МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1992

УДК 539.3

 КИМ ИН БОН

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Вариационным методом исследуется изгиб упругопластических пологих оболочек при сложном нагружении, обсуждаются некоторые математические проблемы.

Разобьем интервал времени $[0, T]$ на n равных частей $(\tau=T/n,\ t_l=\tau l)$. В пошаговом методе задача упругопластических оболочек при сложном нагружении сводится к решению на l-м шаге следующей системы уравнений [1]:

$$\begin{gathered}
D_0\Delta^2 w_l-h\Delta_h f=Q_l+(h^3/9)\Delta(\overline{\psi}_l+\overline{D}\beta_l)\Delta_+ w_l\\
(^1/_3G)\Delta^2 f_l+\Delta_R w_l=-\Theta_l-\Delta(\overline{\chi}_l+\tau\overline{B}_l)\Delta_- f_l\\
Q_l=q_l+\overline{H}_l,\quad \overline{H}_l=(h^3/9)\Delta(\overline{D}_l H_l)\Delta_+ w_{l-1}\\
H_l=\exp\left(-\sum_{i=1}^{l}\overline{D}_i\tau\right)\sum_{i=1}^{l-1}\left(\overline{E}_i\exp\left(\sum_{j=1}^{i}\overline{D}_j\tau\right)f_i\right)\tau\\
\Theta_l=\Delta\left(\sum_{i=1}^{l-1}f_i\tau\right)\Delta_- f_{l-1}
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $D_0=3Gh^3/9$ — цилиндрическая жесткость оболочки; w — скорость прогиба, h — толщина оболочки, f — функция скоростей напряжений, G — модуль сдвига, q — скорость поперечной нагрузки, $\Delta_R=k_2\partial^2/\partial x^2+k_1\partial^2/\partial y^2$, $k_1=1/R_1$, $k_2=1/R_2$, R_1, R_2 — главные радиусы кривизн оболочки

$$\begin{gathered}
\Delta(\ )\Delta_\pm v=\partial^2/\partial x^2[(\ )(\partial^2 v/\partial x^2\pm{}^1/_2\partial^2 v/\partial y^2)]+(2\mp 1)\partial^2/\partial x\partial y[(\ )\partial^2 v/\partial x\partial y]+\\
+\partial^2/\partial y^2[(\ )(\partial^2 v/\partial y^2\pm{}^1/_2\partial^2 v/\partial x^2)]
\end{gathered}$$

$(v=w,\ f)$, $\overline{\psi}$, $\overline{D}$, $\overline{\chi}$, $\overline{B}$ — функционалы, определяемые на основе гипотезы компланарности и опытов; H, Θ — на l-м шаге известные функции.

Граничные условия. В случае свободного и шарнирного опирания на границах $x=\text{const}$ $y=\text{const}$ соответственно

$$w=0,\ \partial^2 w/\partial x^2=0;\quad w=0,\ \partial^2 w/\partial y^2=0 \tag{2}$$

Если на этих границах заданы скорости внешних продольных и сдвиговых сил $p_1^\cdot$, $p_2^\cdot$, $S^\cdot$, то

$$\sigma_1^\cdot=\partial^2 f/\partial y^2=p_1^\cdot,\quad \sigma_2^\cdot=\partial^2 f/\partial x^2=p_2^\cdot,\quad \sigma_{12}^\cdot=-\partial^2 f/\partial x\partial y=S^\cdot \tag{3}$$

Для жесткозащемленного опирания на контурах $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ соответственно

$$w=0,\ \partial w/\partial x=0;\quad w=0,\ \partial w/\partial y=0 \tag{4}$$

По методу Бубнова — Галеркина [2] получаем

$$w=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varphi_i,\qquad f=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\eta_j-P_1^{\cdot}y^2/2-P_2^{\cdot}x^2/2+S^{\cdot}xy$$

$$\iint\limits_F X\varphi_i\,DF=0,\qquad \iint\limits_F Y\eta_j\,dF=0 \tag{5}$$

$$X\equiv D_0\Delta^2w-h\Delta_Rf-Q-(h^3/9)\,\Delta(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)\,\Delta_+w$$

$$Y\equiv(^1/_3G)\,\Delta^2f+\Delta_Rw+\Theta+\Delta(\overline{\chi}+\tau\overline{B})\,\Delta_-f$$

Здесь для удобства опущен индекс l. Функции w, f одновременно должны удовлетворять граничным условиям (2) — (4).

Система уравнений (5) имеет следующую структуру

$$A^{\smile}\mathbf{u}=\mathbf{c},\quad A^{\smile}=U^{\smile}+V^{\smile} \tag{6}$$

$$U^{\smile}=(u_{ij})=\begin{pmatrix}(u_{ks})_1 & (u_{ks})_2\\ (u_{ks})_3 & (u_{ks})_4\end{pmatrix}\quad (i,j=\overline{1,2N})$$

$$(u_{ks})_1=\iint\limits_F D_0(\Delta^2\varphi_k)\varphi_s\,dF\qquad (k,s=\overline{1,N})$$

$$(u_{ks})_2=-\iint\limits_F h(\Delta_k\eta_k)\varphi_s\,dF\qquad (k=\overline{N+1,2N},\ s=\overline{1,N})$$

$$(u_{ks})_3=\iint\limits_F(\Delta_R\varphi_k)\eta_s\,dF\qquad (k=\overline{1,N},\ s=\overline{N+1,2N})$$

$$(u_{ks})_4=\iint\limits_F(1/3G)(\Delta^2\eta_k)\eta_s\,dF\qquad (k,s=\overline{N+1,2N})$$

$$V^{\smile}=(v_{ij})=\begin{pmatrix}(v_{ks})_1 & (v_{ks})_2\\ (v_{ks})_3 & (v_{ks})_4\end{pmatrix}$$

$$(v_{ks})_1=-(h^3/9)\iint\limits_F[\Delta(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)\Delta_+\varphi_k]\varphi_s\,dF\qquad (k,s=\overline{1,N})$$

$$(v_{ks})_2=0\quad (k=\overline{N+1,\ 2N},\ s=\overline{1,\ N})$$

$$(v_{ks})_3=0\quad (k=\overline{1,\ N},\ s=\overline{N+1,\ 2N})$$

$$(v_{ks})_4=\iint\limits_F[\Delta(\overline{\chi}+\tau\overline{B})\Delta_-\eta_k]\eta_s\,dF\qquad (k,s=\overline{N+1,2N})$$

$$\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_N,\ u_{N+1},\ldots,u_{2N})^T$$

$$u_1=\alpha_1,\ldots,u_N=\alpha_N,\quad u_{N+1}=\gamma_1,\ldots,u_{2N}=\gamma_N$$

$$\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_{2N})^T$$

$$c_i=\iint\limits_F[Q+h(k_2p_2^{\cdot}+k_1p_1^{\cdot})]\varphi_i\,dF\qquad (i=\overline{1,N});$$

$$c_i=-\iint\limits_F[\Theta+(p_1^{\cdot}-p_2^{\cdot})\partial^2(\overline{\chi}+\tau\overline{B})/\partial x^2+3S^{\cdot}\partial^2(\overline{\chi}+\tau\overline{B})/\partial x\,\partial y+$$

$$+(p_2^{\cdot}/2-p_1^{\cdot})\partial^2(\overline{\chi}+\tau\overline{B})/\partial y^2]\eta_i\,dF\qquad (i=\overline{N+1,2N})$$

Уравнение (6) является нелинейным алгебраическим относительно неизвестного $\mathbf{u}$. Для решения этого уравнения можно применить метод последовательных приближений. На каждом n-м шаге метода последовательных приближений нужно вычислять нелинейный член $V^{\vee}$, который содержит неизвестные

$$\overline{\psi}^n=3G-\overline{E}^n, \qquad \overline{E}^n=(1/h)\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_u^{n-1}L^{n-1}/\sin\vartheta^{n-1})dz$$

$$\overline{D}^n=(1/h)\int_{-h/2}^{h/2}(v_u^{n-1}L^{n-1}\operatorname{ctg}\vartheta^{n-1}+\sigma_u^{\bullet}/\sigma_u)dz, \qquad \overline{\chi}^n=\overline{\psi}^n/(9G^2)$$

$$\overline{\eta}^n=(1/h)\int_{-h/2}^{h/2}(\cos\vartheta^{n-1}v_u^{n-1}/\sigma_u^{n-1}+\sigma_u^{\bullet}\sin\vartheta^{n-1}/(\sigma_u^2L^{n-1})dz$$

$$\beta^n=\beta(\sigma_u^{n-1},\ \vartheta^{n-1},\ \sigma^{n-1},\ e^{n-1}),\quad v_u=({}^2/{}_3E_{ij}{}^{\bullet}E_{ij}{}^{\bullet})^{1/2}$$

$$\vartheta=\arccos[(\sigma/\sigma_u)(e^{\bullet}/v_u)]$$

σ_u и L определяются из опытов [3, 4].

Для надежности сходимости итерационного процесса применяются следующие методы [5]:

$$\mathbf{u}^{n+1}=\mathbf{u}^n-\alpha(A_n{}^{\vee}\mathbf{u}^n-\mathbf{c}),\quad A_n{}^{\vee}=U^{\vee}+V_n{}^{\vee} \tag{7}$$

или

$$\mathbf{u}^{n+1}+\alpha U^{\vee}\mathbf{u}^{n+1}=\mathbf{u}^n-\alpha(V_n{}^{\vee}\mathbf{u}^n-\mathbf{c}) \tag{8}$$

где α — итерационный параметр.

Легко убедиться в симметричности матрицы $A^{\vee}$, если берется одна и та же базисная система функций для w, f. Пусть $V^{\vee}$ — ограниченная матрица и для каждого шага итерационного процесса оператор $A^{\vee}$ имеет собственные значения $\lambda_{i(n)}$ $(0<m\leqslant\lambda_{i(n)}\leqslant M<\infty,\ i=\overline{1,\ 2N})$. При этом можно сказать, что $A^{\vee}$ — положительно определенная, т. е. $(A_n{}^{\vee}\mathbf{u},\ \mathbf{u})_H\geqslant m(\mathbf{u},\ \mathbf{u})_H$, где H — гильбертово пространство.

Фигурирующий в формуле (7) параметр α определяется из условия (здесь $E^{\vee}$ — единичная матрица):

$$\|T_\alpha\|=\|(E^{\vee}-\alpha A^{\vee})\|=\|E^{\vee}-\alpha(U^{\vee}+V^{\vee\prime})\|=\max_i|1-\alpha\lambda_i|<1 \tag{9}$$

$$V^{\vee\prime}=(v_{ij}{}')=\begin{pmatrix}(v_{ks}')_1 & (v_{ks}')_2\\ (v_{ks}')_3 & (v_{ks}')_4\end{pmatrix}$$

$$(v_{ks})_1=-(h^3/9)\iint_F[\Delta(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)\Delta_+\varphi_k]\varphi_s\,dF\geqslant-(h^3/9)a_0\iint_F(\Delta^2\varphi_k)\varphi_s\,dF=$$

$$=(v_{ks}')_1\quad(k,\ s=\overline{1,N})\quad(v_{ks})_2=(v_{ks}')_2=0;\quad(v_{ks})_3=(v_{ks}')_3=0$$

$$(v_{ks})_4=\iint_F[\Delta\overline{\chi}+\tau\overline{B})\Delta_-\eta_k]\eta_s\,dF\geqslant b_0\iint_F(\Delta^2\eta_k)\eta_s\,dF=(v_{ks}')_4\quad(k,s=\overline{N+1,2N})$$

$$a_0=\sup_{\sigma_{ij}{}^{\bullet}e_{ij}}(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)>0,\quad b_0=\inf_{\sigma_{ij}{}^{\bullet}e_{ij}{}^{\bullet}}(\overline{\chi}+\tau\overline{B})>0$$

Здесь λ_i $(i=\overline{1,\ 2N})$ — собственные значения матрицы $(U^{\vee}+V^{\vee\prime})$. Здесь использовано допущение, что $\partial^2(\overline{\chi}+\tau\overline{B})/\partial x^2$, $\partial^2(\overline{\chi}+\tau\overline{B})/\partial x\partial y$, $\partial^2(\overline{\chi}+\tau\overline{B})/\partial y^2$ малы по сравнению с другими величинами. Из неравенства (9) получим $0<\alpha<\min\limits_i 2/\lambda_i=2/M$. Для итерационного процесса (8) имеем

$$\|T_\alpha'\|=\|(E^{\vee}+\alpha U^{\vee})^{-1}(E^{\vee}-\alpha V^{\vee})\|\leqslant\|(E^{\vee}+\alpha U^{\vee})^{-1}(E^{\prime}-\alpha V^{\vee\prime})\|=$$

$$=\max_{i,\lambda'',\lambda'}|(1-\alpha\lambda_i'')/(1+\alpha\lambda_i')|=|(1-\alpha\lambda'')/(1+\alpha\lambda')| \tag{10}$$

где λ_i' — собственные значения $U^{\vee}$, λ_i'' — собственные значения $V^{\vee\prime}$.

Из неравенства (10) получим $0<\alpha<2/(\lambda'-\lambda'')$, $(\lambda'>\lambda'')$. Процесс (8) сходится быстрее, чем процесс (7).

Теперь рассмотрим сходимость процесса Бубнова — Галеркина (5). Для простоты рассмотрим пластинку, находящуюся в состоянии сложного нагружения. При этом нам достаточно решать только первое уравнение (1), а система уравнений (1) на l-м шаге времени сводится к уравнению $D_0\Delta^2 w=Q+(h^3/9)\Delta(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)\Delta_+ w$. С помощью соотношения

$$D_0\Delta^2(\ )-(h^3/9)\Delta(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)\Delta_+(\ )=\Delta D_0\Delta_+(\ )+$$
$$+\Delta[(h^3/9)(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)]\Delta_+(\ )=\Delta[D_0-h^3/9(\overline{\psi}+\overline{D}\beta)]\Delta_+(\ )$$

получим уравнение

$$\Delta N\Delta_+ w=Q,\ N=D_0-(h^3/9)(\overline{\psi}+\overline{D}\beta) \tag{11}$$

Оператор $\Delta N\Delta_+$ симметричен. В самом деле, учитывая граничные условия (2) (или (4)), получим

$$(\Delta N\Delta_+ w, v)_H=\iint\limits_F v\Delta N\Delta_+ w\,dF=\iint\limits_F[N\partial^2 w/\partial x^2\,\partial^2 v/\partial x^2+$$
$$+{}^1/_2 N\partial^2 w/\partial y^2\,\partial^2 v/\partial y^2+{}^1/_2 N\,\partial^2 w/\partial x^2\,\partial^2 v/\partial y^2+N\partial^2 w/\partial x\,\partial y\,\partial^2 v/\partial x\,\partial y]dF=$$
$$=(w,\Delta N\Delta_+ v)_H$$

Причем, имеет место неравенство

$$\Delta N\Delta_+ w, w)\geqslant N_0\iint\limits_F[(\partial^2 w/\partial x^2)^2+2(\partial^2 w/\partial x\,\partial y)^2+(\partial^2 w/\partial y^2)^2]\,dF$$
$$N_0=\inf_{\sigma_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot}} N>0$$

По неравенству Фридрихса [6]:

$$(\Delta N\Delta_+ w, w)_H\geqslant\varkappa^2 N_0\iint w^2\,dF=\varkappa^2 N_0\|w\|_H^2\qquad(\varkappa>0)$$

Следовательно, при $N_0>0$ оператор $\Delta N\Delta_+$ положительно определен. При этом можно утверждать, что уравнение (11) имеет единственное решение и оператор $(\Delta N\Delta_+)^{-1}$ вполне непрерывен. Тогда с помощью достаточного признака сходимости процесса Бубнова — Галеркина [6] процесс (5) (для пластинки) сходится. Можно также доказать сходимость этого процесса в случае оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким Ин Бон.* Метод решения упругопластических оболочек при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1991. С. 143–147.
2. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969.– 695 с.
3. *Ленский В. С., Ленский Э. В.* Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. № 4. 1985. С. 111–115.
4. *Бабамурадов К. Ш., Ильюшин А. А., Кабулов В. К.* Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. ФАН. 1989 – 288 с.
5. *Марчук Г. И.* Метод вычислительной математики. М.: Наука, 1989.– 608 с.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.– 512 с.

Сев. Корея

Поступила в редакцию 12.VIII.1991