

УДК 539.3

© 1992 г. А. Ю. ЕВКИН, А. В. КОРОВАЙЦЕВ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЗАКРИТИЧЕСКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ СИЛЬНОМ ИЗГИБЕ**

Конструкции с тонкостенными элементами, исполнительные функции которых связаны с большими перемещениями, поворотами и деформациями, интенсивно используются в ракетной технике, космонавтике, химическом машиностроении [1, 2]. Создан по сути новый класс трансформируемых элементов конструкций, области работы которых являются глубоко закритическими. Проблемы их проектирования резко отличаются от привычных для механиков. На современном уровне развития материаловедения основная проблема связана с обеспечением осесимметричности закритических состояний, так как пока нет конструкционных материалов, выдерживающих сильный изгиб в двух направлениях. Эта проблема особенно остра для конструкций многоразового использования. Поэтому пока расчетные схемы осесимметричного закритического деформирования оправданы и актуальны, а проблемы потери устойчивости и расчета критических нагрузок являются подчиненными по сравнению с исследованием поведения оболочки при сильном изгибе. Второй важной для проектирования проблемой является задача создания тонкостенных элементов с заданным типом диаграммы поведения, а также анализ их напряженно-деформированного состояния (НДС). Решение обеих проблем связано с высокими требованиями к их математическому обеспечению, методам и средствам анализа.

При слабом развитии вычислительной техники получили преимущество методы геометрического направления [3-6], однако отсутствие математического обоснования, а также усложнение форм тонкостенных элементов длительное время не позволяло использовать их в инженерной практике. Успешнее развивались численные методы решения задач сильного изгиба и закритического деформирования тонкостенных элементов [7-10]. Они позволили в некоторой мере обеспечить проектирование тонкостенных систем, работающих в закритической области. Вместе с тем платой за универсальность подходов явилось увеличение трудоемкости расчетов, что придало еще большее значение комплексному подходу к проблеме исследования НДС тонкостенных элементов в закритической области, развитию асимптотических методов и их обоснованию. В настоящей работе методы геометрического направления развиваются по пути асимптотического анализа одного из вариантов уравнений непологих оболочек вращения для описания НДС при сильном изгибе. В численных методах решения приведенных задач используется шаговый подход к решению соответствующих нелинейных краевых задач [8, 9]. Расчеты проводились различными алгоритмами с многократными сравнениями численных результатов между собой. При сопоставлении результатов численных расчетов НДС оболочки с данными асимптотического анализа при сильном изгибе выбран метод дискретного продолжения решения по параметру с универсальным параметром продолжения решения нелинейных задач [8]. Такое сравнение проводится впервые в научной литературе. Особенно необходимо подчеркнуть полную независимость результатов авторов, работающих в разных научных школах, а также возможность обоснования ряда положений асимптотического анализа путем сопоставления с численным расчетом, информативным по всем компонентам НДС. Основным оригинальным результатом работы, полезным для проектирования тонкостенных элементов конструкций, создаваемых специально для работы в закритической области, по мнению авторов является разработка методов оценки экстремальных значений компонент НДС оболочек вращения при сильном изгибе и аналитическое построение диаграмм выворачивания во всем диапазоне соответствующих перемещений за исключением начальной и конечной стадий.

В ряде работ ([11-14] и др.) проведен асимптотический анализ нелинейных уравнений пологих оболочек с использованием малого параметра, характеризую-

щего тонкостенность конструкции. В качестве основного приближения асимптотики получены соотношения геометрической теории А. В. Погорелова [3]. В [14] сделана также попытка обобщения подхода на случай замкнутой сферы, которая рассматривалась в рамках теории неполигих оболочек. Однако при этом использованы приближенные исходные соотношения, справедливые в ограниченном диапазоне изменения угла наклона касательной к меридиану. Не установлена также зависимость внешнего давления от параметров закритической равновесной конфигурации.

1. Основные соотношения, связывающие перемещения и деформации точек срединной поверхности оболочки при сильном изгибе, в соответствии с работой [15] могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_2 = u/r_0, \quad dv/ds_0 = (1 + \varepsilon_1) \sin \psi - \sin \psi_0 \quad (1.1)$$

$$du/ds_0 = (1 + \varepsilon_1) \cos \psi - \cos \psi_0 \quad (1.2)$$

$$d\psi/ds_0 = (1 + \varepsilon_1)/\rho_{10} + \chi_1, \quad 1/\rho_{10} = d\psi_0/ds_0 \quad (1.3)$$

где ε_1 и ε_2 — деформации элемента срединной поверхности в меридиональном и окружном направлении, u и v — горизонтальная и вертикальная составляющие перемещения, s_0 — расстояние от начала координат до рассматриваемой точки по дуге меридиана, ψ_0 и ψ — углы наклона касательной к меридиану до и после деформации, $1/\rho_{10}$ и χ_1 — кривизна и ее изменение в меридиональном направлении.

Уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид

$$\frac{dV}{ds_0} = -(1 + \varepsilon_1) \left(\frac{\cos \psi}{r} V + q_v \right) \quad (1.4)$$

$$\frac{dU}{ds_0} = -(1 + \varepsilon_1) \left(\frac{\cos \psi}{r} U - \frac{N_2}{r} + q_u \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{dM_1}{ds_0} = -(1 + \varepsilon_1) \left[\frac{\cos \psi}{r} (M_1 - M_2) - U \sin \psi + V \cos \psi \right] \quad (1.6)$$

Здесь U , V , q_u , q_v — горизонтальные и вертикальные составляющие внутренних сил и внешней нагрузки, N_1 , M_1 — внутреннее усилие и изгибающий момент, возникающие в площадке, перпендикулярной меридиану, N_2 и M_2 — соответствующие силовые факторы, действующие по площадке, лежащей в плоскости меридиана

$$r = r_0 + u, \quad N_1 = U \cos \psi + V \sin \psi \quad (1.7)$$

Для асимптотического анализа приведенных уравнений вводится малый параметр

$$\varepsilon^2 = h\rho_{20}/[12(1 - \nu^2)]^{1/2}/\rho_{10}^2 \quad (1.8)$$

где h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона материала.

Рассматривается класс оболочек вращения, для которых радиусы главных кривизн ρ_{10} и ρ_{20} одного порядка

$$\rho_{20}/\rho_{10} \sim O(1), \quad \varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

Также предполагается, что форма срединной поверхности оболочки плавно изменяется в меридиональном направлении. Тогда

$$d\rho_{10}/d\psi_0 \sim O(\rho_{10}), \quad d\rho_{20}/d\psi_0 \sim O(\rho_{20}), \quad \varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad (1.10)$$

Изучается поведение оболочек в глубокой закритической стадии при внешнем давлении, существенно меньшем классического критического значения. В этом случае компоненты нагрузки могут быть представлены в виде

$$q_u = \varepsilon q_* q_u^0, \quad q_v = \varepsilon q_* q_v^0 \quad (1.11)$$

$$q_* = 2Eh^2/[3(1-\nu^2)]^{1/2}/[(\rho_{10}\rho_{20})]$$

где E — модуль упругости, верхним индексом обозначены соответствующие безразмерные переменные величины, порядок которых равен единице.

Следует отметить, что начальное закритическое поведение оболочки при нагрузках, близких к классическому критическому значению, достаточно эффективно описывается при помощи хорошо разработанного асимптотического подхода В. Т. Койтера. В настоящей статье приведены результаты, которые дополняют картину закритического поведения оболочки при низких нагрузках. В этом случае переход к безразмерным величинам и асимптотический анализ соответствующей полной системы уравнений позволяет установить следующие соотношения порядка основных величин

$$\begin{aligned} N_2 &= q_* \rho_{20} N_2^0 \sin \psi_0 / \varepsilon, & U &= q_* \rho_{10} U^0 / 4, & \varepsilon_2 &= \varepsilon \varepsilon_2^0 \\ V &= \varepsilon^2 q_* \rho_{10} V^0, & \chi_1 &= \chi_1^0 / (\rho_{10} \varepsilon), & \chi_2 &= \chi_2^0 / \rho_{20}, & \psi &= \psi^0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Тогда из соотношений (1.7) следует

$$N_1 = q_* \rho_{10} U^0 \cos \psi / 4, \quad r \sim O(r_0), \quad \varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad (1.13)$$

Анализ формул (1.12) и (1.13) показывает, что определяющими в глубоко закритическом состоянии оболочки являются кольцевое усилие N_2 и изменение кривизны оболочки в меридиональном направлении χ_1 . Сделанный вывод соответствует гипотезам геометрической теории А. В. Погорелова [3], однако ограничен малостью внешней нагрузки (1.11).

С учетом (1.12) выражение (1.3) принимает вид

$$\chi_1 = \varepsilon d\psi / d\psi_0 \quad (1.14)$$

а физические соотношения преобразуются к одному из двух видов

$$\varepsilon_2 = N_2 / B, \quad \varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_2, \quad M_1 = D \chi_1, \quad M_2 = -\nu M_1 \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_2^0 = 4\rho_{10} N_2^0 \sin \psi_0 / \rho_{20}, \quad M_1 = D / \rho_{10} d\psi / d\psi_0 \quad (1.16)$$

$$B = Eh, \quad D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$$

Уравнения равновесия (1.4)–(1.6) после асимптотического анализа приобретают следующую форму

$$\varepsilon dV^0 / d\psi_0 = -q_v^0, \quad \varepsilon dU^0 / d\psi_0 = 4N_2^0, \quad \varepsilon^2 d^2\psi / d\psi_0^2 = U^0 \sin \psi \quad (1.17)$$

Аналогично уравнение (1.2) с учетом (1.1), (1.15) и (1.16) принимает вид

$$\varepsilon dN_2^0 / d\psi_0 = (\cos \psi - \cos \psi_0) / (4 \sin^2 \psi_0) \quad (1.18)$$

Тогда с учетом (1.9) окончательно приходим к системе уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 U^0}{d\psi_0^2} = \frac{\cos \psi - \cos \psi_0}{\sin^2 \psi_0}, \quad \varepsilon^2 \frac{d^2 \psi}{d\psi_0^2} = V^0 \sin \psi \quad (1.19)$$

Особенностью полученной системы уравнений (1.19) является наличие в ней стоящего перед старшими производными параметра ε^2 , который является малым при достаточной тонкостенности конструкции. Предельная система уравнений при $\varepsilon=0$ имеет два очевидных решения. Первое ($\psi=\psi_0$, $U^0=0$) соответствует исходному состоянию оболочки. Второе ($\psi=-\psi_0$, $U^0=0$) — зеркальному отражению ее части относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения (фиг. 1). Составное решение при $\psi_0=\xi_0$ терпит разрыв, который может быть компенсирован функциями с

высокой изменчивостью [16]. Поэтому асимптотическое решение системы уравнений (1.19) может быть представлено в виде

$$U^0 = U^0(\xi), \quad \psi = \psi(\xi), \quad \xi = (\psi_0 - \xi_0)/\varepsilon \quad (1.20)$$

Переходя к новой переменной, с точностью до слагаемых более высокого порядка малости получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 U^0}{d\xi^2} = \frac{\cos \psi - \cos \xi_0}{\sin^2 \xi_0}, \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = U^0 \sin \psi \quad (1.21)$$

с граничными условиями

$$U^0 = 0, \quad \psi = \pm \xi_0 \quad (\xi \rightarrow \pm \infty) \quad (1.22)$$

Следует подчеркнуть, что краевая задача (1.21)–(1.22) не зависит от вида рассматриваемой оболочки вращения. Существенным при этом является малость введенного параметра ε^2 и нагрузки в соответствии с принятым соотношением порядка (1.14).

Особенностью данной краевой задачи является также отсутствие в соотношениях (1.21)–(1.22) внешней нагрузки. Поэтому решая ее не удастся установить связь давления с параметрами закритического положения равновесия. Для выявления этой связи, а также для приближенного решения задачи, рассмотрим ее вариационную формулировку.

2. Воспользуемся принципом Лагранжа, согласно которому функционал полной потенциальной энергии системы $\Pi = W - A$ должен принимать стационарное значение, соответствующее положению равновесия оболочки. Здесь W — потенциальная энергия деформации, которая с учетом основных компонент НДС принимает вид

$$W = \frac{D}{2} \iint_F \chi_1^2 dF + \frac{B}{2} \iint_F \varepsilon_2^2 dF \quad (2.1)$$

где A — работа фиксированной внешней нагрузки на возможных перемещениях.

Соотношение (2.1) после замены переменных

$$\varphi = \psi/\xi_0, \quad p = \rho_{20} \varepsilon_2^2 / (\rho_{10} \xi_0) \quad (2.2)$$

преобразуется к виду

$$W = \pi E h \rho_{10}^3 \varepsilon_0^3 \xi_0^2 J \sin \xi_0 / \rho_{20} \quad (2.3)$$

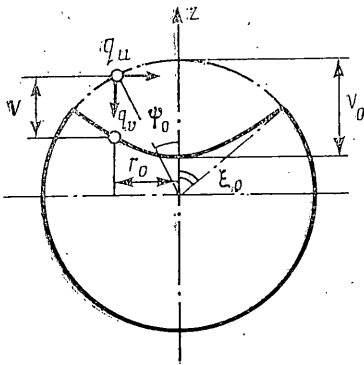
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [p^2 + (\varphi')^2] d\xi \quad (2.4)$$

Выражение для работы внешнего давления в основном приближении асимптотики определяется медленно изменяющейся частью решения, которая соответствует зеркальному отражению части поверхности оболочки относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения. В случае, когда направляющая срединной поверхности недеформированной оболочки задана параметрически в виде $z = z(\psi_0)$, $r_0 = r_0(\psi_0)$, получаем

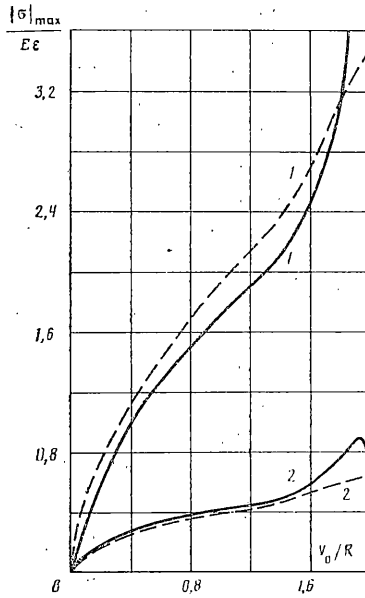
$$A = 2 \int_0^{\xi_0} [z(\psi_0) - z(\xi_0)] 2\pi r_0 q_V \rho_{10} d\psi_0 \quad (2.5)$$

Отметим, что выражение (2.5) зависит от формы оболочки в недеформированном состоянии, а также от параметра ξ_0 закритической равновесной конфигурации, который определяет амплитуду прогиба

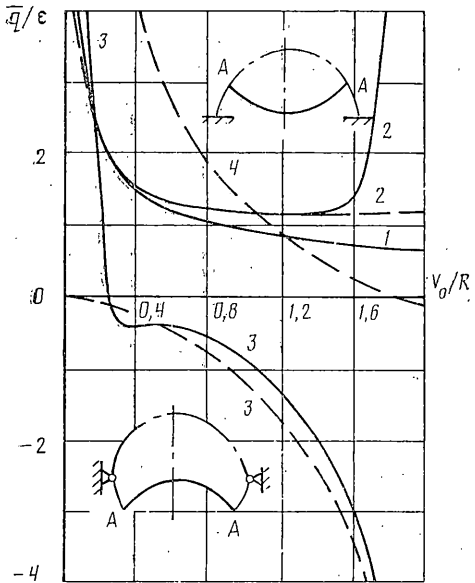
$$V_0 = 2[z(0) - z(\xi_0)] \quad (2.6)$$



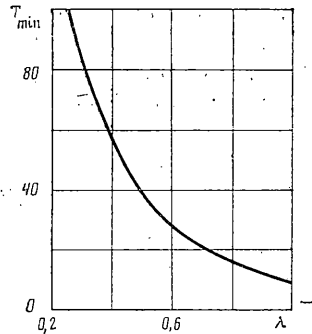
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

Функции φ и p , описывающие быстро изменяющееся затухающее НДС, не входят в основное приближение (2.5). Поэтому они могут быть определены при решении задачи о минимуме функционала (2.4) при условии совместности деформаций (1.21), которое можно представить в форме

$$dp/d\xi = [\cos(\xi_0\varphi) - \cos \xi_0] / (\xi_0 \sin \xi_0) \quad (2.7)$$

и граничных условиях

$$p=0, \quad \varphi = \pm 1 \quad (\xi \rightarrow \pm \infty) \quad (2.8)$$

Нетрудно установить, что соотношения (1.21) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа рассматриваемого функционала J . Заметим, что в данной вариационной задаче от параметра критической формы равновесия ξ_0 зависит лишь уравнение совместности деформаций (2.5). При небольших ξ_0 это соотношение принимает вид

$$dp/d\xi = (1 - \varphi^2)/2 \quad (2.9)$$

где ξ_0 отсутствует.

Поэтому естественно предположить, что минимум функционала J слабо зависит от угла ξ_0 . Это предположение подтверждается решением задачи с использованием метода Ритца. При изменении параметра ξ_0 в пределах $0 \leq \xi_0 \leq \pi/2$ получаем зависимость для минимального значения функционала, которую можно аппроксимировать выражением

$$J(\xi_0) = 2,23 + 0,116\xi_0^2 \quad (2.10)$$

Таким образом, для энергии деформации оболочки имеем асимптотическую формулу (2.3), где J определяется соотношением (2.10).

Если ввести в рассмотрение относительный дополнительный угол поворота касательной к меридиану при деформации оболочки $\Delta\varphi$, то $\varphi = 1 + \Delta\varphi$ при $\xi \geq 0$.

Тогда рассматриваемый функционал J при малых ξ_0 преобразуется к полученному в работе [3] со связью (2.7), которая принимает вид

$$dp/d\xi + \Delta\varphi + \Delta\varphi^2/2 = 0 \quad (2.11)$$

Минимальное значение этого функционала определено в работе [3] и соответствует формуле (2.10). Таким образом, соотношения геометрической теории в настоящей работе обобщаются на случай непологих оболочек вращения при сильном изгибе. Устанавливается, что они являются асимптотически точными при $\xi \rightarrow 0$.

При анализе критического поведения конкретной оболочки в выражении энергии деформации (2.3) имеем заданные функции $\rho_{10}(\xi_0)$ и $\rho_{20}(\xi_0)$. Работа внешнего давления в основном приближении будет определяться изометрическим преобразованием срединной поверхности оболочки по формуле (2.5). Для получения связи нагрузки с параметрами критической равновесной конфигурации необходимо воспользоваться соотношением, выражающим равенство нулю вариации полной потенциальной энергии по параметру ξ_0 , который до сих пор не рассматривался как варьируемый.

НДС оболочки в области пограничного слоя ($\psi_0 = \xi_0$) определяется функциями p и φ , найденными из решения вариационной задачи для функционала (2.4). Основными при этом являются кольцевые σ_2 и изгибные напряжения σ_1 , связанные с изгибающим моментом M_1 . Их экстремальные значения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \max|\sigma_2| &= \varepsilon E \xi_0 \max|p| \rho_{10}/\rho_{20} \\ \max|\sigma_1| &= \varepsilon E \xi_0 \max|\varphi'| [3/(1-\nu^2)]^{1/2} \rho_{10}/\rho_{20} \\ \max|p| &= 0,4(1+0,013\xi_0^2), \quad \max|\varphi'| = 0,95(1+0,085\xi_0^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

В соответствии с (1.13) и (1.15) в основном приближении также имеем

$$\varepsilon_1 = -\nu\varepsilon_2, \quad N_1 = 0, \quad M_2 = -\nu M_1 \quad (2.13)$$

3. В качестве примера рассматривается замкнутая сферическая оболочка при равномерном внешнем давлении q , для которой $\rho_{10} = \rho_{20} = R$. Тогда выражение для потенциальной энергии деформации (2.3) принимает вид

$$W = \pi E h R^2 \varepsilon^3 \xi_0^2 \sin^2 \xi_0 J(\xi_0) \quad (3.1)$$

Работа внешнего давления определяется вертикальной составляющей q_v (фиг. 1) по формуле

$$A = \int_0^{\xi_0} V q \cos \psi_0 2\pi r_0 R d\psi_0 = 2/3 \pi q R^3 (\cos^3 \xi_0 + 2 - 3 \cos \xi_0) \quad (3.2)$$

$$r_0 = R \sin \psi_0, \quad V = 2R (\cos \psi_0 - \cos \xi_0)$$

Варьируя функционал Π по переменной ξ_0 , приходим к формуле для параметра давления

$$q^0 = q/q_* = T(\xi_0) \varepsilon / 8, \quad V_0 = 2R(1 - \cos \xi_0) \quad (3.3)$$

$$T(\xi_0) = [J(\xi_0) (2\xi_0 \sin \xi_0 + \xi_0^2 \cos \xi_0) + \xi_0^2 \sin \xi_0 dJ/d\xi_0] / \sin^3 \xi_0 \quad (3.4)$$

При малых углах ξ_0 имеем выражение

$$q^0 = {}^3/8 J_0 \varepsilon / (V_0/R)^{3/2}, \quad J_0 = 2,23 \quad (3.5)$$

которое с точностью до множителя $(1 - \nu^2)^{1/4}$ совпадает с результатом, полученным А. В. Погореловым геометрическим методом в рамках теории пологих оболочек.

На фиг. 2 зависимость (3.5) представлена кривой 1, в соответствии с которой при увеличении амплитуды прогиба закритической равновесной конфигурации относительное значение давления уменьшается, стремясь к нулю. Однако при этом ξ_0 достигает больших значений, при которых неправомерно рассматривать оболочку как пологую. Более общей является формула (3.3), дающая зависимость нагрузки от амплитуды прогиба оболочки в закритической стадии (штриховая линия 2 на фиг. 2). Представленные результаты практически совпадают с данными численного решения задачи (сплошная линия 2) для полусферы с жестко заделанными краями при соотношении $R/h=100$, $\nu=0,3$. Естественное отличие данных имеет место при малых прогибах (в этом случае нарушаются определенные ранее соотношения порядка асимптотического интегрирования), а также при $V_0/R \approx 2$. В последнем случае проявляется влияние условий закрепления, рассмотренных при численном решении задачи. Приведенные асимптотические формулы соответствуют замкнутой сферической оболочке. Проводилось также сопоставление форм равновесия оболочки при $V_0/R \approx 1$. Численное решение задачи подтверждает близость конфигурации к изометрическому преобразованию срединной поверхности оболочки, полученному путем зеркального отражения части сферы относительно плоскости.

На фиг. 3 приведен результат анализа напряженного состояния оболочки. Сплошные линии соответствуют численному решению, пунктирные — асимптотическим формулам (2.12). Кривые 1 отвечают максимальным изгибным напряжениям σ_1 , кривые 2 — кольцевым мембранным σ_2 . Формулы асимптотического анализа и в этом случае подтверждаются численным решением. Достаточно точно также выполняются соотношения (2.13).

Следует отметить, что на кривой 2 имеется минимум, соответствующий нижнему критическому давлению нагрузки обратного выхлопа осесимметричной формы равновесия. Анализируя зависимость (3.4), легко установить, что этот минимум достигается при $\xi_0 \approx 1,3$, $V_0 \approx 1,5R$ и равен $q_{min} = 1,07\varepsilon$, либо при $\nu=0,3 q_{min} = 0,59 (h/R)^{1/2}$. Приведенная формула хорошо соответствует полученному численному решению.

Рассмотрена также шарнирно опертая по краям полусфера переменной толщины, закон изменения которой имеет вид $h(\psi_0) = h_0 (1 - \psi_0/\pi)$. При этом в полюсе сферы ее толщина в два раза больше, чем у краев. В чис-

ленных расчетах принято $R/h_0=100$. Соответствующая зависимость на фиг. 2 представлена сплошной линией 3. При асимптотическом анализе были рассмотрены две возможные формы равновесия. Первая была получена путем простого зеркального отражения относительно плоскости А-А (на фиг. 2 решение представлено штриховой линией 4), вторая — при двукратном отражении полусферы относительно плоскости основания, а затем относительно плоскости А-А. Данные расчета в последнем случае соответствуют кривой 3. Численный анализ показывает, что реализуется вторая форма равновесия. При этом выпучивание оболочки начинается у ее края, где толщина существенно меньше. Средняя часть в процессе деформирования перемещается как жесткое целое.

4. Полученные результаты обобщаются на случай оболочки, срединная поверхность которой представляет собой эллипсоид вращения, заданный уравнением

$$r_0^2/a^2+z^2/c^2=1 \quad (4.1)$$

где a, c — длины полуосей эллипсоида.

Положим, что их отношение $\lambda=c/a \leq 1$. Тогда наибольший радиус кривизны оболочки $R_0=a/\lambda$ будет достигаться при $r_0=0$, то есть на малой оси эллипсоида, которая является осью вращения.

Воспользуемся соотношениями

$$\rho_{20}=R_0\gamma^{1/2}, \quad \rho_{10}=R_0\gamma^{3/2}, \quad \gamma=(1+\operatorname{tg}^2 \xi_0)/(1+\operatorname{tg}^2 \xi_0/\lambda^2) \quad (4.2)$$

Тогда выражение для энергии деформации приобретает вид

$$W=\pi E h^2/2 \xi_0^2 \sin^2 \xi_0 R_0^{1/2} \gamma^{1/4} J/[12(1-\nu^2)]^{1/4} \quad (4.3)$$

Работу внешнего давления определим по формуле

$$A=2 \int_0^{\xi_0} [z(\psi_0)-z(\xi_0)] 2\pi r_0 q \cos \psi_0 \rho_{10} d\psi_0 \quad (4.4)$$

$$r_0=R_0 \operatorname{tg} \psi_0 / (1+\operatorname{tg}^2 \psi_0/\lambda^2)^{1/2}, \quad z=\lambda^2 r_0/\operatorname{tg} \psi_0$$

После несложных преобразований получаем

$$dA/\partial \xi_0=2\pi q R_0^3 \sin^3 \xi_0 \gamma^{5/2} \quad (4.5)$$

Варьируя полную потенциальную энергию по ξ_0 , с учетом (4.5) приходим окончательно к выражению для внешнего давления и амплитуды прогиба

$$q^0=T(\xi_0, \lambda) \varepsilon_0/8, \quad V_0=2R_0\lambda^2 [(\lambda^2+\operatorname{tg}^2 \xi_0)^{1/2}-\lambda]/(\lambda^2+\operatorname{tg}^2 \xi_0)^{1/2} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_0^2=h/[12(1-\nu^2)]^{1/2}/R_0, \quad J=J_0=2,23 \quad (\xi_0 \leq 1)$$

$$T(\xi_0, \lambda)=J[4 \operatorname{tg} \xi_0+\xi_0(1+\gamma)] \xi_0/(2 \sin^2 \xi_0 \operatorname{tg} \xi_0 \gamma^{3/4})$$

Формулы (2.12) для экстремальных значений напряжений приобретают вид

$$\max|\sigma_2|=E\varepsilon_0\xi_0 \max|p|/\gamma^{1/4} \quad (4.7)$$

$$\max|\sigma_1|=E\varepsilon_0\xi_0 \max|\varphi'| [3/(1-\nu^2)]^{1/2}/\gamma^{1/4}$$

Нижнее критическое значение нагрузки, соответствующее осесимметричной форме равновесия, определяется выражением (4.7), где следует положить $T(\xi_0, \lambda)=T_{\min}(\lambda)$. График функции $T_{\min}(\lambda)$ представлен на фиг. 4.

Следует отметить, что минимум функции $T(\xi_0)$ при небольших значениях λ достигается при малых ξ_0 , поэтому при $\lambda < 1/2$ можно предположить,

что $\xi_0^2 \ll 1$. Тогда выражение (4.7) может быть представлено в виде

$$T(x, \lambda) = (6+5x^2)(1+x^2)^{5/4} J_0 / (2\lambda x), \quad x = \xi_0 / \lambda \quad (4.8)$$

Отыскивая минимум функции (4.8) по переменной x , получаем $T_{\min}(\lambda) = 21,2/\lambda$ при $x \approx 0,55$.

Тогда выражение для нижнего критического давления принимает вид $q_{\min} = 2,65 \varepsilon_0 / \lambda$, либо при $\nu = 0,3$ $q_{\min} = 1,46 (h/R)^{1/2} / \lambda$.

Из полученных формул q_{\min} и (4.6), а также из фиг. 4 следует, что при уменьшении отношения длин полуосей эллипсоида λ повышается устойчивость оболочки к конечным воздействиям. Например, при $R_0/h = 100$, $\lambda = 0,25$ нижнее критическое давление осесимметричной формы выпучивания составляет 58% от классического критического значения. Однако с уменьшением относительной толщины оболочки q_{\min} уменьшается. Отметим также, что формула q_{\min} соответствует результату работы [3], полученному геометрическим методом в предположении, что $\xi_0^2 \ll 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gleich D., L'Hommedie F. Metallic bladders for cryogenic fluid storage and expulsion systems // J. Spacecraft and Rockets. 1968. V. 5. № 9. P. 1057–1064.
2. Поргер, Станфорд. Вытеснительные устройства для топливных систем космических аппаратов // Вопросы ракетн. техники. 1966. № 4. С. 57–65.
3. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967. 280 с.
4. Феодосьев В. И. Осесимметричная эластика сферической оболочки // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 280–286.
5. Залесов В. Н., Давя И. Ф. Пластическое деформирование вытеснительных диафрагм. М.: Машиностроение, 1977. 72 с.
6. Северов С. П. О реализации шагового метода анализа деформируемых систем // Изв. вузов. Машиностроение. 1971. № 6. С. 5–7.
7. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
8. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 231 с.
9. Коровайцев А. В. Сильный изгиб оболочек из пластичного материала // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 1987. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 86–91.
10. Гончаров К. А., Климанов В. И., Чупин В. В. Сильный изгиб и устойчивость составных оболочек вращения // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 1987. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 1. С. 368–373.
11. Срубцик Л. С., Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично нагруженных оболочек вращения // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 913–922.
12. Воронич И. И., Срубцик Л. С. Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек // Тр. 7-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 156–162.
13. Бабенко В. И. Асимптотический анализ термоупругих закритических деформаций сферических сегментов под действием внешнего давления // Прикл. механика. 1971. Т. 7. Вып. 7. С. 17–22.
14. Лесничая В. А. Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений теории тонких оболочек в закритической стадии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 147–152.
15. Reissner E. On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution // Proc. Symp. Appl. Math. N. Y.: McGraw – Hill, 1950. V. 3. P. 27–52.
16. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 4. С. 27–95.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1990