

УДК 539.3

© 1992 г. В. А. ПУХЛИЙ, В. И. ШАЛАШИЛИН

К РАСЧЕТУ СКЛАДЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

В [1] для составных оболочек вращения в общем случае получена система нелинейных дифференциальных уравнений относительно координат деформированной поверхности. При решении ряда задач такая форма уравнений обладает рядом преимуществ перед традиционными уравнениями теории оболочек относительно нормального и тангенциального смещений [2, 3]. Здесь в развитие [1] получена координатная форма уравнений для складчатых оболочек. Существенной ее особенностью является то, что переход к координатным усилиям и нагрузкам, так же как и для оболочки вращения [1], позволяет избавиться от необходимости формулировать условия сопряжения по усилиям и перемещениям в угловых точках. Решение линейной краевой задачи строится на основе метода интегральных соотношений и модифицированного метода последовательных приближений [4, 5], при этом как и в [6] для ускорения сходимости решения используется метод телескопического сдвига степенного ряда Ланцоша.

1. Рассмотрим прямоугольную в плане складчатую оболочку (фиг. 1). Введем декартовы координаты x_1, x_2, x_3 точек срединной поверхности, а также координаты: s — длина вдоль направляющей, t — длина вдоль образующей, n — нормаль к срединной поверхности, θ — угол между касательной к линии $t = \text{const}$ и осью x_1 . Для складчатой оболочки $\theta(s)$ — ступенчатая функция с разрывами в угловых точках. Связь между координатой s и x_1, x_2 следующая: $dx_1 = ds \cos \theta$, $dx_2 = ds \sin \theta$. Тогда имеем

$$x_1(s) = \int_0^s \cos \theta ds, \quad x_2(s) = \int_0^s \sin \theta ds \quad (1.1)$$

Ниже введем обозначения

$$a = \sin \theta, \quad b = \cos \theta, \quad f' = \partial f / \partial s, \quad f'' = \partial f / \partial t \quad (1.2)$$

Задав координаты в срединной поверхности $\alpha_1 = s$, $\alpha_2 = t$, получим коэффициенты Ламе [7]:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1 \quad (1.3)$$

радиусы кривизны

$$1/R_1 = -\theta' = 1/R, \quad R_2 = \infty \quad (1.4)$$

Перемещения точек оболочки можно задавать в двух формах (фиг. 2) — проекциях на координатные оси

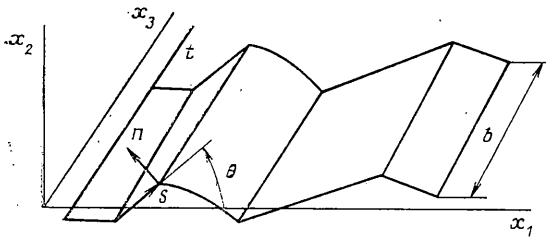
$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k \quad (1.5)$$

где i, j, k — орты координатных осей x_1, x_2, x_3 ;

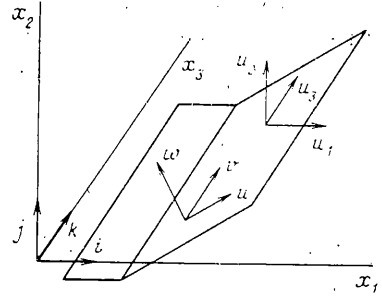
— в проекциях на оси основного триэдра поверхности

$$u = u_s e_s + v e_t + w e_n \quad (1.6)$$

где e_s, e_t — орты координатных направлений s, t в срединной поверхности,



Фиг. 1



Фиг. 2

e_n — орт нормали. Компоненты перемещений в этих двух формах связаны следующими соотношениями:

$$v = u_3, \quad u = bu_1 + au_2, \quad w = -au_1 + bu_2 \quad (1.7)$$

$$u_3 = v, \quad u_1 = bu - aw, \quad u_2 = au + bw \quad (1.8)$$

Если r — радиус-вектор точки недеформированной поверхности, а m — вектор перемещений этой точки, то радиус-вектор R точки деформированной поверхности равен $R = r + m$. Тогда согласно [7] с учетом формул (1.3) и (1.4) имеем

$$R' = (1 + \varepsilon_1) e_s + \omega_1 e_t - \vartheta_1 e_n \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_1 = u' + w/R, \quad \omega_1 = \vartheta', \quad \vartheta_1 = -w' + u/R \quad (1.10)$$

$$R' = \omega_2 e_s + (1 + \varepsilon_2) e_t - \vartheta_2 e_n \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_2 = v', \quad \omega_2 = u', \quad \vartheta_2 = w' \quad (1.12)$$

Перейдем в выражениях (1.10) и (1.12) к координатным перемещениям u_1, u_2, u_3 с помощью выражений (1.7). Тогда получим $\varepsilon_1 = bu_1' - au_1\vartheta' + au_2' + bu_2\vartheta' + R^{-1}(-au_1 + bu_2)$. Так как $1/R = -\vartheta'$, то окончательно

$$\varepsilon_1 = bu_1' + au_2'$$

Аналогично имеем $\vartheta_1 = au_1' - bu_2'$.

В результате выражения (1.10) и (1.12) принимают вид

$$\varepsilon_1 = bu_1' + au_2', \quad \vartheta_1 = au_1' - bu_2' \\ \omega_1 = u_3', \quad \varepsilon_2 = u_3' \quad (1.13)$$

$$\omega_2 = bu_1' + au_2', \quad \vartheta_2 = au_1' - bu_2'$$

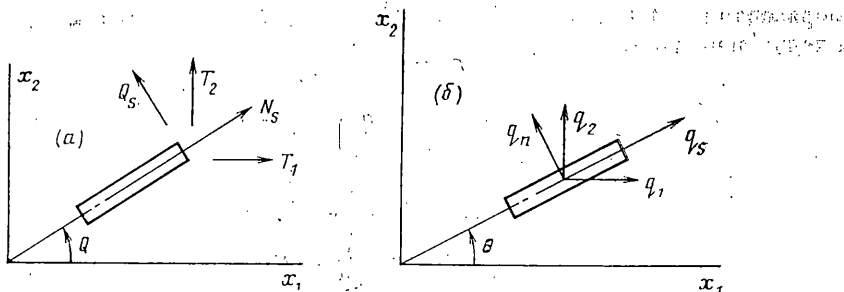
По своему смыслу ε_1 и ε_2 — удлинения срединной поверхности в направлениях s и t . Сдвиг в срединной поверхности

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = v' + u' = u_3 + bu_1' + au_2' \quad (1.14)$$

Изменения кривизн и кручения срединной поверхности при ее деформациях определяются выражениями

$$\kappa_1 = \vartheta_1' = -w'' + (u/R)', \quad \kappa_2 = \vartheta_2' = -w'' \\ \tau_1 = \vartheta_2' = -w'', \quad \tau_2 = -w'' + u'/R \\ \tau = \tau_1 - \omega_2/R = \tau_2 = -w'' + u'/R \quad (1.15)$$

Эти параметры выразим через перемещения u_1, u_2, u_3 с помощью выражений (1.13).



Фиг. 3

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= \vartheta_1' = a(u_1'' - u_2'/R) - b(u_2'' + u_1'/R) \\
 \kappa_2 &= \vartheta_2' = au_1'' - bu_2'' \\
 \tau &= \tau_2 = \vartheta_1' = au_1'' - bu_2''
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

С помощью параметров ε_1 , ε_2 , ω , κ_1 , κ_2 , τ , характеризующих деформацию срединной поверхности и ее искривление, можно выразить деформации поверхности, отстоящей на расстоянии z от срединной

$$\varepsilon_1^{(z)} = \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad \varepsilon_2^{(z)} = \varepsilon_2 + z\kappa_2, \quad \omega^{(z)} = \omega + 2z\tau \quad (1.17)$$

Следуя [7], запишем уравнения равновесия с учетом (1.3) и (1.4):

$$\begin{aligned}
 N_s' + S' + R^{-1}Q_s + q_s &= 0 \\
 S' + N_t' + q_t &= 0
 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$Q_s' + Q_t' - R^{-1}N_s + q_n = 0$$

$$M_s' + H' - Q_s = 0, \quad H' + M_t' - Q_t = 0$$

Шестое уравнение равновесия удовлетворяется тождественно.

Введем связь между усилиями N_s , Q_s и координатными усилиями T_x и T_2 по формулам (фиг. 3, а):

$$N_s = bT_1 + aT_2, \quad Q_s = -aT_1 + bT_2 \quad (1.19)$$

$$T_1 = bN_s - aQ_s, \quad T_2 = aN_s + bQ_s \quad (1.20)$$

Точно так же компоненты распределенной по срединной поверхности нагрузки q_n и q_s связаны с координатными нагрузками q_1 и q_2 соотношениями (фиг. 3, б):

$$q_s = bq_1 + aq_2, \quad q_n = -aq_1 + bq_2 \quad (1.21)$$

$$q_1 = bq_s - aq_n, \quad q_2 = aq_s + bq_n \quad (1.22)$$

Выполняя преобразования (1.19) в первом и третьем уравнениях (1.18) получим

$$bT_1' - aT_1\theta' + aT_2' + bT_2\theta' + S' + R^{-1}(-aT_1 + bT_2) + bq_1 + aq_2 = 0$$

$$-aT_1' - bT_1\theta' + bT_2' - aT_2\theta' + Q_t' - R^{-1}(bT_1 + aT_2) - aq_1 + bq_2 = 0$$

Принимая во внимание выражения (1.4), получим

$$bT_1' + aT_2' + S' + bq_1 + aq_2 = 0$$

$$-aT_1' + bT_2' + Q_t' - aq_1 + bq_2 = 0$$

Разрешив эти уравнения относительно T_1' и T_2' , а также сделав пре-

образование (1.19) в четвертом уравнении (1.18), получим уравнения в следующей форме

$$\begin{aligned} T_1' + bS' - aQ_t' + q_t &= 0 \\ T_2' + aS' + bQ_t' + q_2 &= 0 \\ S' + N_t' + q_t &= 0 \\ M_s' + H' + aT_1 - bT_2 &= 0 \\ H' + M_t' - Q_t &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Геометрические и статические соотношения дополняются физическими соотношениями закона Гука

$$\begin{aligned} N_s &= B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad N_t = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \\ S &= 1/2(1-\nu)B\omega, \quad B = Eh(1-\nu^2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Для моментов имеем

$$\begin{aligned} M_s &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \quad M_t = D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ H &= (1-\nu)D\tau, \quad D = 1/12Eh^3/(1-\nu^2) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из (1.24) и (1.25) следуют соотношения

$$\varepsilon_1 = (N_s - \nu N_t) / (Eh) \quad (1.26)$$

$$\varepsilon_2 = (N_t - \nu N_s) / (Eh), \quad \omega = 2(1+\nu)S / (Eh)$$

$$\kappa_1 = (M_s - \nu M_t) / (12Eh^3) \quad (1.27)$$

$$\kappa_2 = (M_t - \nu M_s) / (12Eh^3), \quad \tau = 12(1+\nu)H / (Eh^3)$$

Имея ввиду в дальнейшем применение метода интегральных соотношений, запишем систему разрешающих уравнений равновесия, геометрических и статических соотношений.

Уравнения равновесия кроме последнего представим в следующем виде

$$\begin{aligned} T_1' &= -bS' + aQ_t' - q_1, \quad T_2' = -aS' - bQ_t' - q_2 \\ M_s' &= -H' - aT_1 + bT_2, \quad S' = -N_t' - q_t. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Рассмотрим геометрические соотношения. Из первых двух уравнений (1.13) получим

$$u_1' = b\varepsilon_1 + a\vartheta_1 \quad (1.29)$$

$$u_2' = a\varepsilon_1 - b\vartheta_1 \quad (1.30)$$

Первое уравнение (1.15) дает

$$\vartheta_1' = \kappa_1 \quad (1.31)$$

Третье уравнение (1.31) с учетом (1.14) приводится к виду

$$u_3' = \omega_1 = \omega - \omega_2 = \omega - bu_1' - au_2' \quad (1.32)$$

Чтобы правые части этих уравнений зависели только от функций, стоящих в левой части и их производных по координате t , нужно исключить из уравнений (1.28)–(1.32) слагаемые, содержащие Q_t , H , N_t , ε_1 , κ_1 , ω . Из уравнений (1.24) и (1.26) следует

$$\varepsilon_1 = B^{-1}N_s - \nu\varepsilon_2, \quad N_t = Eh\varepsilon_2 + \nu N_s \quad (1.33)$$

Из выражений (1.19) и (1.13) имеем

$$N_s = bT_1 + aT_2, \quad \varepsilon_2 = u_3' \quad (1.34)$$

Подставив выражение (1.34) в (1.33), получим

$$\varepsilon_1 = B^{-1}(bT_1 + aT_2) - \nu u_3 \quad (1.35)$$

$$N_t = \nu(bT_1 + aT_2) + Ehu_3 \quad (1.36)$$

Из закона Гука (1.25) имеем

$$\kappa_1 = D^{-1}M_s - \nu\kappa_2 \quad (1.37)$$

Из (1.15) следует

$$\kappa_2 = \vartheta_2 \quad (1.38)$$

А из (1.13) получаем

$$\vartheta_2 = au_1 - bu_2 \quad (1.39)$$

С учетом (1.38) и (1.39) выражение (1.37) сведем к виду

$$\kappa_1 = D^{-1}M_s - \nu(au_1 - bu_2) \quad (1.40)$$

Из соотношений (1.26) имеем

$$\omega = 2(1+\nu)E^{-1}h^{-1}S \quad (1.41)$$

По закону Гука (1.25) и геометрическим соотношениям (1.15) имеем

$$H = (1-\nu)D\tau = -(1-\nu)D\vartheta_1 \quad (1.42)$$

Из последнего уравнения равновесия (1.23) имеем

$$Q_t = M_t + H' \quad (1.43)$$

Отсюда с учетом (1.31) и (1.42) получим

$$Q_t = M_t - (1-\nu)D\kappa_1 \quad (1.44)$$

Из соотношений (1.25) и (1.15) имеем

$$M_t = D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \quad \kappa_2 = \vartheta_2 \quad (1.45)$$

Тогда (1.44) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} Q_t &= D\vartheta_2 + \nu M_s - \nu^2 D\vartheta_2 - (1-\nu)M_s + (1-\nu)\nu D\vartheta_2 = \\ &= D[(1-\nu^2)\vartheta_2 + \nu(1-\nu)\vartheta_2] + [\nu M_s - (1-\nu)M_s]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Отсюда, учитывая (1.13), получим

$$\begin{aligned} Q_t &= D[(1-\nu^2)(au_1 - bu_2) + \nu(1-\nu)(au_1 - bu_2)] + \\ &+ [\nu M_s - (1-\nu)M_s] \end{aligned} \quad (1.47)$$

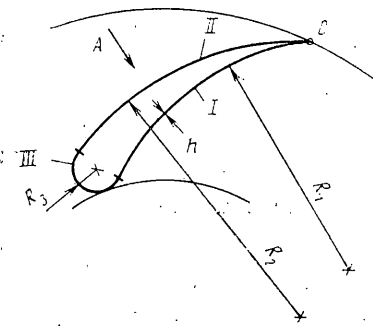
Выражения (1.35), (1.36), (1.40), (1.42) и (1.47) позволяют выразить правые части уравнений (1.28) и (1.29)–(1.30), (1.31), (1.32) через функции, стоящие в левой части и их производные по координате t .

Итоговая разрешающая система уравнений имеет вид

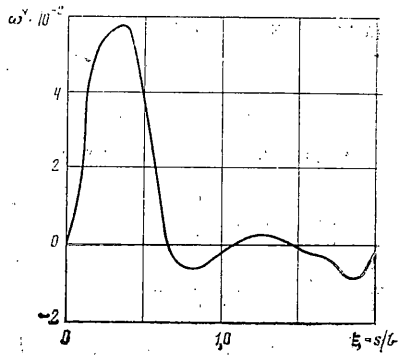
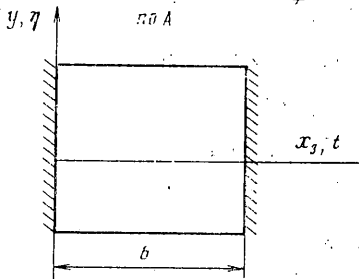
$$\begin{aligned} T_1' &= -bS' + aQ_t - q_1, & T_2' &= -aS' - bQ_t - q_2 \\ M_s' &= -H' - aT_1 + bT_2, & S' &= -N_t - q_t \\ u_1' &= b\varepsilon_1 + a\vartheta_1, & u_2' &= a\varepsilon_1 - b\vartheta_1 \\ \vartheta_1' &= \kappa_1, & u_3' &= \omega - bu_1 - au_2 \end{aligned} \quad (1.48)$$

В этих уравнениях

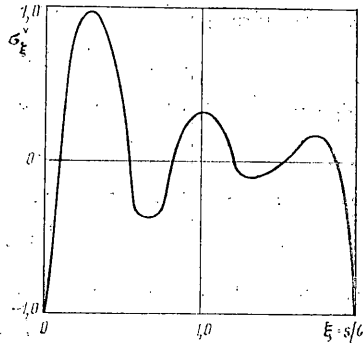
$$\begin{aligned} Q_t &= D[(1-\nu^2)(au_1 - bu_2) + \nu(1-\nu)(au_1 - bu_2)] + \\ &+ [\nu M_s - (1-\nu)M_s], \quad H = -(1-\nu)D\vartheta_1 \\ \omega &= 2(1+\nu)S/Eh, \quad \kappa_1 = D^{-1}M_s - \nu(au_1 - bu_2) \\ N_t &= \nu(bT_1 + aT_2) + Ehu_3, \quad \varepsilon_1 = B^{-1}(bT_1 + aT_2) - \nu u_3 \end{aligned} \quad (1.49)$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотрим граничные условия. На краях $s = \text{const}$ их нетрудно сформулировать на основании традиционных форм записи этих условий, осуществив в них с помощью соотношений (1.7), (1.19) переход от традиционных перемещений и усилий к координатным. Так, например, условия шарнирного опирания края $s = \text{const}$, если связь, наложенная в плоскости x_1, x_2 , нормальна к срединной поверхности оболочки, в традиционной записи имеет вид $w=0$, $v=0$, $N_s=0$, $M_s=0$. Тогда, в соответствии с выражениями (1.8), (1.20) их координатная форма следующая

$$au_1 - bu_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad BT_1 + aT_2 = 0, \quad M_s = 0$$

Если же связь запрещает, например, перемещения в направлении оси x_2 , то условие шарнирного опирания примет вид $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $T_1 = 0$, $M_s = 0$.

В дальнейшем в качестве приложения будет рассмотрено, напряженно-деформированное состояние пустотелой лопатки газовой турбины (фиг. 4), которая может быть представлена как замкнутая цилиндрическая оболочка некругового контура. Направив координату s вдоль контура сечения лопатки, может рассматривать ее на основании уравнений (1.48). Тогда входящие в эти уравнения величины должны удовлетворять условию периодичности

$$\begin{aligned} T_1(0) &= T_1(l), & T_2(0) &= T_2(l), & M_s(0) &= M_s(l), & S(0) &= S(l) \\ u_1(0) &= u_1(l), & u_2(0) &= u_2(l), & \vartheta_1(0) &= \vartheta_1(l), & u_3(0) &= u_3(l) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Здесь l — длина контура сечения лопатки. При этом начало координат $s=0$ нельзя, конечно, выбирать в угловой точке контура, где угол θ не определен (так как в такой точке он изменяется скачкообразно).

Что же касается граничных условий по краям $x_3=t=0$ и $x_3=t=b$, то переход в них от традиционных неизвестных к координатным делается аналогично. Так условия жесткого защемления края, имеющие в традиционных неизвестных форму

$$w=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad \vartheta_1=0 \quad (1.51)$$

в координатной форме имеют вид

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad u_3=0, \quad \vartheta_1=0 \quad (1.52)$$

Особо следует отметить условия шарнирного опирания

$$w=0, \quad u=0, \quad N_t=0, \quad M_t=0 \quad (1.53)$$

В координатной форме они сводятся к следующим

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad N_t=0, \quad M_t=0 \quad (1.54)$$

При выполнении таких условий на краях $t=0$ и $t=b$ в уравнениях (1.43), (1.49) можно разделить переменные с помощью представленных решений в виде тригонометрических рядов вида (суммирование по n):

$$f=\Sigma f_{(n)} \sin(n\pi t/b), \quad g=\Sigma g_{(n)} \cos(n\pi t/b) \quad (1.55)$$

где в качестве f выступают $T_1, T_2, M_s, u_1, u_2, \vartheta_1, N_t, \varepsilon_1, \kappa_1, q_1, q_2$, а в качестве g — $S, u_3, Q_t, H, \omega, q_t$.

После подстановки этих рядов в уравнения (1.48), (1.49) переменные разделяются и для каждой гармоники получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, где обозначено $d/dS(\dots)=(\dots)'$, $\lambda_{(n)}=n\pi/b$:

$$T'_{1(n)}=\lambda_{(n)}(S_{(n)} \cos \theta + Q_{1(n)} \sin \theta) - q_{1(n)}$$

$$T'_{2(n)}=\lambda_{(n)}(S_{(n)} \cos \theta + Q_{1(n)} \sin \theta) - q_{1(n)}$$

$$M'_{s(n)}=\lambda_{(n)}H_{(n)} - T_{1(n)} \sin \theta + T_{2(n)} \cos \theta$$

(1.56)

$$S_{(n)}=-\lambda_{(n)}N_{1(n)} - q_{1(n)}, \quad u'_{1(n)}=\varepsilon_{1(n)} \cos \theta + \vartheta'_{1(n)} \sin \theta$$

$$u'_{2(n)}=\varepsilon_{1(n)} \sin \theta - \vartheta'_{1(n)} \cos \theta, \quad \vartheta'_{1(n)}=\kappa_{1(n)}$$

$$u'_{3(n)}=\omega_{(n)} - \lambda_{(n)}(u_{1n} \cos \theta + u_{2(n)} \sin \theta)$$

В этих уравнениях

$$Q_{1(n)}=-\lambda_{(n)}^3 D(1-\nu)(1+2\nu)(u_{1(n)} \sin \theta - u_{2(n)} \cos \theta) + \lambda_{(n)}(2\nu-1)M_{s(n)},$$

$$H_{(n)}=-\lambda_{(n)}(1-\nu)D\vartheta_{1(n)}$$

$$N_{1(n)}=\nu(T_{1(n)} \cos \theta + T_{2(n)} \sin \theta) - \lambda_{(n)}Ehu_{3(n)}$$

(1.57)

$$\varepsilon_{1(n)}=B^{-1}(T_{1(n)} \cos \theta + T_{2(n)} \sin \theta) + \lambda_{(n)}\nu u_{3(n)}$$

$$\kappa_{1(n)}=D^{-1}M_{s(n)} + \lambda_{(n)}\nu(u_{1(n)} \sin \theta - u_{2(n)} \cos \theta)$$

$$\omega_{(n)}=2(1+\nu)S/Eh$$

2. Для решения краевой задачи, описываемой системой уравнений (1.48) и конечными соотношениями (1.49), а также граничными условиями (1.52) и (1.53) применим аналитический подход [5], основанный на применении метода интегральных соотношений и модифицированного

метода последовательных приближений, в котором для ускорения сходимости решения используется метод телескопического сдвига степенного ряда Ланцоша [6]. В соответствии с методом представим исходную систему уравнений (1.48) в дивергентной форме

$$\partial X / \partial \xi + \partial Y / \partial \eta + L = 0 \quad (2.1)$$

$$X = \{X_i\} = \{u_1, u_2, u_3, \vartheta_1, T_1, T_2, M_s, S\}$$

$$Y = B_0 X + B_1 X_{,\eta} + B_2 X_{,\eta\eta} + B_3 X_{,\eta\eta\eta}, \quad L = B X + b$$

Здесь $B_r = \{b_{mn,r}\}$ и $B = \{b_{mn}\}$ являются матрицами преобразования; b — вектор свободных членов.

Следуя методу интегральных соотношений, ищем решение системы уравнений (2.1) в виде

$$X_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi) P_{j,i}(\xi, \eta) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$X_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi) P_j(\xi, \eta) \quad (i=4 \div 8) \quad (2.2)$$

Здесь ортогональные полиномы $P_j(\xi, \eta)$, удовлетворяющие граничным условиям и условиям ортогональности, приняты в виде

$$P_n(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n P_j(\xi, \eta) [\eta^{-1/2}(1+\alpha)r]^{j-1}$$

$$P_1(\xi, \eta) = \eta^4 - 2(1+\alpha)r\eta^3 + (1+4\alpha+\alpha^2)r^2\eta^2 - 2\alpha(1+\alpha)r^3\eta + \alpha^2r^4,$$

$$r = 1 + k_1 m \xi \quad (2.3)$$

Выбираем в качестве весовых функций такие полиномы $P_n(\xi, \eta)$ и их первые производные

$$P_n(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n P_j(\xi, \eta) \quad (n=4 \div 8), \quad P_n(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n P_{j,2}(\xi, \eta) \quad (n=1, 2, 3)$$

Применяя затем процедуру метода интегральных соотношений к исходной системе уравнений (1.48), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $8n$ с переменными коэффициентами, которую представим в нормальной форме Коши

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v + f_m \quad (m=1, \dots, s) \quad (2.4)$$

В соответствии с методом переменные коэффициенты $B_{v,m}$ и свободные члены f_m представлены через смещенные полиномы Чебышева

$$B_{v,m} = \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} d_r^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi), \quad f_m = \sum_{r=0}^q f_{m,r} (d_r r!)^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi) \quad (2.5)$$

Здесь q — степень интерполяционного полинома; a_k — коэффициенты разложения ξ^2 в ряд по многочленам Чебышева. В выражениях (2.5) $d_r = 1$ для $r=0$ и $d_r = 2^{r-1}$ для остальных r .

Общее решение системы уравнений (1.61) имеет вид

$$X_m = \sum_{\mu=1}^s C_{\mu} \left[d_0^{-1} a_0 T_0(\xi) \delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n} \right] + \sum_{j=0}^q t_{m,j,0} [d_{j+1} (j+1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{j+1} a_k T_k^*(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n} \quad (2.6)$$

где $t_{m,j,0} = f_{m,r}$ при $j=r$; μ — номер фундаментальной функции; c_{μ} — постоянные интегрирования.

В решении (2.6) $\delta=1$, если $m=\mu$ и $\delta=0$ для остальных μ . Первое приближение $X_{m,\mu,1}$ получается из подстановки нулевого приближения в правую часть системы: $d_0^{-1} a_0 T^*(\xi) \delta$ подставляем в систему

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v$$

Последующие приближения осуществляются по формулам

$$X_{m,\mu,n} = \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,\mu,n,j} [d_{n+j-1} (n+j-1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi)$$

$$X_{m,n} = \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,n,j} [d_{n+j-1} (n+j-1)!]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi), \quad \beta = n(q+3) - 2$$

Коэффициенты $t_{m,n,j}$, $t_{m,\mu,n,j}$ определяются через коэффициенты предыдущего приближения по рекуррентным формулам.

$$t_{m,\mu,n,j} = \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} t_{v,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-1-\gamma)$$

$$t_{m,n,j} = \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} t_{v,n-1,j-r} (n+j)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-\gamma)$$

Постоянные интегрирования C_{μ} , входящие в общее решение (2.6), находятся из условий сопряжения, которые в нашем случае, как уже было сказано ранее, переходят в условие периодичности (1.50).

3. В соответствии с изложенным алгоритмом была составлена Фортран-программа. Проводился расчет лопатки газовой турбины (фиг. 2-4), представляющей собой замкнутую складчатую оболочку. Геометрические и физико-механические параметры лопатки следующие: $R_1=13$ см, $R_2=20$ см, $R_3=1,3$ см, $h=0,40$ см, $\gamma=5^\circ$, $\alpha=0$, $b=20$ см. Длина дуги по образующей оболочки $l=36$ см, при этом начало обхода от точки C , панель II, панель III, панель I (фиг. 4). Лопатка рассматривается как жестко заземленная по краям $x_3=t=0$ и $x_3=t=b$, при этом граничные условия имеют вид (1.52). Условия нагружения оболочки следующие. Оболочка подвержена внутреннему давлению $P=1,2$ МПа и внешнему давлению, распределенному по следующим законам для каждой панели

$$q^I = q_0 (-2,41 \xi^3 + 3,54 \xi^2 - 0,77 \xi + 0,84),$$

$$q^{II} = q_0 (-0,46 \xi^3 + 1,45 \xi^2 - 0,67 \xi + 0,78)$$

$$q^{III} = q_0 (0,05 \xi^3 - 0,16 \xi^2 + 0,19 \xi + 1,1), \quad q_0 = 1 \text{ МПа}$$

где $\xi = S/l$ — безразмерная координата.

На фиг. 5 приведен график распределения безразмерных прогибов $w^{\sim} = w/h$ по образующей оболочки в среднем сечении, а на фиг. 6 — график распределения безразмерных напряжений σ_{ξ}^{\sim} . Как следует из результатов расчета наибольшего значения прогиб w^{\sim} и напряжения $\sigma_{\xi}^{\sim} = \sigma_{\xi} l^2 E^{-1} h^{-2}$ достигают на выпуклой стороне оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пухлий В. А., Шалашилин В. И. Об одной задаче для сопряженных оболочек вращения переменной жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 146–152.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. С. 488.
3. Мясников В. И., Мальцев В. П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. М.: Машиностроение, 1984. С. 277.
4. Григолюк Э. И., Попович В. Е., Пухлий В. А. Изгиб сложнагруженных параллелограммных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 117–124.
5. Пухлий В. А. Об одном подходе к решению краевых задач математической физики // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 11. С. 2039–2043.
6. Пухлий В. А. Решение задачи об изгибе косоугольной в плане цилиндрической трехслойной панели модифицированным методом последовательных приближений // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 10. С. 62–67.
7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек В.: Судпромгиз, 1962. С. 431.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1989