МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК

© 1992 г. Н. В. БАНИЧУК, А. С. БРАТУСЬ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ДИВЕРГЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

На основе динамического подхода с учетом малых демпфирующих сил исследуется устойчивость состояния равновесия неконсервативной упругой системы с распределенными параметрами. Возмущения, вносимые демпфирующими силами, делятся на дефектные (дестабилизирующие) и идеальные в зависимости от того, происходит или нет падение критического значения параметра. Устанавливаются необходимые и достаточные условия идеальности возмущений в случае, когда невозмущенная система теряет устойчивость статическим (дивергентным) образом. Полученные результаты применимы и в случае механических систем с конечным числом степеней свободы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородные уравнения и граничные условия, с помощью которых описываются малые колебания сжатых упругих тел при наличии сил малого демпфирования [1, 2]:

$$A(p)u(x,t)+\varepsilon B(p)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (1.1)$$

$$(C_{1j}(p)u)_{x=0}=(C_{2j}(p))_{x=l}=0 \quad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (1.2)$$

Здесь $A(p)$ и $B(p)$ — операторы дифференцирования по пространственной переменной x вида

$$A(p)=\sum_{j=0}^{2n}a_j(p)\frac{\partial^j}{\partial x^j},\quad B(p)=\sum_{j=0}^{m}b_j(p)\frac{\partial^j}{\partial x^j} \qquad (1.3)$$

где $m\leqslant 2n$ — целые положительные числа.

Коэффициенты $a_j(p)$, $b_j(p)$ аналитически зависят от вещественного параметра нагрузки p. $C_{1j}(p)$, $C_{2j}(p)$ — операторы дифференцирования по x, порядок которых не превосходит $2n$ такого же вида, что и операторы (1.3). Далее предполагается, что краевые условия (1.2) являются условиями типа Штурма [3]. Вид оператора $A(p)$ определяется жесткостными свойствами упругого тела и способом его сжатия. Обычно в задачах механики параметр p входит линейно и

$$A(p)=S+pN \qquad (1.4)$$

где S и N — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Структура оператора $B(p)$ зависит от вида демпфирующих сил, участвующих в системе, а малый параметр ε $(0<\varepsilon<1)$ характеризует интенсивность демпфирования. Линейные дифференциальные операторы C_{1j}, C_{2j} определяются способами закрепления и сжатия упругого тела. В общем случае начально-краевая задача (1.1), (1.2) является несамосопряженной.

Если не учитывать действие демпфирующих сил, то уравнение колебаний (1.1) принимает вид

$$A(p)u(x,t)+\partial^2 u(x,t)/\partial t^2=0 \qquad (1.5)$$

Динамический способ исследования устойчивости систем (1.5), (1.2) и (1.1), (1.2) основан на возможности представления решения $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=v(x)e^{i\omega t} \tag{1.6}$$

где i — мнимая единица, ω — частота, $v(x)$ — амплитудная функция. Подстановка (1.6) в (1.5), (1.2) приводит к стационарному уравнению для амплитудной функции

$$A(p)v(x)=\omega^2 v(x) \tag{1.7}$$

и граничным условиям вида (1.2) для $v(x)$. Уравнение (1.7) совместно с краевыми условиями (1.2) для функции $v(x)$ составляет краевую задачу на собственные значения.

Решение задачи (1.2), (1.7) разыскивается на гладких функциях интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, l]$. Отметим, что роль собственных значений в (1.7) играет квадрат частоты ω^2. Будем полагать, что система (1.2), (1.5) теряет устойчивость при $p=p_0$ дивергентным (статическим) образом, если выполняются следующие условия:

1. В некоторой окрестности точки p_0 спектр задачи (1.2), (1.7) является дискретным.

2. При $p<p_0$ все собственные значения $\omega_j^2(p)$ задачи (1.2), (1.7) простые и удовлетворяют условиям $\omega_j^2(p)>0$.

3. При $p=p_0$ по крайней мере одно из собственных значений обращается в ноль $\omega_1^2(p_0)=0$, причем при $p>p_0$ выполняется условие $\omega_1^2(p)<0$.

4. Все остальные собственные значения в достаточно малой окрестности точки p_0 остаются простыми и удовлетворяют условиям $\omega_j^2(p)>0$, $j=2, 3, \ldots$

Исследование устойчивости системы (1.1), (1.2), учитывающей демпфирование, с использованием представления (1.6) приводит к краевой задаче на собственное значение

$$A(p)v(x)+i\varepsilon\omega B(p)v(x)=\omega^2 v(x) \tag{1.8}$$

Функция $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям вида (1.2). Отметим, что в этом случае роль собственного значения играет частота ω.

При каждом $\varepsilon>0$ критическим значением параметра назовем величину p_ε, являющуюся нижней гранью тех значений параметра p, для которых хотя бы одно собственное значение $\omega(p, \varepsilon)$ задачи (1.8) имеет отрицательную мнимую часть.

Здесь, как и ранее, критичность понимается в том смысле, что при $p<p_\varepsilon$ система (1.8) имеет собственные значения, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Im}\omega_j(p,\varepsilon)\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots$, тогда как при всех достаточно малых значениях разности $p-p_\varepsilon>0$ по крайней мере одно собственное значение задачи (1.8) имеет отрицательную мнимую часть.

Множество точек $(\varepsilon, p_\varepsilon)$ в плоскости εp задает некоторую линию, которую далее будем называть критической. Критическая линия отделяет область устойчивости системы (1.1), (1.2) от области неустойчивости.

Рассмотрим величину p_d, определенную равенством

$$p_d=\lim_{\varepsilon\to+0} p_\varepsilon \tag{1.9}$$

Известно [4—7], что величина $p_d\leqslant p_0$ (здесь — критическое значение параметра устойчивости для системы (1.5), (1.2)). Если $p_d=p_0$, то возмущение системы (1.2), (1.5), вносимое демпфирующими силами, называется идеальным. В противном случае возмущения назовем дефектным или дестабилизирующим. Ранее в [8, 9] были установлены условия идеальности возмущений неконсервативных систем, устойчивость которых теряется динамическим (флаттерным) образом. Цель данной работы — исследование влияния демпфирования на устойчивость неконсервативной системы, которая без учета действия этих сил теряет устойчивость статическим (дивергентным) образом.

Отметим, что еще Л. Эйлером было предложено исследовать устойчивость упругих стержней статическим методом на основе рассмотрения возможностей существования близких искривленных форм равновесия стержня. Данный способ является в настоящее время основным в исследованиях по устойчивости упругих консервативных систем.

Предположим, что оператор $A(p)$ имеет вид (1.4). Согласно статическому подходу в качестве критического параметра потери устойчивости p_0 принимают наименьшее из всех значений p, для которых уравнение равновесия сжатого упругого тела

$$Sw(x)+pNw(x)=0$$

с краевыми условиями (1.2) имеет нетривиальное решение.

Пусть система консервативна, т. е. S, N — самосопряженные линейные дифференциальные операторы на функциях, удовлетворяющих краевым условиям (1.2), причем S — положительно определенный, а N — отрицательно определенный оператор на указанном классе функций. Для этого случая в [1] было предложено простое доказательство эквивалентности статического и динамического подхода к исследованию устойчивости упругих систем при отсутствии демпфирования, т. е. показано, что оба подхода приводят к одному и тому же значению критического параметра потери устойчивости.

Однако область применимости статического подхода не ограничена консервативными упругими системами. Известны примеры упругих неконсервативных систем, потеря устойчивости которых происходит по статическим формам (задача Гринхилла о потере устойчивости шарнирно закрепленного скручиваемого вала, задача и дивергенции крыла большого удлинения и др.). Поэтому существенный интерес представляет расширение области применимости метода Эйлера. В этом направлении отметим работу [10], в которой эквивалентность статического и динамического подходов была показана для одного класса неконсервативных систем с несамосопряженным оператором N. Система принадлежит к данному классу, если существует линейный дифференциальный оператор T, такой, что выполняется условие

$$\int_0^l (-\omega^2w+Sw+pN\omega)Tv\,dx=\int_0^l (-\omega^2v+Sv+pNv)Tw\,dx$$

для функций w, v, удовлетворяющих краевым условиям (1.2). Системы такого рода названы в [10] консервативными системами 2-го рода.

Важным аспектом обоснования статического подхода и расширение области его применимости для исследования устойчивости упругих систем является исследование влияния малого демпфирования на величину критической силы потери устойчивости. В общем случае упругих систем влияние малого демпфирования может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим. Для систем с конечным числом степеней свободы, таких, например, как система твердых тел, соединенных упругими связями, известен результат [11], получивший название теоремы Кельвина — Тэта — Четаева о том, что устойчивое положение равновесия при одних потенциальных силах сохраняет устойчивость и при добавлении гироскопических и диссипативных сил, т. е. в том случае, когда оператор $B(p)$ в (1.1) является неотрицательно определенным. Это утверждение теряет свою силу в случае неконсервативных систем. Поэтому исследование влияния демпфирования позволяет также выяснить, для каких типов неконсервативных систем 2-го рода и классов демпфирующих сил статический способ отыскания критического значения параметра потери устойчивости остается справедливым.

2. Асимтотические разложения. В [9] доказано, что уравнение критической линии в плоскости εp имеет вид $R(\varepsilon^2, p)=0$, где $R(z, p)$ — представляет собой ряд по степеням z с коэффициентами, зависящими от параметра p. При этом если функция $R(z, p)$ непрерывна в некоторой окрестности $U=\{p, \varepsilon : 0<\varepsilon<\varepsilon_0, |p-p_d|<\delta\}$ точки $(0, p_d)$ плоскости εp, для которой $R(0, p_d)=0$, и имеет в U непрерывные частные производные, причем $\partial R(0, p_d)/\partial p\neq 0$, то возмущение системы (1.2), (1.4) в виде (1.1), (1.2) считается регулярным. Здесь величина p_d определена равенством (1.9). В силу теоремы о неявной функции для регулярных возмущений в полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp имеет место представление

$$p_\varepsilon=p_d+\varepsilon^2 p_2+o(\varepsilon^2) \tag{2.1}$$

где коэффициенты p_d и p_2 не зависят от ε. В частности $p_2=-R_z'(0, p_d)/R_p'(0, p_d)$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь случая регулярных возмущений.

Пусть $p_d=p_0$ и $\omega_1^2(p_0)=0$ — простое собственное значение краевой задачи (1.7), (1.2). Имеют место разложения квадрата собственного значения $\omega_{1,\varepsilon}^2$ и соответствующей собственной функции $v_1^\varepsilon(x)$ возмущенной задачи на собственное значение (1.8), (1.2) по степеням параметра ε [12, 13]:

$$\omega_{1,\varepsilon}=\varepsilon\mu_1+\varepsilon^2\mu_2+\ldots \tag{2.2}$$

$$v_1^\varepsilon(x)=v_1^0(x)+\varepsilon v_1^1(x)+\varepsilon^2 v_1^2(x)+\ldots$$

Эти разложения сохраняют свой вид и в том случае, когда $\omega_1^2(p_0)=0$ — двукратное нулевое собственное значение задачи (1.7), (1.2) и ему соответствуют две линейно независимые собственные функции [12]. Если же $\omega_1^2(p_0)=0$ — двукратное собственное значение, но ему соответствует лишь единственная собственная функция, то разложения строятся по степеням $\varepsilon^{1/2}$ [13]:

$$\omega_{1,\varepsilon}=\varepsilon^{1/2}\mu_1+\varepsilon\mu_2+\ldots \tag{2.3}$$

$$v_1^\varepsilon(x)=v_1^0(x)+\varepsilon^{1/2}v_1^1(x)+\varepsilon v_1^2(x)+\ldots$$

Из (2.2) и (2.3) следуют представления для величин возмущенных частот $(\mu_1\neq 0)$:

$$\omega_{1,\varepsilon}=\pm\varepsilon^{1/2}\sqrt{\mu_1}\pm{}^1/_2\varepsilon^{3/2}\mu_2/\sqrt{\mu_1}\pm\ldots \tag{2.4}$$

$$\omega_{1,\varepsilon}=\pm\varepsilon^{1/4}\sqrt{\mu_1}\pm{}^1/_2\varepsilon^{3/4}\mu_2/\sqrt{\mu_1}\pm\ldots \tag{2.5}$$

Здесь и далее верхний знак соответствует одной ветви, а нижний — другой ветви значений величины $\omega_{1,\varepsilon}$.

Подставляя представление (2.2) в уравнение (1.8) и выделяя члены при одинаковых степенях ε, получим уравнения для определения величин μ_1 и функций $v_1^1(x)$:

$$A^0v_1^1(x)=\mu_1 v_1^0(x),\quad A^0v_1^0(x)=0,\quad A^0=A(p_0) \tag{2.6}$$

Не умаляя общности, полагаем далее, что собственная функция $v_1^\varepsilon(x)$ нормирована так, что

$$(v_1^\varepsilon, v_1^0)=1 \tag{2.7}$$

Скобки обозначают скалярное произведение функций в пространстве функций интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, l]$.

3. Необходимые и достаточные условия идеальности возмущений (случай простого нулевого собственного значения). Введем в рассмотрение сопряженную к (1.7), (1.2) краевую задачу на собственное значение

$$A^*(p)z(x)=\omega^2 z(x) \tag{3.1}$$

$$(C_{1j}^*(p)z)_{x=0}=(C_{2j}^*(p)z)_{x=l}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

где $A^*(p)$, $C_{1j}^*(p)$, $C_{2j}^*(p)$ — формально сопряженные дифференциальные операторы к операторам $A(p)$, $C_{1j}(p)$, $C_{2j}(p)$.

Утверждение 1. Пусть $\omega_1^2(p_0)$ — простое собственное значение задачи (1.7), (1.2) при $p=p_0$. Для того, чтобы возмущения системы (1.5), (1.2) в виде (1.1), (1.2) было идеальным, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$(B^0 v_1^0, z_1^0)\geqslant 0, \quad (A_p^0 v_1^0, z_1^0)<0 \tag{3.3}$$

Здесь B^0 и A_p^0 — дифференциальные операторы, определяемые формулами

$$B^0=B(p_0), \qquad A_p^0=\left(\frac{d}{dp}A(p)\right)_{p=p_0} \tag{3.4}$$

$v_1^0(x)$, $z_1^0(x)$ — решение краевых задач (1.7), (1.2) и (3.1), (3.2) соответственно при $p=p_0$ и $\omega_1^2(p_0)=0$.

Доказательство. Пусть возмущение системы (1.5), (1.2) в виде (1.1), (1.2) является идеальным, т. е. в представлении (2.1) $p_d=p_0$. Тогда на критической кривой

$$p_\varepsilon=p_0+\varepsilon^2 p_2+O(\varepsilon^4) \tag{3.5}$$

в достаточно узкой полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости имеют место разложения (2.2) и (2.4) для собственных функций и собственных значений задачи (1.8), (1.2). Если второе уравнение (2.6) умножить на собственную функцию $z_1^0(x)$ сопряженной задачи (3.1), (3.2), найденную при $p=p_0$, и проинтегрировать результат от 0 до l, то получим $\mu_1(v_1^0, z_1^0)=0$. (Здесь, как и ранее, скобки обозначают скалярное произведение функций.) Так как $v_1^0(x)$ — собственная функция, отвечающая простому собственному значению, то $(v_1^0, z_1^0)\neq 0$. Поэтому $\mu_1=0$ и представление (2.4) для $\omega_{1,\varepsilon}$ принимает вид

$$\omega_{1,\varepsilon}=\pm\varepsilon\sqrt{\mu_2}\pm\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\mu_2}}\mu_3\pm\ldots \tag{3.6}$$

Из второго уравнения (2.6) следует, что $A^0 v_1^1=0$. С другой стороны, из условия нормировки (2.7) с учетом (2.2) имеем в первом приближении по ε $(v_1^0, v_1^1)=0$. Так как по условию v_1^0 — единственная собственная функция задачи (1.7), (1.2), отвечающая нулевому собственному значению, то отсюда вытекает, что $v_1^1(x)=0$.

Для отыскания функции $v_1^2(x)$ подставим разложения (3.6) и (2.1) в уравнение (1.8) и выделим члены, содержащие ε. Получим уравнение

$$A^0 v_1^2(x)=\mu_2 v_1^0(x)\mp i\sqrt{\mu_2}B^0 v_1^0(x)-p_2 A_p^0 v_1^0(x) \tag{3.7}$$

где операторы A^0, B^0, A_p^0 определены согласно (2.6), (3.4). Из альтернативы Фредгольма следует, что для разрешимости уравнения (3.7) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна собственной функции $z_1^0(x)$ сопряженной краевой задачи (3.1), (3.2). Это приводит к равенству

$$\mu_2\mp i\sqrt{\mu_2}(B^0 v_1^0, z_1^0)-p_2(A_p^0 v_1^0, z_1^0)=0 \tag{3.8}$$

Здесь знак минус соответствует первой ветви, а знак плюс — второй ветви значений в (3.6)

Положим $\pm i\sqrt{\mu_2}=\tau$, тогда $\operatorname{Re}\tau=\pm\operatorname{Im}\sqrt{\mu_2}$. Из (3.6) следует, что для того, чтобы при достаточно малом ε в полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp выполнялось условие $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}\geqslant 0$, необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\tau\leqslant 0$. Из критерия Рауса — Гурвица следует, что для удовлетворения последнего неравенства небходимо и достаточно, чтобы

$$(B^0v_1^0, z_1^0)\geqslant 0,\quad p_2(A_p{}^0v_1^0, z_1^0)\geqslant 0 \qquad (3.9)$$

Предположим, что выполняется первое неравенство (3.9) и при этом $(A_p{}^0v_1^0, z_1^0)\geqslant 0$. Это означает, что на кривых вида (3.5) с произвольными $p_2\geqslant 0$ справедливо неравенство $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}\geqslant 0$. С другой стороны, из предположений п. 1 следует, что для любого числа p_1, сколь угодно мало отличающегося от p_0, и такого, что $p_1-p_0>0$, имеет место неравенство $\operatorname{Im}\omega_{1,0}(p_1)=-\delta^2<0$. Так как число p_2 можно выбрать сколь угодно большим положительным, то кривая (3.5) в достаточно узкой полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp, будет проходить сколь угодно близко от точки $(0, p_1)$ этой плоскости. При этом на самой кривой $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}\geqslant 0$, тогда как $\operatorname{Im}\omega_{1,0}(p_1)=-\delta^2<0$.

Последнее противоречит свойству непрерывной зависимости собственных значений краевой задачи (1.8), (1.2) от значений параметра ε. Следовательно, второе неравенство в (3.9) может быть выполнено лишь как $(A_p{}^0v_1^0, z_1^0)<0$.

Утверждение 2. Пусть $\omega_1^2(p_0)=0$ — простое собственное значение задачи (1.7), (1.2) при $p=p_0$. И пусть в дополнение к условиям (3.3) выполняются неравенства

$$(B^0v_i^0, z_i^0)\geqslant 0\quad (i=1, 2, 3, \ldots) \qquad (3.10)$$

Тогда возмущение системы (1.5), (1.2) в виде (1.1), (1.2) является идеальным и при этом в достаточно малой полосе $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ плоскости εp характеристическая кривая имеет асимптотическое представление вида

$$p_\varepsilon=p_0+O(\varepsilon^4) \qquad (3.11)$$

Здесь, как и ранее, $v_i^0(x)$, $z_i^0(x)$ — собственные функции краевых задач (1.7), (1.2) и (3.1), (3.2) соответственно, отвечающие собственным значениям $\omega_i^2(p_0)$, $i=2, 3, \ldots$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные кривые вида (3.5), выходящие из точки $(0, p_0)$ плоскости εp. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что имеют место уравнения (3.7) и (3.8). Так как условия (3.3) выполнены, то из (3.8) следует, что при $p_2>0$ $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}<0$, а при $p_2<0$ $\operatorname{Im}\omega_{1,0}>0$. Следовательно, кривая вида (3.5) с $p_2=0$ отделяет на плоскости εp множество, где $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}<0$, от множества, где $\operatorname{Im}\omega_{1,\varepsilon}>0$. Проследим теперь, как ведут себя другие возмущенные собственные значения на этой кривой. Для них справедливы представления [12, 13]:

$$\omega_{i,\varepsilon}^2=\omega_{i,0}^2+\varepsilon\mu_{1i}+\varepsilon^2\mu_{2i}+\ldots$$

$$\omega_{i,\varepsilon}=\pm\omega_{i,0}\pm{}^1/_2\varepsilon/\omega_{i,0}\mu_{1i}\pm\ldots$$

Аналогичные представления имеют место для собственных функций, отвечающим этим собственным значениям $(i=2, 3, \ldots)$:

$$v_i^\varepsilon(x)=v_i^0(x)+\varepsilon v_i^1(x)+\varepsilon^2v_i^2(x)+\ldots$$

Подставляя все эти разложения в уравнение (1.8) и учитывая при этом равенство (3.5), получим уравнения $A^0v_i^1(x)=\mu_{1i}v_i^0(x)\mp i\,\omega_{i,0}B^0v_i^0(x)$.

Так же как и в случае уравнения (3.8), условие разрешимости этого уравнения дает равенство

$$\mu_{1i}(v_i^0, z_i^0)=\pm i\,\omega_{i,0}(B^0v_i^0, z_i^0) \qquad (3.12)$$

Не умаляя общности, считаем, что собственные функции прямой и сопряженной задачи выбраны так, что $(v_i^0, z_i^0)>0$. Тогда если выполняются условия (3.10), то $\operatorname{Im}\omega_{i,\varepsilon}\geqslant 0$. Следовательно, характеристическая кривая имеет вид (3.11), а возмущение системы (1.5). (1.2) в виде (1.1), (1.2) является идеальным.

Следствие 1. (Обобщение теоремы Кельвина — Тэта — Четаева на неконсервативные системы). Пусть выполняются условия (3.3) и (3.10). Тогда при достаточно малом ε_0 для $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ возмущенная система (1.1), (1.2) будет устойчива при любых $p<p_0$. Если же первое неравенство (3.3) и неравенства (3.10) выполнены как строгие, то при указанных значениях p и ε возмущенная система (1.1), (1.2) будет асимптотически устойчива.

Доказательство первой части этого утверждения следует из аргументов, приведенных при доказательстве утверждения 2. Если же неравенства (3.3) и (3.10) выполнены в строгой форме, то при $p_2=0$ из (3.8) и (3.12) следует, что $\operatorname{Im}\omega_{i,\varepsilon}>0$; $i=1, 2, 3, \dots$

Замечание 1. Если исходная краевая задача (1.7), (1.2) является самосопряженной, т. е. система (1.5), (1.2) — консервативная, то условия (3.3) и (3.10) в силу полноты системы собственных функций превращаются в условие неотрицательной определенности оператора B^0 и отрицательной определенности оператора $A_p{}^0$, что соответствует условиям теоремы Кельвина — Тэта — Четаева для данного случая.

В частности, если оператор $A(p)$ задан в виде (1.3), то из отрицательной определенности N вытекает справедливость второго условия (3.3).

Следствие 2. Пусть оператор $A(p)$ имеет вид (1.4) и система (1.2), (1.5) является консервативной системой 2-го рода [10], т. е. выполняется условие (1.10). Пусть также выполняются условия (3.3) и (3.10). Тогда критическое значение параметра p_0, полученное для системы (1.5), (1.2) статическим методом, и критическое значение параметра p_ε, полученное для системы (1.1), (1.2) в результате применения динамического подхода, отличаются друг от друга при достаточно малых ε на величину порядка $O(\varepsilon^4)$.

Замечание 2. Все полученные результаты остаются справедливыми и в том случае, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$A(p)u(t)+\varepsilon B(p)u^{\bullet}(t)+u^{\bullet\bullet}(t)=0$$

где $u(t)$ — вектор-функция t, $A(p)$, $B(p)$ — вещественные матрицы с коэффициентами, зависящими от параметра $p\in\mathbb{R}$.

Пример. Пусть движение механической системы описывается уравнениями

$$u_1^{\bullet\bullet}+ku_1-pu_1+pu_2+\varepsilon(b_{11}u_1^{\bullet}+b_{12}u_2^{\bullet})=0$$

$$u_2^{\bullet\bullet}+4ku_2-pu_2+\varepsilon(b_{21}u_1^{\bullet}+b_{22}u_2^{\bullet})=0$$

где p — параметр нагрузки $k>0$, $\varepsilon>0$, b_{ij} — действительные числа $(i, j=1, 2)$.

Полагая $u_i=v_i\exp(i\omega t)$, получим при $\varepsilon=0$ задачу на собственное значение для матрицы

$$A(p)=\begin{bmatrix} k-p & p \\ 0 & 4k-p \end{bmatrix}.$$

Ее собственные значения $\omega_1{}^2=k-p$, $\omega_2{}^2=4k-p$. При $p_0=k$ все условия п. 1 выполняются. Собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению, — $v_1{}^0=(1, 0)^T$, а соответствующий вектор сопряженной задачи — $z_1{}^0=(3, -1)^T$. Собственные векторы, соответствующие второму собственному значению $\omega_2{}^2=4k-p_T$ при $p_0=k$, равны $v_2{}^0=(1, 3)^T$, $z_2{}^0=(0, 1)^T$. Применяя условия (3.3) и (3.10) в строгой форме, получим, что

$$3b_{11}-b_{21}>0,\ 3b_{22}+b_{21}>0$$

Отсюда, в частности, следует, что $b_{11}+b_{22}>0$.

Полученный результат допускает непосредственную проверку, так как в этом случае характеристическое уравнение для исходной системы имеет вид

$$\lambda^4+\varepsilon\lambda^3(b_{11}+b_{22})+\lambda^2(5k-2p+\varepsilon^2(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}))+$$
$$+\varepsilon\lambda(b_{11}(4k-p)+b_{22}(k-p)-b_{21}p)+$$
$$+(4k-p)(k-p)=0,\ \lambda=i\omega$$

Применяя при $p_0=k$ критерий Рауса — Гурвица, получим необходимые и достаточные условия в виде

$$b_{11}+b_{22}>0,\ 3b_{11}-b_{21}>0$$
$$(b_{11}+b_{22})(3k+\varepsilon^2(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}))>k(3b_{11}-b_2)$$

Последнее условие приводится к виду $3b_{22}+b_{21}+O(\varepsilon^2)>0$. Таким образом условия, полученные при помощи (3.3) и (3.10), совпадают при достаточно малых ε с условиями, полученными при помощи критерия Рауса — Гурвица.

4. Случай двукратного нулевого собственного значения. Пусть $\omega_1^2(p_0)=0$ — двукратное собственное значение задачи (1.7), (1.2), и ему соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_1^0(x)$, $y_2^0(x)$. Введем обозначения

$$\beta_{sj}=(B^0y_s^0,\ z_j^0),\ \alpha_{sj}=(A_p^0y_s^0,\ z_j^0) \tag{4.1}$$

Здесь $z_1^0(x)$, $z_2^0(x)$ — соответствующие собственные функции сопряженной краевой задачи (3.1), (3.2), вычисленные при $p=p_0$, A^0, B^0 — дифференциальные операторы, определенные ранее. Положим

$$v_1^0(x)=\gamma_1y_1^0(x)+\gamma_2y_2^0(x) \tag{4.2}$$

где γ_1, γ_2 — постоянные, такие, что $\gamma_1^2+\gamma_2^2\neq0$. Если возмущение системы (1.5), (1.2) в виде (1.1), (1.2) является идеальным, то так же, как и в предыдущем случае, справедливы разложения (2.2) и уравнения (2.6). Рассуждения, аналогичные тем, что использовались при доказательстве утверждения 1, показывают, что величина μ_1 в (2.2) равна нулю. Поэтому имеет место представление (3.6) и для функции $v_1^0(x)$ справедливо уравнение (3.7). Умножая это уравнение последовательно на функции $z_1^0(x)$ и $z_2^0(x)$, интегрируя получающиеся соотношения от 0 до l, приходим к системе линейных однородных уравнений относительно постоянных γ_1 и γ_2 линейной комбинации (4.2). Из условия равенства нулю определителя этой системы с учетом условия нормировки $(y_s^0,\ z_j^0)=\delta_{sj}$ $(s,\ j=1,\ 2)$ (δ_{sj} — символ Кронекера) и обозначения (4.1) приходим к уравнению для определения величины $\sqrt{\mu_2}$, входящей в разложение (3.6):

$$\mu_2^2\mp i\,\mu_2^{3/2}c_1-\mu_2c_2\pm i\,\mu_2^{1/2}c_3+c_4=0 \tag{4.3}$$
$$c_1=\beta_{11}+\beta_{22},\ c_2=p_2(\alpha_{11}+\alpha_{22})+(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})$$
$$c_3=p_2(\beta_{22}\alpha_{11}+\beta_{11}\alpha_{22}-\beta_{12}\alpha_{21}-\beta_{21}\alpha_{12})$$
$$c_4=p_2^2(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12})$$

Используя обозначение $\pm i\sqrt{\mu_2}=\tau$ и применяя критерий Рауса — Гурвица, получим необходимые условия идеальности возмущения, которые можно записать в виде неравенств

$$c_j\geqslant0,\ (j=1,\ 2,\ 3,\ 4),\ c_3(c_1c_2-c_3)\geqslant c_1^2c_4 \tag{4.4}$$

Так же как и при доказательстве утверждения 1, можно показать, что из условия $c_3 \geqslant 0$ следует, что

$$\beta_{22}\alpha_{11}+\beta_{11}\alpha_{22}-\beta_{12}\alpha_{21}-\beta_{21}\alpha_{12}<0 \tag{4.5}$$

В противном случае $p_2 \geqslant 0$, что, как показано ранее, невозможно, если возмущение является идеальным. Тогда $p_2 \leqslant 0$ и неравенства $c_j \geqslant 0$ ($j=1, 2, 4$) примут вид

$$\begin{gathered}\beta_{11}+\beta_{22} \geqslant 0, \ \beta_{21}\beta_{12}-\beta_{11}\beta_{22} \leqslant 0 \ (\alpha_{11}+\alpha_{22} \geqslant 0)\\ \beta_{21}\beta_{12}-\beta_{11}\beta_{22} \geqslant 0 \ (\alpha_{11}+\alpha_{22}<0)\\ \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12} \geqslant 0\end{gathered} \tag{4.6}$$

Анализ последнего условия в (4.4) в общем случае является громоздким и здесь не приводится.

Замечание 3. Так же как и в п. 3, можно доказать, что совокупность условий (4.5), (4.6) и условия $c_3(c_1c_2-c_3) \geqslant c_1^2c_4$ вместе с условиями (3.10) представляют достаточные условия идеальности возмущения, а характеристическая кривая имеет представление (3.11).

Пример. Пусть движение механической системы описывается уравнениями

$$\begin{gathered}u_1^{\cdot\cdot}+(k-p)u_1+ku_3+\varepsilon(b_{11}u_1^{\cdot}+b_{12}u_2^{\cdot}+b_{13}u_3^{\cdot})=0\\ u_2^{\cdot\cdot}+(k-p)u_2+\varepsilon(b_{21}u_1^{\cdot}+b_{22}u_2^{\cdot}+b_{23}u_3^{\cdot})=0\\ u_3^{\cdot\cdot}+(k-p)u_3+\varepsilon(b_{31}u_1^{\cdot}+b_{32}u_2^{\cdot}+b_{33}u_3^{\cdot})=0\end{gathered}$$

Здесь p — параметр нагрузки, $k>0$, $\varepsilon>0$, b_{ij} — действительные числа $i, j=1, 2, 3$. Полагая $u_i=v_i \exp(i\omega t)$, получим при $\varepsilon=0$ задачу на собственное значение для матрицы

$$A(p)=\begin{bmatrix} k-p & 0 & k\\ 0 & k-p & 0\\ 0 & 0 & 2k-p\end{bmatrix}$$

Собственные значения этой матрицы $\omega_{1,2}^2=k-p$, $\omega^2=2k-p$. При $p_0=k$ имеем $\omega_{1,2}^2=0$ — двукратным собственным значением, которому соответствуют собственные векторы $v_1^0=(1, 0, 0)^T$, $v_2^0=(0, 1, 0)^T$. Соответствующие собственные векторы, отвечающие двукратному нулевому собственному значению для сопряженной задачи, имеют вид $z_1^0=(1, 0, -1)^T$, $z_2^0=(0, 1, 0)^T$. Вычисляя по формулам (4.1) коэффициенты α_{sj}, β_{sj} $(s, j=1, 2)$, получим $\alpha_{11}=-1$, $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$, $\alpha_{22}=-1$, $\beta_{11}=b_{11}-b_{31}$, $\beta_{12}=b_{21}$, $\beta_{21}=b_{12}-b_{32}$, $\beta_{22}=b_{22}$.

Поэтому

$$\begin{gathered}c_1=b_{11}+b_{22}-b_{31}, \ c_2=-2p_2+(b_{11}-b_{31})b_{22}-\\ -b_{21}(b_{21}-b_{23}), \ c_3=-p_2(b_{11}+b_{22}-b_{31}), \ c_4=p_2^2\end{gathered}$$

Условия (4.5), (4.6) дают неравенства

$$b_{11}+b_{22}-b_{31}>0, \ -b_{21}(b_{12}-b_{32})+b_{22}(b_{11}-b_{31}) \geqslant 0$$

Анализ условия $c_3(c_1c_2-c_3)>c_1^2c_4$ показывает, что оно выполнено, если выполняются последние неравенства при $p_2 \leqslant 0$.

Условие (3.10) принимает в этом случае вид $b_{33}+b_{31} \geqslant 0$, поэтому с учетом неравенства $b_{11}+b_{22}-b_{31}>0$ имеем $b_{11}+b_{22}+b_{23}>0$.

Так же как и в предыдущем примере, этот результат можно проверить с помощью критерия Рауса — Гурвица, поскольку характеристическое уравнение имеет вид ($\lambda=i\omega$, $k=1$):

$$\lambda^4+\varepsilon\lambda^3(b_{11}+b_{22}+b_{33})+\lambda^2(1+\varepsilon^2(b_{11}b_{22}+b_{22}b_{33}+b_{13}b_{31}-$$
$$-b_{21}b_{12}))+\lambda(\varepsilon(b_{11}+b_{22}-b_{31})+\varepsilon^2(b_{11}b_{22}b_{33}+b_{21}b_{32}b_{13}+$$
$$+b_{12}b_{23}b_{31}-b_{13}b_{22}b_{31}-b_{32}b_{23}b_{11}-b_{12}b_{33}b_{21})+$$
$$+\varepsilon^2(b_{11}b_{22}+b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31}-b_{12}b_{21})=0$$

Замечание 4. Случай двукратного нулевого собственного значения задачи (1.7), (1.2), которому соответствует лишь одна собственная функция, исследуется при помощи разложений (2.3) и (2.5) аналогично тому, как это сделано в [8, 9].

При этом полученное в этих работах необходимое условие идеальности возмущения сохраняет свой вид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз, 1961, 339 с.
2. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. / Под ред. В. В. Болотина. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978, 352 с.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. Наука, 1969, 526 с.
4. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solids and Struct. 1969. V. 5. No. 9. P. 965–989.
5. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об устойчивости вязкоупругих стержней. Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 78–87.
6. *Денисов Г. Г., Новиков В. В.* Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением. Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 41–47.
7. *Hermann G., Jong I. C.* On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // J. Appl. Mech. Trans. ASME. V. 2. 1965. P. 592–597.
8. *Баничук Н. В., Братусь А. С., Мышкис А. Д.* Об эффектах стабилизации и дестабилизации в неконсервативных системах. ПММ. 1989. Т. 53. № 2. С. 206–214.
9. *Баничук Н. В., Братусь А. С.* О динамической устойчивости упругих распределенных систем при наличии малых диссипативных сил // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 166–174.
10. *Leipholz H. H.* On consewative elastic systems of the first and second kind // Ing. Arch. No. 3. 1974. P. 255–271.
11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М. Наука, 1965. 204 с.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М. Мир, 1972.
13. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 30–80.

Москва

Поступила в редакцию
17.XII.1990