma J_{j-3} + \lambda J_{j-4}$$

здесь  $s_i$  — корни многочлена  $p(s)$ ,  $p'(s)$  — его производная,  $J_0=1$ ,  $J_j=0$  при  $j < 0$ .

Поскольку в (2.4) многочлен  $p(s)$  имеет четвертую степень, то его корни можно выразить явно через параметры  $\gamma$  и  $\lambda$ . Заметим, что при  $\lambda=0$ :

$$K(x, \alpha) = (3\gamma)^{-1} [\exp(\gamma^{1/2}(x-\alpha)) + 2 \exp((-1/2)\gamma^{1/2}(x-\alpha)) \cos((3^{1/2}/2)\gamma^{1/2}(x-\alpha))] \quad (2.5)$$

(при  $\lambda \neq 0$  формула для  $K(x, \alpha)$  становится сложнее).

Далее представляем уравнение (2.3) в виде ряда по  $\lambda$  и применяем метод характеристических рядов [3-6]. Учитываем, что

$$F(x, \gamma, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n(x, \gamma) \lambda^n; \quad g_n(x, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2n+1} \frac{\gamma^{2m} x^{6m+4n+4}}{(6m+4n+4)!} \quad (2.6)$$

Параметр скорости потока  $\gamma$  входит в (2.6) в четных степенях. Поэтому две идентичные панели, обтекаемые потоком в противоположных направлениях, ведут себя динамически одинаково. Это согласуется с соответствующим результатом, приведенным в [7] и полученным путем численного анализа. Данный вывод имеет место также для краевых условий (1.5) (упругое закрепление кромок панели). Для случая  $\alpha_1=0$  (панель без осциллятора и сосредоточенной массы) аналогичный результат был установлен в [8].

Рассмотрим теперь панель, у которой распределенная масса пренебрежимо мала по сравнению с сосредоточенной. В этом случае

$$F(x, \gamma, 0) = g_0(x, \gamma) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2m} x^{6m+4n}}{(6m+4n)!} > 0 \quad (2.7)$$

а характеристический ряд по  $\lambda$ , полученный из уравнения (2.3), становится полиномом

$$p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$p_4 = m_1 M_1, \quad p_3 = m_1 E_1 + M_1 \varepsilon_1 + M_1 E_1 \quad (2.9)$$

$$p_2 = m_1 c_1 + M_1 k_1 + M_1 c_1 + M_1 B, \quad p_1 = k_1 E_1 + c_1 \varepsilon_1 + E_1 B$$

$$p_0 = c_1 B + c_1 k_1, \quad B = F'(a) / [F'(x_1) F'(a-x_1) + F''(x_1) F(a-x_1)] D$$

( $\varepsilon_1$  и  $E_1$  считаются малыми и их произведением пренебрегают).

Покажем, что полином (2.8) является гурвицевым при произвольных значениях параметров системы. Из формулы (2.7) следует, что всегда  $F' > 0$  и  $F'' > 0$ . Поэтому величина  $B$  в (2.9) является положительной и, следовательно,  $p_i > 0$  ( $i=0, 1, \dots, 4$ ) (поскольку  $p_0 > 0$ , то дивергентная потеря устойчивости невозможна). Очевидно, при отсутствии потока равновесное состояние системы устойчиво асимптотически. Колебательная

неустойчивость может произойти только при нарушении неравенства [6]:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_3 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{vmatrix} > 0$$

Элементарными преобразованиями этот определитель можно представить в виде суммы слагаемых, каждое из которых положительно. Следовательно, корни полинома (2.8) всегда имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, рассматриваемая безмассовая панель с присоединенным осциллятором и сосредоточенной в произвольной точке упругоупроченной массой всегда устойчива в сверхзвуковом потоке. Данный вывод устанавливается аналогично для всех случаев, которым отвечают характеристические уравнения (2.2).

Далее исследуется влияние различных параметров (отношения  $\mu$  присоединенной и распределенной масс, собственной частоты  $\omega_0$  осциллятора, отношения  $\gamma_0/\gamma_1$  коэффициентов трения, координаты  $\xi_1$  осциллятора и др.) на низшие частоты и критические значения скорости потока. Проиллюстрируем разработанную методику на примере панели с шарнирно опертыми кромками.

Соответствующее уравнение (2.2) в безразмерных величинах примет следующий вид:

$$\Delta'' = (\sigma^2 + \gamma_0 \sigma + \omega_0^2) F''(1) + \mu \sigma^2 (\gamma_0 \sigma + \omega_0^2) [F'(\xi_1) F''(1 - \xi_1) + F''(\xi_1) F'(1 - \xi_1)] = 0$$

$$\lambda = \sigma^2 + \gamma_1 \sigma, \quad \sigma = a^2 (\rho h / D)^{1/2} s, \quad \gamma_0 = a^2 (\rho h / D)^{1/2} E_1 / M_1$$

$$\omega_0^2 = a^4 \rho h c_1 / D M_1, \quad \mu = M_1 / \rho h a, \quad \gamma_1 = \Omega_0^{-1} (\varepsilon + \kappa p_\infty / \rho h c_\infty)$$

$$\Omega_0 = a^{-2} (\rho h / D)^{1/2}, \quad \xi_1 = x_1 / a, \quad \gamma = -\kappa p_\infty a^3 u / D c_\infty$$

Учитывая формулу (2.6), отсюда получаем характеристический ряд

$$\Delta'' = A_0 + A_1 \sigma + A_2 \sigma^2 + \dots \quad (2.10)$$

$$A_0 = d_0'' \omega_0^2, \quad A_1 = d_1'' \omega_0^2 \gamma_1 + d_0'' \gamma_0$$

$$A_{2n} = d_{n-1}'' + (d_n'' + P_n \mu) \omega_0^2$$

$$A_{2n+1} = [n d_n'' + ((n+1) d_{n+1}'' + n P_{n+1} \mu) \omega_0^2] \gamma_1 + (d_n'' + p_n \mu) \gamma_0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$d_i = g_i(\xi, \gamma)|_{\xi=1}, \quad a_i = g_i(\xi, \gamma)|_{\xi=\xi_1}, \quad b_i = g_i(\xi, \gamma)|_{\xi=1-\xi_1} \quad (2.11)$$

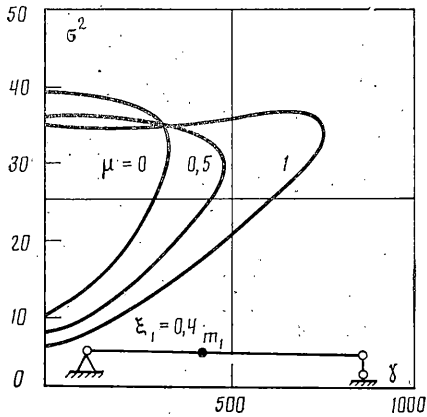
$$\xi = x/a, \quad p_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i' b_{n-i-1}'' + \sum_{i=0}^{n-1} a_i'' b_{n-i-1}'$$

Используя коэффициенты (2.11) характеристического ряда (2.10), оцениваем нижние частоты собственных колебаний, а также критические значения, отвечающие флаттеру.

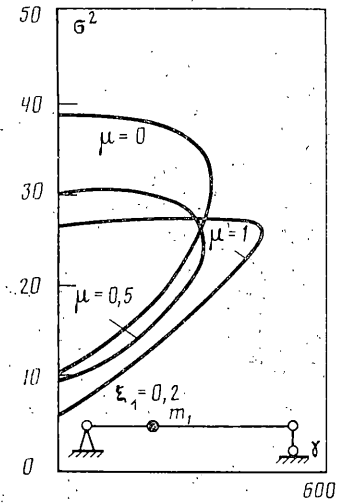
Некоторые из полученных результатов приведены ниже. На основании проведенного анализа приходим к следующим выводам.

Потеря устойчивости панели с сосредоточенной массой  $m_1$  при  $\mu \leq 1$  ( $\mu = m_1 / \rho h a$ ) обусловлена слиянием первой и второй частот (фиг. 1, 2). Квазикритическое значение  $\gamma^0$  скорости потока с увеличением параметра  $\mu$  неограниченно возрастает. При этом зависимость  $\gamma^0(\mu)$  может быть монотонной ( $\xi_1 = 0, 4$ ) или немонотонной ( $\xi_1 = 0, 2$ ).

На фиг. 3 приведена зависимость низших частот как функций скорости потока при различных значениях  $\omega_0$  частоты осциллятора ( $\mu = 0, 5$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

При достаточно больших значениях собственной частоты  $\omega_0$  осциллятора значения  $\gamma^*$  близки к соответствующим квазикритическим значениям  $\gamma^0$  панели с сосредоточенной массой. При достаточно малых  $\omega_0$  взаимосвязь системы панель — осциллятор становится слабой (Фиг. 3).

Критические значения флаттера  $\gamma^* = \gamma^*(\omega_0)$  могут иметь сильно выраженный минимум ( $\xi_1 = 0,5$ ), слабо выраженный минимум ( $\xi_1 = 0,4$ ) или вообще его не иметь ( $\xi_1 = 0,3$ ); однако во всех этих случаях функция  $\gamma^*(\omega_0)$  имеет существенный максимум при  $35 < \omega_0 < 50$  (Фиг. 4). Как и следовало ожидать, значения  $\gamma^*(\omega_0)$  при  $\omega_0 \rightarrow \infty$  асимптотически приближаются к соответствующим значениям панели с сосредоточенной массой. Кривые на Фиг. 4 соответствуют случаю  $\mu = 0,5$ ;  $\gamma_0/\gamma = 0,5$ .

**3. Об устойчивости панели с двумя сосредоточенными массами.** Пусть распределенная масса панели пренебрежимо мала (система с двумя степенями свободы);  $-\alpha_i = m_i s^2 + \varepsilon_i s$  ( $i = 1, 2$ ). При шарнирном описании кромок панели, исходя из последнего уравнения (2.2) и поступая аналогично, как в случае панели с одной сосредоточенной массой, приходим к характеристическому многочлену (2.8). Для определения его коэффициентов служат формулы

$$p_0 = C(\gamma), \quad p_1 = \varepsilon_1 B_1(x_1, \gamma) + \varepsilon_2 B_2(x_2, \gamma), \quad p_2 = p_2^+ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 A(x_1, x_2, \gamma) \quad (3.1)$$

$$p_2^+ = m_1 B_1(x_1, \gamma) + m_2 B_2(x_2, \gamma), \quad p_3 = (m_1 \varepsilon_2 + m_2 \varepsilon_1) A(x_1, x_2, \gamma)$$

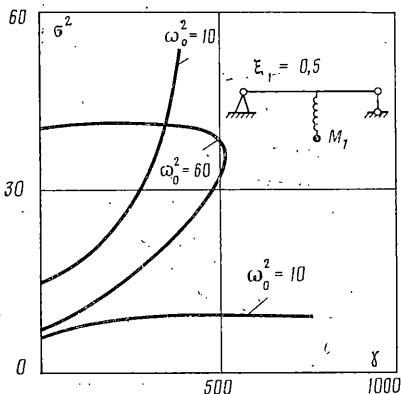
$$p_4 = m_1 m_2 A(x_1, x_2, \gamma)$$

$$B_i(x_i, \gamma) = F'(x_i)F''(1-x_i) + F''(x_i)F'(1-x_i) > 0 \quad (i=1, 2)$$

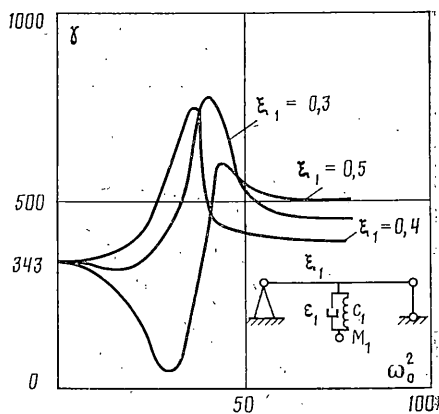
$$A(x_1, x_2, \gamma) = K(x_2 - x_1)K(1 - x_2) [K''(x_1)K''(1) - K(x_2)K^{IV}(1)] + \\ + K''(1 - x_1)K(1 - x_2) [K(x_1)K''(x_2) - K''(x_1)K(x_2)] + \\ + K(1 - x_1)K''(1 - x_2) [K(x_2)K''(x_1) - K''(x_2)K(x_1)] + \\ + K(x_2 - x_1)K''(1 - x_2) [K(x_1)K''(1) - K''(x_1)K(1)] \quad (3.2)$$

Здесь функция  $K(x, \alpha)$  определяется соотношением (2.5). До потери устойчивости величина  $A$  является положительной (предположение о том, что  $A \leq 0$  приводит к противоречию); при этом коэффициенты  $p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ) также положительны.

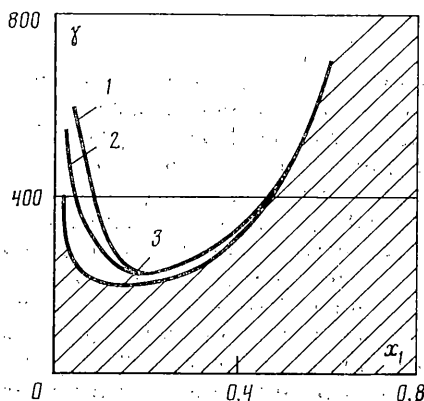
Построим теперь в пространстве параметров область  $D$ , в которой равновесное состояние системы всегда устойчиво. [9]. Отметим, что в случа-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ях  $x_1 \rightarrow 0$ ,  $x_2 \rightarrow 0$  или при достаточной близости  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 1$ ) рассматриваемая система, как видно из формул (3.1), (3.2), становится тождественной системе с одной степенью свободы и, следовательно, критическое значение флаттера неограниченно возрастает.

Пусть трение не учитывается ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ). Тогда уравнение (2.8) примет вид

$$p_4 s^4 + p_2^+ s^2 + p_0 = 0 \quad (3.3)$$

Его дискриминант

$$\Delta_1 = (p_2^+)^2 - 4p_0 p_4 = (m_1 B_1 - m_2 B_2)^2 + 4m_1 m_2 (B_1 B_2 - AC) \quad (3.4)$$

Квадраты корней  $s_i^2$  ( $i=1, 2$ ) уравнения (3.3) отрицательны при  $\Delta_1 > 0$ . Нарушению этого неравенства отвечает колебательная потеря устойчивости.

Рассмотрим уравнение  $V(x_1, x_2, \gamma) = B_1 B_2 - AC = 0$  и обозначим его наименьший корень через  $\gamma^*$ . Очевидно, что знак дискриминанта (3.4) существенно зависит от знака функции  $V(x_1, x_2, \gamma)$ .

Обозначим через  $D$  в плоскости параметров  $(x_1, \gamma)$  область, определяемую соотношениями  $0 < x_1 < a$ ;  $0 < \gamma < \gamma^*(x_1)$  (параметр  $x_2$  фиксируется). Очевидно, в области  $D$  неравенство  $\Delta_1 > 0$  выполняется при любых допустимых значениях  $m_1$  и  $m_2$ . Предположим, что имеет место соотношение

$$m_1/m_2 = B_1/B_2 \Big|_{\gamma=\gamma^*(x_1)}$$

Тогда при значениях  $\gamma > \gamma^*$  наступает неустойчивость. Покажем теперь, что в этой области система всегда устойчива. Пусть  $\varepsilon_1 \neq 0$  и  $\varepsilon_2 \neq 0$  (произведением  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$  пренебрегаем). Асимптотическая устойчивость имеет место, если предпоследний определитель Гурвица  $\Delta$  многочлена (2.8) удовлетворяет условию  $\Delta > 0$ , которое равносильно такому неравенству

$$B_1^2 f(\mu, k, q) - AC > 0 \quad (3.5)$$

$$f(\mu, k, q) = \frac{(1 + \mu q)(\mu + qk^2)}{(\mu + k)^2} \quad (3.6)$$

$$\mu = \varepsilon_1 / \varepsilon_2, \quad k = m_2 / m_1, \quad q = B_2 / B_1$$

Нетрудно убедиться, что при  $k = \mu$  функция  $f(\mu, k, q)$  достигает максимума  $f_{\max} = (1 + kq)^2 / 4k$ , а при  $k = q^{-1}$  — минимума ( $f_{\min} = q$ ).

Заметим что,  $f_{\max}|_{k=q^{-1}} = f_{\min} = q$ . Это же минимальное значение, как видно из (3.6), достигается при  $\mu = 0$  и  $\mu = \infty$ . Поскольку  $A > 0$  и  $c > 0$ , то из (3.5) следует, что условие устойчивости при  $f = q$  равносильно неравенству  $V(x_1, x_2, \gamma) > 0$ . Другими словами, в определенной выше (без учета трения) области  $D$  имеет место асимптотическая устойчивость равновесного состояния при любых значениях параметров рассматриваемой системы с двумя степенями свободы. Очевидно, что в этой области (и на ее границе) произвольные малые силы трения, пропорциональные скорости, всегда только стабилизируют систему. Поэтому  $D$  можно назвать областью достоверной устойчивости [9] (на фиг. 5 она заштрихована).

Графики на фиг. 5 показывают зависимость критической скорости потока от координаты  $x_1$  при  $x_2 = 0,8$ . Кривая 1 соответствует случаю  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , кривая 2 —  $\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = 5$ ,  $m_1 / m_2 = 1$ , и кривая 3 —  $\varepsilon_1 = 0$ .

**4. Прямоугольная панель с массой, сосредоточенной на прямолинейном отрезке.** Рассмотрим теперь панель со сторонами  $a$ ,  $b$ , шарнирно опертую по кромкам, параллельным  $OX$ , и упруго закрепленную по  $OY$ . Со стороны противоположной потоку по линии  $x = x_0$  присоединен осциллятор. Уравнение малых колебаний имеет вид

$$D \Delta \Delta \omega + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + M_0 \delta(x - x_0) \frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon_0 \rho h \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\kappa \rho_\infty}{c_\infty} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} - U \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0$$

а перемещение присоединенного элемента удовлетворяет уравнению

$$M_0 d^2 q / dt^2 + \varepsilon_0 (dq / dt - d\omega_0 / dt) + c_0 (q - \omega_0) = 0$$

Положив

$$\omega(x, y, t) = W(x, y) \exp(st), \quad q(t) = Q \exp(st), \quad \xi = x/a$$

$$\eta = y/a, \quad \alpha_1 = -M_0 s^2 a^3 (\varepsilon_0 s + c_0) / D (M_0 s^2 + \varepsilon_0 s + c_0), \quad \xi_0 = x_0/a$$

$$W(\xi, \eta) = X(\xi) \sin m\pi\nu y; \quad \gamma = -\kappa \rho_\infty a^3 U / c_\infty D; \quad A = \rho h a^4 / D$$

$$B = \varepsilon_0 \rho h a^4 / D + \kappa \rho_\infty a^4 / c_\infty D, \quad \nu = a/b \quad (m=1, 2, \dots)$$

придем к такой совокупности задач на собственные значения для  $X(\xi)$ :

$$X^{IV} - \beta X'' - \gamma X' - \lambda X = \alpha_1 \delta(\xi - \xi_0) X_0$$

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0$$

$$X''(0) - \Psi_0 X'(0) = 0, \quad X''(1) + \Psi_1 X'(1) = 0$$

$$\beta = 2\pi^2 \nu^2, \quad \lambda = -(As^2 + Bs + \pi^4 \nu^4)$$

Характеристическое уравнение задачи определяется соотношением



(2.1), однако фигурирующая в нем функция  $F$  имеет более сложный вид [4]:

$$F(\xi, \beta, \gamma, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+1} f_n(\xi, \beta, \gamma) \lambda^n$$

$$f_n(\xi, \beta, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{im}^{(n)} \frac{\beta^{m-i} \gamma^i \xi^{2m+4n+i+4}}{(2m+4n+i+4)!}$$

$$f_{0m}^{(n)} = C_{2n+m+1}^{2n+1}, \quad f_{mm}^{(n)} = K_m C_{n+m/2}^n$$

$$K_m = {}^{1/2} [1 + (-1)^m], \quad f_{ij}^{(n)} = C_j^i f_{ii}^{(n)} f_{oj}^{(n)} (f_{oi}^{(n)})^{-1}$$

Отсюда следует, что  $F$  — четная функция параметра  $\gamma$ . Поскольку  $\beta > 0$ , то свободный член разложения  $F$  в ряд по  $\lambda$  положителен. Следовательно, при любом значении  $m$ , как и в случае цилиндрического изгиба, дивергентная потеря устойчивости не имеет места.

Повторяя здесь рассуждения, относящиеся к (2.7) — (2.9), приходим к выводу о невозможности потери устойчивости безмассовой панели с массой (осциллятором), сосредоточенной по отрезку прямой. Очевидно, что здесь изменение направления потока на противоположное также не влияет на колебания и устойчивость рассматриваемой панели. Отметим, что данные выводы нетрудно установить для аналогичной задачи о флаттере трехслойной цилиндрической оболочки [10].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бологин В. В., Симонов Б. П. Устойчивость упругих панелей с присоединенными элементами в потоке газа // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 129—135.
2. Бологин В. В., Симонов Б. П. Влияние упругоподвешенных масс на устойчивость упругих панелей в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 149—156.
3. Зорий Л. М. К теории устойчивости систем с распределенными параметрами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1968. № 11. С. 992—995.
4. Зорий Л. М. Об одном представлении характеристических уравнений некоторых краевых задач для систем с распределенными параметрами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1968. № 12. С. 1072—1075.
5. Зорий Л. М. Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 155—162.
6. Расчеты и испытания на прочность: Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и малых колебаний прямолинейных стержней переменного сечения. Методические рекомендации МР 213-87 М.: ВНИИ по нормализации в машиностроении Госстандарта СССР. 1987. 43 с.
7. Прочность, устойчивость, колебания / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 657 с.
8. Бердник Я. С., Зорий Л. М. Один способ качественного исследования колебаний и устойчивости систем с распределенными параметрами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1973. № 7. С. 621—623.
9. Зорий Л. М. К устойчивости равновесия неконсервативных систем // Вопросы механики реального твердого тела. Киев.: Наук. думка. 1964. Вып. 3. С. 113—119.
10. Смирнов А. И. Собственные колебания и флаттер трехслойных цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 3. С. 533—536.

Львов

Поступила в редакцию  
8.1.1990