МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 534.014

© 1992 г. М. Ф. ДИМЕНТБЕРГ, А. А. СОКОЛОВ

ВИБРОДИАГНОСТИКА НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПО ДАННЫМ О КОЛЕБАНИЯХ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫМИ СИЛАМИ

Рассмотрена задача обнаружения и оценки уровня нелинейности восстанавливающей силы системы с одной степенью свободы по результатам измерений колебаний, возбуждаемых случайной силой. Для двух конкретных примеров – системы со скачком жесткости и виброударной системы – проведены численные эксперименты по сравнению трех методов идентификации: метода стационарной плотности вероятности, метода расщепления резонансного пика спектральной плотности и предлагаемого в настоящей работе метода взаимной корреляции амплитуд различных гармоник.

1. Постановка задачи. При испытаниях некоторых элементов машин и конструкций – например, трубопроводов с жидкостью – часто проводятся измерения «естественных» вибрационных сигналов, которые возбуждаются широкополосными случайными силами, недоступными для измерений. При интерпретации результатов таких виброизмерений частоты наблюдаемых пиков спектральной плотности сигнала обычно отождествляют с собственными частотами нормальных форм колебаний системы, а по характерной ширине этих пиков оценивают эффективные характеристики демпфирования. Однако такие оценки будут правильны, вообще говоря, лишь при условии справедливости линейной модели системы. Например, нелинейность восстанавливающей силы той или иной собственной формы колебаний может привести к появлению дополнительных пиков спектра и к такому расширению соответствующего «основного» резонансного пика, что прямое использование его характерной ширины для оценки демпфирования будет давать неверные результаты.

Разумеется, обнаружение и оценка уровня нелинейности по результатам измерения колебаний может представлять интерес не только для проверки адекватности линейной модели. Быть может наиболее наглядный пример прямого использования результатов такой идентификации – это вибродиагностика «хлопающей» трещины, у которой переходы между раскрытым и закрытым состояниями (соответственно при растяжении и сжатии) связаны со скачками жесткости. Так, в работе [1] сообщается о системе вибродиагностики таких трещин в лонжеронах крыла самолета, основанной на обнаружении субгармонических колебаний порядка 1/2 при синусоидальном возбуждении. Прикладной интерес может представлять также обнаружение виброударных пар, люфтов и так далее.

В предлагаемой работе задача идентификации нелинейной составляющей функции $f(x)$ рассмотрена для системы, описываемой уравнением

$$x^{\cdot\cdot}+2\alpha x^{\cdot}+f(x)=\xi(t) \qquad (1.1)$$

где $\xi(t)$ – стационарный центрированный гауссовский белый шум интенсивности D с нулевым средним значением. Параметр α считается малым, так что система (1.1) квазиконсервативна. Приведены описания трех методов решения этой задачи и результаты их сравнения в численных экспериментах для двух вариантов $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\Omega^2 x, & x<x_0\\ \Omega_1^2 x+(\Omega^2-\Omega_1^2)x_0, & x\geqslant x_0, \quad \Omega_1<\Omega\end{cases} \tag{1.2}$$

$$f(x)=\Omega^2(x-\Delta\,\mathrm{sgn}\,x) \tag{1.3}$$

Первый вариант соответствует, в частности, системе с «хлопающей» трещиной, причем относительное снижение жесткости $1-\Omega_1/\Omega$ непосредственно связано с глубиной трещины. Второй вариант соответствует виброударной системе с односторонним ограничителем, которая может быть приведена к виду (1.1) специальным негладким преобразованием [2].

2. Возможные методы идентификации. Очевидный метод идентификации нелинейной функции $f(x)$ основан на построении оценки стандартной плотности вероятности $w(x)$ измеренного сигнала $x(t)$. Действительно, для процесса, удовлетворяющего стохастическому уравнению (1.1), справедлива зависимость [3]:

$$w(x)=C\exp[-(2/D)U(x)], \quad U'(x)=f(x) \tag{2.1}$$

где C — постоянная. Согласно (2.1), нелинейность функции $f(x)$ удобнее всего обнаруживать по нелинейности зависимости функции $-\ln w$ от переменной $z=x^2\,\mathrm{sgn}\,x$. Более того, зависимость (2.1) дает принципиальную возможность полного восстановления функции $f(x)$ в тех случаях, когда она неизвестна, по измеренному сигналу $x(t)$. Однако при малых эффективных уровнях нелинейности — например, при больших x_0 в случае характеристики (1.2) — точность таких статистических оценок может быть весьма чувствительна к длине реализации сигнала $x(t)$. Вместе с тем, для некоторых приложений (как в примере с трещиной) достаточно ограничиться лишь оценкой уровня нелинейной составляющей функции $f(x)$; сама эта функциональная зависимость может быть либо известна заранее, либо не представлять особого интереса. В связи с этим представляют интерес два других метода, которые оперируют лишь с моментами второго порядка измеренного сигнала $x(t)$.

Первый из этих методов относится к нелинейности специального кусочно-линейного вида (1.2). Анализ системы (1.1), (1.2) методом моментов [4] показывает, что при определенных условиях резонансный пик спектральной плотности $\Phi_{xx}(\omega)$ процесса $x(t)$ может «расщепиться» на два близких пика, связанных с двумя собственными частотами Ω и Ω_1 нелинейной системы (1.1), (1.2). Следует отметить, что решение [4] не является точным (метод моментов применялся раздельно для двух областей линейности $x<x_0$ и $x>x_0$, а условие непрерывности совместной плотности вероятности при $x=x_0$ было заменено условиями непрерывности моментов). Однако указанный эффект допускает также простое обоснование и простую физическую интерпретацию в рамках асимптотического представления решения уравнения (1.1) при исчезающе малых $\alpha, \xi(t)$ с использованием медленно меняющихся амплитуды и фазы [3]. В этом приближении для резонансного пика спектра справедлива формула

$$\Phi_{xx}(\omega)={}^1/_2A^2p(A)\,|dA/d\omega| \tag{2.2}$$

Здесь $A(\omega)$ — функция, обратная к зависимости для «скелетной кривой» $\omega(A)$, т. е. зависимости между амплитудой A и частотой ω первой гармоники свободных незатухающих колебаний системы (1.1). (1.2) (при $\alpha=0$, $\xi(t)=0$), а $p(A)$ — стационарная плотность вероятности амплитуды колебаний при отличных от нуля, но малых $\alpha, \xi(t)$. Согласно (2.2) $\Phi_{xx}(\omega)$ при $|x_0|>0$ действительно должна иметь пики на собственных частотах малых и «очень больших» колебаний соответственно Ω и $2\Omega\Omega_1/(\Omega+\Omega_1)$, где $|d\omega/dA|$ обращается в нуль. Подчеркнем однако, что это свойство, вообще говоря, асимптотическое, справедливое лишь при достаточно малом демпфировании.

3. **Предлагаемый метод идентификации.** Идентификация нелинейности возможна также на основании анализа дополнительных пиков спектральной плотности $\Phi_{xx}(\omega)$ на высших гармониках частоты малых колебаний Ω. Этот эффект допускает приближенное асимптотическое описание, аналогичное (2.2) [3], если для $x(t)$ используется улучшенное первое приближение метода Крылова — Боголюбова [5]:

$$x(t)=A\cos\psi+\Omega^{-2}\sum_{k=2}^{\infty}C_k(A)\cos k\psi/(k^2-1)$$

$$C_k(A)=(2\pi A)^{-1}\int_0^{2\pi}f(A\cos\psi)\cos k\psi\,d\psi \tag{3.1}$$

Здесь $A=A(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда колебаний в системе (1.1) с малыми $\alpha, \xi(t)$. Однако обнаружение этих высших пиков $\Phi_{xx}(\omega)$ путем прямого спектрального анализа может оказаться затруднительным на фоне нерезонансной составляющей процесса $x(t)$ (возбуждаемой компонентами $\xi(t)$ с частотой соответствующего пика $n\Omega$, $n=1, 2, \ldots$) и, быть может, помех в измеренном сигнале $x(t)$ (например, колебаниями по другим нормальным формам многомассовой системы).

Преодолеть это затруднение можно с помощью предлагаемой процедуры взаимно корреляционного анализа амплитуд основной и какой-либо из высших гармоник. Непосредственно из (3.1) видно, что коэффициент любого слагаемого ряда (3.1) должен быть коррелирован с коэффициентом A первого слагаемого (основной гармоники) так как содержит ту же самую медленно меняющуюся функцию $A(t)$. Напротив, нерезонансные составляющие $x(t)$ в окрестностях частот $n\Omega$ некоррелированы с основной гармоникой A, равно как и (в большинстве случаев) колебания системы по другим собственным формам. Следовательно, взаимная корреляция амплитуд основной и какой-либо высшей гармоники есть четкий признак нелинейности; наиболее чувствительны обычно амплитуды гармоник низкого порядка — второго, если $f(x)$ не является нечетной, и третьего, в случае нечетной $f(x)$.

Соответствующая процедура обработки измеренного сигнала $x(t)$ такова. Процесс $x(t)$ одновременно пропускается через два полосовых фильтра, один из которых настроен на частоту Ω, другой — на 2Ω или 3Ω. Ширина полосы пропускания первого фильтра берется много меньшей Ω, но большей α (подробнее о выборе этого параметра будет сказано позднее), а у второго фильтра она должна быть соответственно в два или три раза больше. У выходных сигналов фильтров выделяются амплитуды и затем оценивается нормированный коэффициент взаимной корреляции ρ_{1k} центрированных составляющих этих амплитуд, где $k=2$ или $k=3$ — номер высшей гармоники. Значимое отличие ρ_{1k} от нуля означает, что система нелинейна, причем величина ρ_{1k} дает также грубую оценку уровня нелинейности. Действительно, в отсутствие нерезонансных составляющих $x(t)$ этот коэффициент в силу (3.1) равен

$$\rho_{1k}=\frac{\langle (A-\langle A\rangle)(C_k(A)-\langle C_k(A)\rangle)\rangle}{[\langle (A-\langle A\rangle)^2\rangle\langle (C_k(A)-\langle C_k(A)\rangle)^2\rangle]^{1/2}} \tag{3.2}$$

где угловыми скобками обозначена операция вероятностного осреднения по стационарной плотности вероятности $p(A)$, для которой известно выражение в явном виде [3]. Величина (3.2) отличается от единицы лишь

Ω_1/Ω / x_0/σ	0,6	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0
0	0,672	0,648	0,502	0,402	0,310	0,077	0,019	0,015
1	0,662	0,536	0,434	0,244	0,144	0,078	0,027	0,015
2	0,338	0,174	0,096	0,038	0,016	0,012	0,012	0,015
3	0,009	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015

в силу нелинейности $C_k(A)$; отличие же измеренного ρ_{1k} от (3.2) обусловлено нерезонансными составляющими $x(t)$ и, быть может, помехами. Поэтому измеренный коэффициент ρ_{1k} действительно характеризует ту долю дисперсии сигнала на выходе высокочастотного полосового фильтра, которая обусловлена инерцией соответствующей высшей гармоники за счет нелинейности системы; прямой оценки этой доли, правда, он не дает из-за нелинейности операций выделения амплитуд и этот вопрос нуждается в дальнейшем анализе.

Изложенный метод представляется достаточно общим: он справедлив при произвольном виде нелинейной функции $f(x)$. Вместе с тем, для кусочно-линейных систем — скажем, с характеристикой (1.2) или (1.3) — можно уточнить теоретическую оценку коэффициента корреляции амплитуд (3.2). Действительно, в этом случае можно вместо улучшенного первого приближения (3.1) воспользоваться точным решением уравнения соответствующей (1.1) консервативной системы: в качестве параметра это решение содержит энергию $E=\dot{x}^2/2+U(x)$, которая при малых $\xi(t)$ и α будет медленно меняющейся функцией времени. Указанное решение раскладывается в ряд Фурье

$$x(t)=C_0(E)+\sum_{k=1}^{n}[C_{ks}(E)\sin\Omega(E)t+C_{kc}\cos\Omega(E)t]$$

$$\Omega(E)=2\pi/T(E),\qquad T(E)=\int\limits_0^E[E-U(x)]^{-1/2}\,dx$$

и в формуле (3.2) для ρ_{1k} следует заменить A и $C_k(A)$ соответственно на $[C_{1s}^2(E)+C_{1c}^2(E)]^{1/2}$ и $[C_{ks}^2(E)+C_{kc}^2(E)]^{1/2}$, а под угловыми скобками понимается теперь операция осреднения по стационарной плотности вероятности энергии [3]: $p(E)=[C/T(E)]\exp(-4\alpha E/D)$. По этой процедуре были найдены (численным интегрированием) коэффициенты ρ_{12} и ρ_{13} соответственно для систем (1.2) и (1.3). Они оказались близки к единице (причем для системы (1.2) аналитически показано, что $\rho_{12}\to1$ при $\Omega-\Omega_1\to\to0$).

4. Методика и результаты численных экспериментов. Для проверки описанных выше трех методов был проведен ряд численных экспериментов. Система (1.1) с характеристикой (1.2) или (1.3) интегрировалась численно на ЭВМ при значениях $\xi(t)$, формировавшихся датчиком случайных чисел. Статистическая обработка полученного процесса $x(t)$ начиналась по прошествии определенного времени после начального момента, с тем, чтобы этот процесс действительно представлял установившиеся колебания. При реализации процедуры обработки сигнала в соответствии с методом взаимной корреляции амплитуд основной и высшей гармоник были опробованы различные значения важного параметра Δ/Ω, где Δ — ширина полосы пропускания фильтра-анализатора основной гармоники. Дело в том, что уменьшение этой полосы усиливает эффект взаимной корреляции за счет уменьшения доли нерезонансных составляющих выходного сигнала высокочастотного фильтра, но вместе с тем может резко повысить требования к точности настройки фильтров при обработке реальных сигналов. Наилучшее компромиссное значение Δ/Ω зависит, разумеется, от относительного коэффициента демпфирования α/Ω; приведенная ниже таблица результатов численных экспериментов по проверке этого метода получена при $\alpha/\Omega=0{,}01$, $\Delta=10\alpha$.

Результаты моделирования на ЭВМ можно вкратце подытожить следующим образом. Метод расщепления резонансного пика спектральной плотности для системы (1.1), (1.2) следует признать неудачным. Во-первых, асимптотический эффект расщепления проявлялся лишь при очень малых значениях α/Ω, нетипичных для многих механических систем: при $\alpha/\Omega>0{,}004$ он вообще не наблюдался, и нелинейность просто приводила к расширению и искажению формы резонансного пика. При меньших α/Ω эффект можно было наблюдать, но лишь в определенном диапазоне значений параметра σ/x_0, характеризующего уровень колебаний. Например, при $0{,}7<\sigma/x_0<1{,}0$ в случае $\alpha/\Omega=0{,}001$, $\Omega_1/\Omega=0{,}6$. Здесь $\sigma=(D/4\alpha\Omega^2)^{1/2}$ среднеквадратическое перемещение соответствующей линейной системы. При меньших σ/x_0 наблюдался лишь один пик на собственной частоте малых колебаний Ω (что вполне естественно), но при достаточно больших σ/x_0 этот пик исчезал, и оставался лишь один пик на собственной частоте «больших» колебаний $2\Omega\Omega_1/(\Omega+\Omega_1)$. Эта чувствительность эффекта расщепления резонансного пика спектра к уровню колебаний не позволяет считать данный метод достаточно универсальным.

Метод стационарной плотности вероятности давал неплохие результаты для обоих вариантов нелинейной функции $f(x)$ (1.2) и (1.3) при условии достаточно большой нелинейности – соответственно достаточно больших $1-\Omega_1/\Omega$ и Δ – и при достаточно большом числе циклов N обрабатываемой реализации $x(t)$. Последнее в общем приходилось брать несколько большим, чем при использовании метода взаимной корреляции амплитуд, который оказался наиболее надежным. Результаты применения этого метода к системе (1.1), (1.2) представлены в таблице в виде значений оценок нормированного коэффициента корреляции ρ_{12} при $\alpha/\Omega=0{,}01$. Видно, что метод работает хорошо, причем – в отличие от метода расщепления резонансного пика – его надежность повышается по мере роста уровня колебаний. Грубо говоря, он позволял в данном примере (при $N=1000$) надежно обнаруживать снижение собственной частоты на 10% при $\sigma/x_0>1$ и на 20% при $\sigma/x_0<1$. Хорошие результаты этот метод дал и для виброударной системы (1.1), (1.3) при использовании коэффициента корреляции ρ_{13}.

В заключение отметим, что метод взаимной корреляции амплитуд различных гармоник может быть использован также для некоторых систем с распределенными параметрами, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Простейший пример, для которого эффект взаимной корреляции можно описать аналитически – уравнение Бюргерса, рассматриваемое на полубесконечном интервале при узкополосных случайных колебаниях переменной состояния на границе этого интервала. В квазистатическом приближении решение этого уравнения можно представить в виде разложения в ряд Бесселя – Фубини, содержащего в качестве параметра медленно меняющуюся амплитуду узкополосного входного воздействия [6]. Последняя входит во все коэффициенты ряда, так что амплитуды различных гармоник решения коррелированы между собой и коэффициенты корреляции легко могут быть вычислены при известной плотности вероятности входного воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыфанский С. Л., Ожиганов В. М., Милов А. Б., Невский Ю. Н.* Об одном методе поиска повреждения крыла самолета, основанном на анализе его нелинейных колебаний // Вопросы динамики и прочности. Вып. 39. Рига: Зинатне, 1981. С. 3–10.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний // М.: Наука, 1988. 328 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
4. *Wedig W.* The integration of nonlinear stochastic systems with applications to the damage and ambiguity identification // ZAMM. 1981. Bd 61. H. 1. P. 7–20.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.– М.: Физматгиз, 1958, 408 с.
6. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1990