

УДК 539.374

© 1991 г.

К. С. СУЛТАНОВ

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ С ВНЕШНИМ ТРЕНИЕМ

Волновые процессы в упругих стержнях с внешним сухим трением исследовались в [1–2], где получены точные решения рассмотренных задач. Далее в [3–5] эти исследования получили дальнейшее развитие применительно к конкретным задачам с учетом конечности длины стержня, локализованности участка с трением, волн разгрузки, соотношения скоростей фронта волн в стержне и внешней среде и т. д.

Предсказания теории, разработанной в [1, 2], получили экспериментальное подтверждение с высокой точностью в исследованиях [6].

В [7] также приведены экспериментально-теоретические исследования закономерности распространения упругих волн в стержне с внешним сухим трением. Здесь также результаты экспериментальных исследований авторов совпадают с результатами теории.

В [8–10] рассмотрены задачи о распространении упругих волн в стержнях с внешним сухим трением при наличии дополнительных факторов таких, как силы тяжести, предварительные напряжения или смещения. В [10] внешняя сила трения определяется из соотношения Винклера.

Вопросы распространения волн в вязкоупругих стержнях с внешним трением обсуждаются в [11, 12], где получены аналитические решения рассмотренных задач. Стационарная задача для деформируемого стержня с внешним трением рассмотрена в [13].

В настоящей работе проводится численное решение нестационарной задачи о распространении волн, возбуждаемых прямоугольной динамической нагрузкой в деформируемом стержне с внешним трением. Закон деформирования стержня принят линейно-вязкоупругим (модель стандартно-линейного тела). Сила трения на поверхности стержня определяется из условия, включающего закон трения, предложенный в [13] и закон сухого трения Кулона.

1. Рассматривается полубесконечный вязкоупругий стержень, начальное сечение которого соответствует началу координат в плоскости  $x, t$  ( $x$  — длина,  $t$  — время).

Уравнение состояния вязкоупругого стержня (стандартно-линейное тело) имеет вид

$$d\varepsilon/dt + \mu\varepsilon = d\sigma/(E_D dt) + \mu\sigma/E_S \quad (1.1)$$

$$\mu = E_D E_S / (E_D - E_S) \eta$$

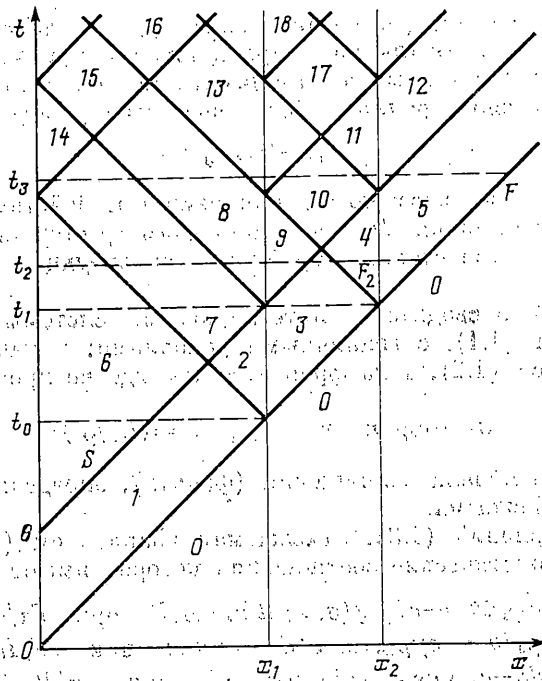
где  $\sigma, \varepsilon$  — продольные напряжения и деформация;  $E_D$  — модуль динамического,  $E_S$  — модуль статического сжатия;  $\eta$  — коэффициент объемной вязкости;  $\mu$  — параметр вязкости.

Волна создается в начальном сечении стержня  $x=0$  нагрузкой, изменяющейся по закону

$$\sigma = \sigma_{\max} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \theta \\ \sigma = 0 \quad \text{при } t \geq \theta \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{\max}$  — максимальное значение нагрузки и  $\theta$  — время ее действия.

Внешняя поверхность стержня может быть полностью или частично нагружена силой трения по длине  $x$ . В случае действия силы трения на



Фиг. 1

ограниченный участок длины стержня волновая картина соответствует схеме, приведенной на фиг. 1.

При нагрузке (1.2) фронт волны является ударным и остается прямолинейным до истощения скачка параметров на фронте волны [1].

Волна начинает распространяться по участку стержня  $0-x_1$  свободного от силы трения, которому соответствует область 1. В момент времени  $t=t_0$  волна достигает передней границы  $x_1$  участка стержня с трением. Далее волна распространяется по участку с трением  $x_1-x_2$  (область 3) и в момент  $t=t_1$  достигает задней границы участка с трением  $x_2$ . Область 5 соответствует распространению волны опять по свободному от силы трения участку стержня. В момент достижения фронтом волны  $F$  передней границы участка с трением  $x=x_1$  образуется отраженная волна (область 2), которая в свою очередь, отражаясь от начального сечения  $x=0$ , образует область 14 и т. д. После достижения фронтом волны задней границы участка с трением  $x=x_2$  образуется область 4. В момент времени  $t=0$  нагрузка в начальном сечении  $x=0$  мгновенно превращается в нуль и по стержню начинает распространяться волна разгрузки  $S$  (область 6). Волна разгрузки  $S$ , достигая передней  $x=x_1$  и задней  $x=x_2$  границ участка стержня с трением и, отражаясь от них, образует области 7-12. В дальнейшем после многократных отражений и преломлений фронтов волн образуются области 13-18 и т. д. Волновая картина на фиг. 1 соответствует случаю, когда ударный фронт волны проходит участок стержня с трением без полного истощения.

Основные уравнения движения стержня с учетом силы трения имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \kappa \sigma = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$$

где  $v$  — скорость частиц (массовая скорость);  $\rho_0$  — начальная плотность стержня;  $\kappa = \text{sign}(v)$ . Величина  $\kappa$  при движении принимает знак скорости, а в случае покоя она может принимать любое значение от  $-1$  до  $+1$ ;  $\sigma_\tau$  — приведенная сила трения, действующая на единицу длины стержня.

$$\sigma_\tau = 4D_n \tau / (D_n^2 - D_n^2) \quad (1.4)$$

где  $\tau$  — сила трения (касательное напряжение), действующая на внешней поверхности стержня;  $D_n$  — внешний диаметр стержня; в случае рассмотрения в качестве стержня трубчатых конструкций  $D_n$  — внутренний диаметр трубы.

Решение задачи сводится к интегрированию системы (1.3), замыкаемой уравнением (1.1), с граничными условиями: в начальном сечении  $x=0$  выполняется (1.2), а на фронте волны, где не проявляются вязкие свойства среды

$$\sigma = -c_0 \rho_0 v; \quad v = -c_0 \varepsilon; \quad c_0 = (E_D / \rho_0)^{1/2} \quad (1.5)$$

где  $c_0$  — скорость начала возмущения (фронта), определяемая динамической диаграммой сжатия.

Система уравнений (1.3), замыкаемая уравнением (1.1), гиперболическая, характеристические соотношения которой имеют вид

$$\begin{aligned} d\sigma - c_0 \rho_0 dv &= -c_0^2 \rho_0 g(\sigma, \varepsilon) dt + \kappa c_0 \sigma_\tau dt \quad \text{при } dx/dt = +c_0 \\ d\sigma + c_0 \rho_0 dv &= -c_0^2 \rho_0 g(\sigma, \varepsilon) dt - \kappa c_0 \sigma_\tau dt \quad \text{при } dx/dt = -c_0 \\ d\sigma - c_0^2 \rho_0 d\varepsilon &= -c_0^2 \rho_0 g(\sigma, \varepsilon) dt \quad \text{при } dx/dt = 0 \\ g(\sigma, \varepsilon) &= \sigma / \eta - E_D E_S (\varepsilon - \sigma / E_D) / (E_D - E_S) \eta \end{aligned} \quad (1.6)$$

Перейдем к безразмерным переменным и безразмерным параметрам

$$\begin{aligned} x^\circ &= \mu x / c_0, \quad t^\circ = \mu t, \quad \sigma^\circ = \sigma / \sigma_{\max}, \quad v^\circ = v / v_{\max} \\ \varepsilon^\circ &= \varepsilon / \varepsilon_{\max}, \quad v_{\max} = -\sigma_{\max} / c_0 \rho_0, \quad \varepsilon_{\max} = \sigma_{\max} / E_D \end{aligned} \quad (1.7)$$

В этих переменных основные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \partial v^\circ / \partial t^\circ + \partial \sigma^\circ / \partial x^\circ - \kappa \sigma_\tau^\circ &= 0 \\ \partial v^\circ / \partial x^\circ + \partial \varepsilon^\circ / \partial t^\circ &= 0 \\ \partial \varepsilon^\circ / \partial t^\circ + \varepsilon^\circ &= \partial \sigma^\circ / \partial t^\circ + \gamma \sigma_\tau^\circ \\ \sigma_\tau^\circ &= \sigma_\tau c_0 / \sigma_{\max} \mu, \quad \gamma = E_D / E_S \end{aligned} \quad (1.8)$$

При  $\gamma \rightarrow 1$  уравнение состояния стержня переходит к уравнению упругой среды Гука.

Граничные условия в безразмерных переменных:

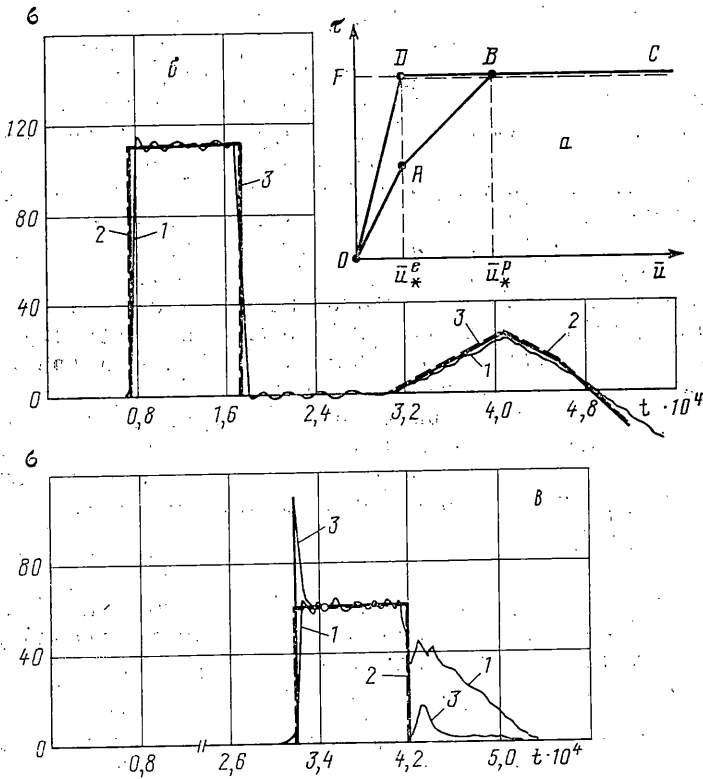
$$\begin{aligned} \sigma^\circ &= 1 \quad \text{при } 0 \leq t^\circ \leq \mu \theta \\ \sigma^\circ &= 0 \quad \text{при } t^\circ > \mu \theta, \quad \sigma^\circ = \varepsilon^\circ = v^\circ \quad \text{при } x^\circ = t^\circ \end{aligned} \quad (1.9)$$

Характеристические соотношения:

$$\begin{aligned} d\sigma^\circ + dv^\circ &= (\varepsilon^\circ - \gamma \sigma^\circ) dt^\circ + \kappa \sigma_\tau^\circ dt^\circ \quad \text{при } dx^\circ / dt^\circ = +1 \\ d\sigma^\circ - dv^\circ &= (\varepsilon^\circ - \gamma \sigma^\circ) dt^\circ - \kappa \sigma_\tau^\circ dt^\circ \quad \text{при } dx^\circ / dt^\circ = -1 \\ d\sigma^\circ - d\varepsilon^\circ &= (\varepsilon^\circ - \gamma \sigma^\circ) dt^\circ \quad \text{при } dx^\circ / dt^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Переход к безразмерным переменным приводит к уменьшению исходных параметров задачи, что позволяет результаты расчета одного варианта на ЭВМ в безразмерных переменных применять к ряду комбинаций размерных постоянных задачи.

2. Рассмотрим закономерности изменения касательного напряжения (силы трения) на внешней поверхности стержня. По сути касательные



Фиг. 2

напряжения на внешней поверхности стержня возникают при взаимодействии внешней поверхности стержня с окружающей ее средой. В определенной степени значения касательных напряжений на контакте деформируемых тел или сред зависят от многих факторов, таких как физико-механические свойства контактирующих тел, шероховатости контактирующих поверхностей, значения прижимающих сил и т. д. Закономерности изменения касательных напряжений на контакте деформируемых тел определяются в зависимости от того, какие из этих факторов преобладают. В [1–9] при решении задач о распространении упругих волн в стержнях с внешним трением изменение силы трения подчиняется закону сухого трения. В [12–15] рассматриваются законы изменения касательного напряжения на поверхности контакта различных деформируемых тел, зависящие от значения относительного смещения контактирующих тел, или сред. Здесь принят закон изменения касательного напряжения, который объединяет вышеперечисленные законы.

На фиг. 2, а приведено изменение касательного напряжения (ломаная OABC) на поверхности вязкоупругого стержня, которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 \tau &= K_x^e(\sigma_N)|u| \quad \text{при } 0 \leq |u| \leq u.^e \\
 \tau &= K_x^e(\sigma_N)u.^e + K_x^p(\sigma_N)|u - u.^e| \quad \text{при } u.^e < |u| \leq u.^p \\
 \tau &= f\sigma_N \quad \text{при } |u| > u.^p \\
 u.^e &> 0; \quad u.^p > 0; \quad \sigma_N \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где  $K_x^e(\sigma_N) = K_N^e \sigma_N$ ;  $K_x^p(\sigma_N) = K_N^p \sigma_N$ ;  $K_x^e(\sigma_N)$  и  $K_x^p(\sigma_N)$  — функции взаимодействия стержня с окружающей средой;  $K_N^e$  и  $K_N^p$  — коэффициенты, характеризующие жесткость контакта стержня с внешней средой;  $u$  —

относительное смещение контактирующих тел;  $u_*^e$  и  $u_*^p$  — значения относительного смещения, при которых происходят переходы процесса взаимодействия от одной стадии в другую;  $f$  — коэффициент трения;  $\sigma_N$  — нормальное к поверхности контакта давление (прижимающая сила).

В случае  $u_*^p = u_*^e$  изменения касательного напряжения  $\tau$  происходят по ломаной  $ODBC$ , а в случае только закона сухого трения — по ломаной  $OFDBC$  (фиг. 2, а). При возвратном движении во всех случаях, касательное напряжение мгновенно равняется нулю.

Таким образом, принятый закон изменения касательного напряжения (при  $\sigma_N = \text{const}$ ) допускает, что в начальной стадии значение  $\tau$  пропорционально меняется в зависимости от значения относительного смещения, а после достижения относительного смещения критического значения ( $u = u_*^p$ ) изменение  $\tau$  подчиняется закону сухого трения Кулона. В случае переменности значения  $\sigma_N$  изменению касательного напряжения на внешней поверхности стержня происходит достаточно сложно. Здесь, для простоты, закон изменения касательного напряжения происходит по ломаной  $ODBC$  и значение  $\sigma_N$  принято постоянным. В этом случае между коэффициентом жесткости  $K_N^e$  и коэффициентом трения  $f$  устанавливается соотношение

$$K_N^e = f/u_*^e \quad (2.2)$$

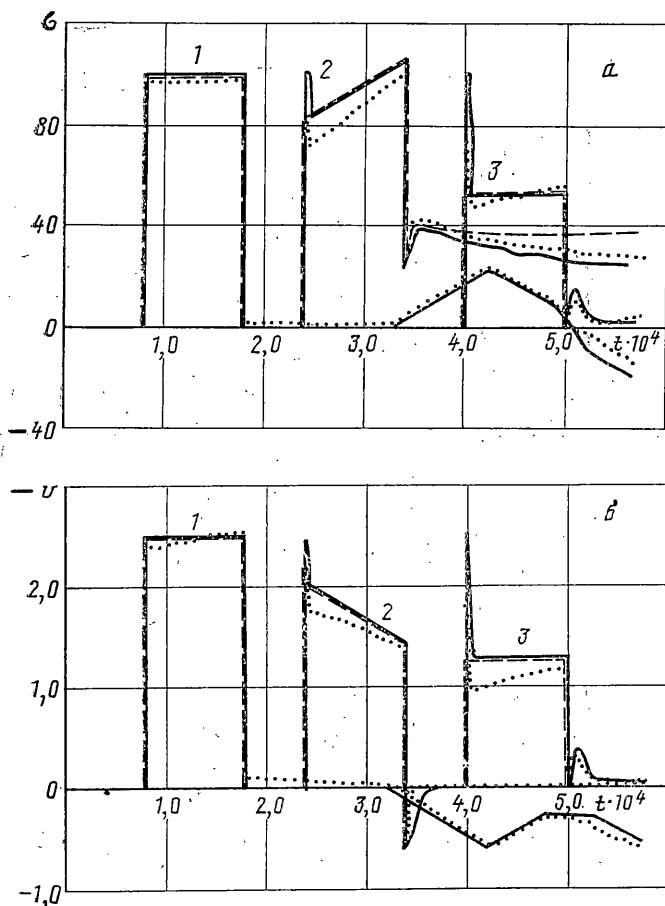
Соотношение (2.2) упрощает при расчетах использование условия (2.1), так как если известно значение коэффициента трения  $f$  для контактных пар, то, задавая значения  $u_*^e$ , можно определять значения остальных необходимых параметров.

3. Рассмотрим результаты численных решений задачи, полученных на ЭВМ. Решение задачи получено с использованием метода характеристик. Ранее этот метод применялся при решении одномерных волновых задач в диссипативных средах, например [16–17].

Алгоритм и программа решения задачи апробировались сопоставлением результатов расчета с результатами эксперимента [6], где в качестве стержня принята стальная трубка длиной 3 м со следующими характеристиками:  $D_n = 0,0127$  м;  $D_w = 0,007$  м;  $\rho_0 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $E_D = E_S = 2,15 \cdot 10^5$  МПа;  $c_0 = 5200$  м/с. Параметры нагрузки, создающей волну:  $\sigma_{\text{max}} = 111,63$  МПа при скорости удара  $v_0 = 2,7$  м/с;  $\theta = 0,0001$  с; значение прижимающего давления на внешней поверхности стержня  $\sigma_N = 1,05$  МПа;  $f = 0,425$ . Участок с трением располагался вдоль стержня от  $x_1 = 1,0$  м до  $x_2 = 1,5$  м. Импульсы напряжения в эксперименте измерялись перед участком с трением при  $x = 0,4$  и после участка с трением при  $x = 1,6$  м.

На фиг. 2, б приведены изменения напряжения  $\sigma$ , МПа во времени  $t$ , сек в сечении  $x = 0,4$  м, полученные в эксперименте и при расчете на ЭВМ. Здесь линия 1 — результаты эксперимента, линия 2 — результаты расчетов в случае изменения касательного напряжения на поверхности стержня по закону сухого трения (ломаная  $OFDBC$ ), а линия 3 — по закону (2.1) (ломаная  $ODBC$  фиг. 2, а). В последнем случае значение  $u_*^e$  принято равным  $0,000005$  м. Прямоугольный импульс на фиг. 2, б соответствует падающей волне, которая распространяется по стержню без затухания  $\gamma = 1$ , а треугольный импульс соответствует отраженной от участка с трением волне. Сопоставление результатов расчета с опытными данными на этом сечении показывает хорошее совпадение.

На фиг. 2, в приведены результаты опыта и расчета, относящиеся к сечению стержня за участком трения при  $x = 1,6$  м. Здесь также линии: 1 — эксперимент, 2 — расчет по закону сухого трения, а 3 — по закону (2.1). Здесь профили прямоугольной части импульса во всех случаях полностью совпадают. Результаты расчета с законом трения (2.1) отличаются от результатов эксперимента тем, что передний фронт падающей волны проходит участок с трением без затухания. Это объясняется наличием участка  $OD$  в зависимостях  $\tau(u)$  (фиг. 1, а). В связи с этим на кривой 3 наблюдается за фронтом волны треугольный «пик» шириной  $t = 0,000005$  с. В случае расчета с законом сухого трения этот импульс отсутствует, а в случае расчета с законом трения (2.1) такой импульс имеется. Однако, этот импульс по амплитуде и длительности по времени не совпадает с результатами эксперимента. Появление этого импульса в варианте расчета с законом трения (2.1) объясняется тем, что в момент разгрузки на заднем фронте волны, значение касательного напряжения на внешней

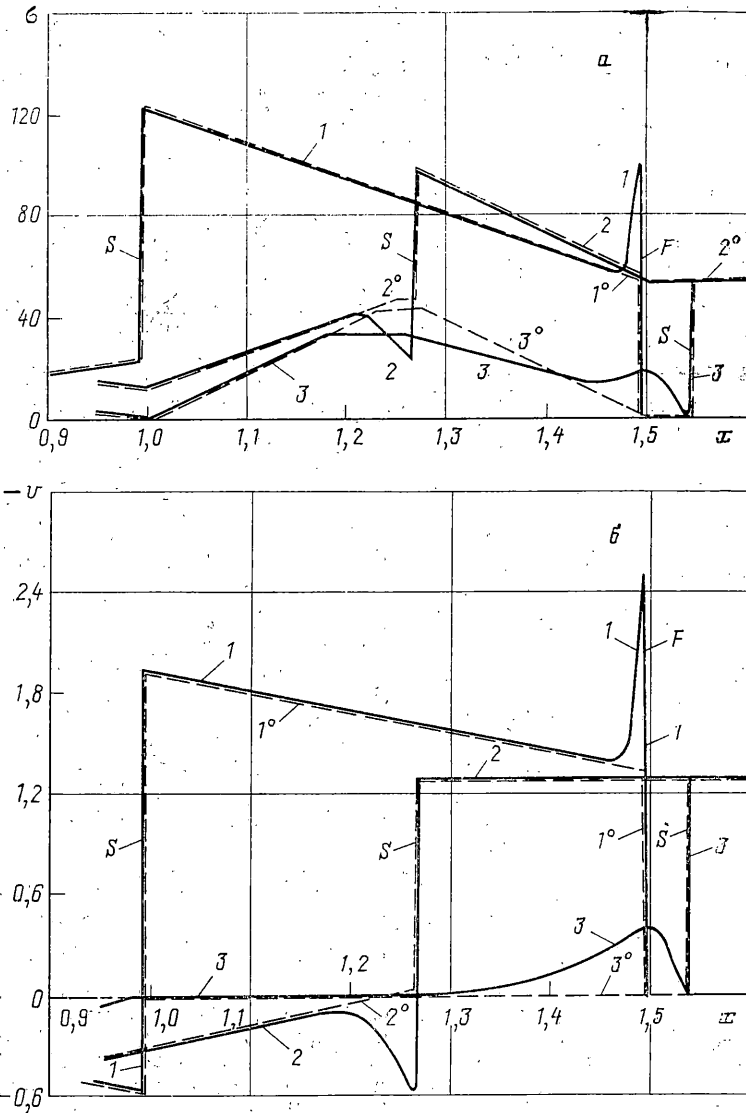


Фиг. 3

поверхности стержня в сечении, где произошла разгрузка, равняется нулю. В результате за задним фронтом прямоугольного импульса напряжения на участке стержня с внешним трением образуется некоторая зона, где касательное напряжение равняется или близко нулю, так как повторное развитие значения  $\tau$  происходит опять по линии  $OD$  (фиг. 1, а). Это обстоятельство приводит к нарушению равновесия между напряжением и силой трения и к образованию волны, распространяющейся за основным прямоугольным импульсом (кривая 3, фиг. 1, в). В варианте расчета с сухим трением образование такой волны невозможно, так как значение касательного напряжения при любых значениях скорости сечений участка стержня с трением мгновенно достигает предельного значения. Для распространения вторичного импульса, который является непрерывным импульсом напряжения, согласно результатам исследований с плавным нагружением стержня с внешним трением [1], необходимо, чтобы уровень напряжения в данном сечении стержня был больше, чем приведенная сила трения  $\sigma_t$ . Появление вторичного импульса в эксперименте [6] объясняется образованием волн в обойме, прижимающей участок стержня с трением и как следствие, движением этой обоймы. Несовпадение на фиг. 1, в результатов эксперимента и расчета для вторичного импульса говорит в пользу этого утверждения. Однако, окончательный ответ может быть получен после проведения расчетов с учетом волновых процессов также во внешней среде (обойме).

В дальнейших вариантах геометрические характеристики стержня остались неизменными, а физико-химические характеристики были приняты следующими  $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_0 = 5000 \text{ м/с}$ ;  $E_D = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Характеристики нагрузки задавались:  $\sigma_{\text{max}} = 100 \text{ МПа}$ ;  $\theta = 0,0001 \text{ с}$  и  $\sigma_N = 1,0 \text{ МПа}$ ;  $j = 0,425$ . В случае  $\gamma \neq 1$ , значение параметра вязкости принималось  $\mu = 10^4, \text{ с}^{-1}$ . Участок стержня с трением расположен от  $x_1 = 1,0 \text{ м}$  до  $x_2 = 1,5 \text{ м}$ .

На фиг. 3 приведены изменения напряжения  $\sigma$ , МПа (а) и скорости частиц  $v$ , м/с (б) в фиксированных сечениях стержня при  $x = 0,4 \text{ м}$  (кривые 1),  $x = 1,2 \text{ м}$  (кри-

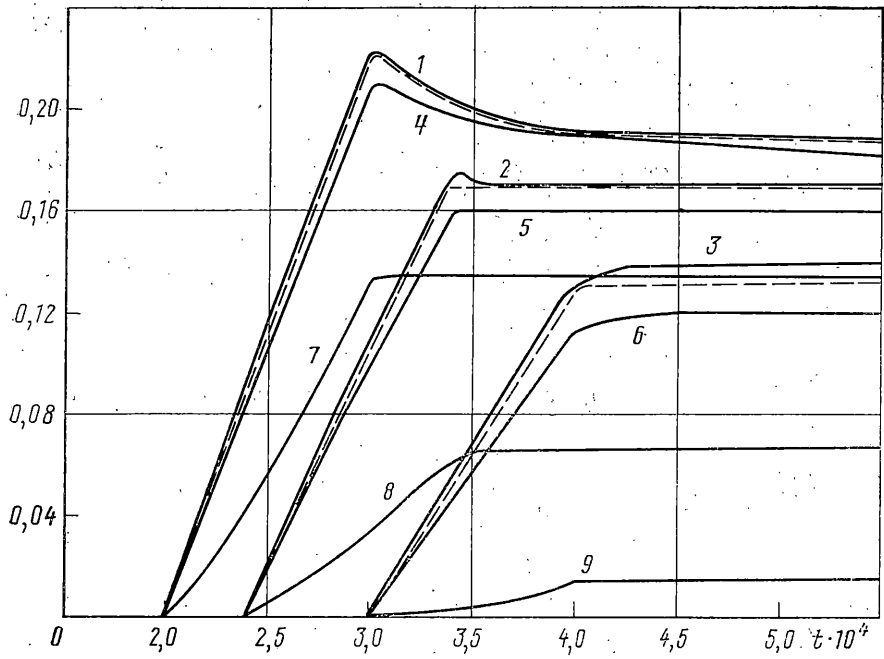


Фиг. 4

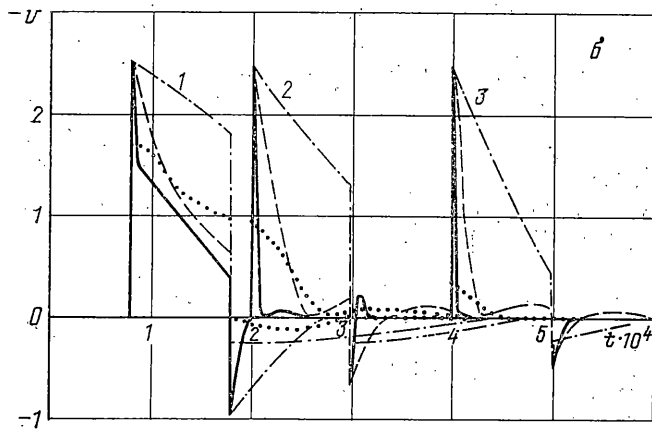
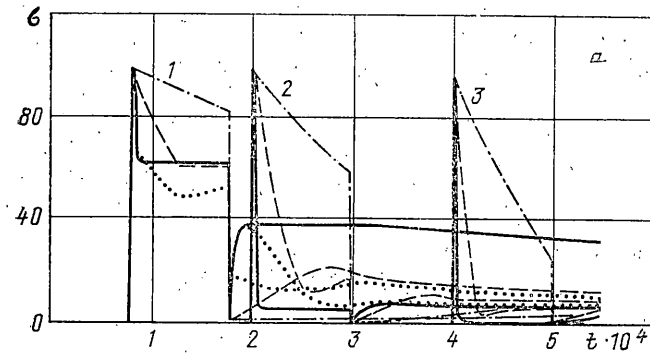
вые 2),  $x=2,0$  м (кривые 3). Здесь сплошные и штрих-пунктирные линии относятся к результатам расчетов с использованием закона трения (2.1) при  $u_*^e = 0,000005$  м,  $\gamma=1$  и  $\gamma=1,1$  соответственно, а штриховые линии — с использованием закона сухого трения. В сечении перед участком стержня с внешним трением, при  $x=0,4$  м, профиль волны (прямоугольный импульс) в случае вязкоупругого стержня ( $\gamma=1,1$ ) меняется (штрих-пунктирная линия). Учет вязкости приводит к уменьшению значения скачка на фронте волны. За фронтом волны наблюдается незначительный рост значений как напряжения так и скорости частиц. Профиль отраженной волны при  $\gamma=1,1$  практически не меняется. В сечении  $x=1,2$  м, что находится на участке с трением, профили волн, распространяющихся по упругому стержню, отличаются наличием «пика» в варианте расчетов с законом трения (2.1), а также наблюдаются отличия после разгрузки. Влияние вязкости на этом сечении на параметры волн более заметно (штрих-пунктирная линия). За участком с трением ( $x=2,0$  м) влияние вязкости на профили волн также незначительно. Учет вязкости приводит к уменьшению амплитуды вторичного импульса.

На фиг. 4 приведены распределения напряжения  $\sigma$ , МПа (а) и скорости частиц  $v$ , м/с (б) по длине упругого ( $\gamma=1$ ) стержня при тех же исходных данных, соответствующих временам, обозначенным на фиг. 1 при  $t_1=2,98 \cdot 10^{-4}$  с — (кривые 1, 4),

$-u \cdot 10^3$



Фиг. 5.



Фиг. 6



$t_2=3,53 \cdot 10^{-4}$  с (кривые 2, 5) и  $t_3=4,08 \cdot 10^{-4}$  с (кривые 3, 6). Сплошные линии – результаты расчета с использованием закона трения (2.1), и штриховые линии (кривые 4–6) – закона сухого трения. Буквами  $F$  обозначены передние фронты волн, а буквой  $S$  – задние фронты. Из рисунков видно, что в случае закона сухого трения передние фронты волн по мере прохождения участка с трением истощаются. В случае закона (2.1) передний фронт участок с трением проходит без затухания. За фронтом происходит интенсивное падение значения параметров (напряжений и скорости частиц) волны, далее профили волн в обоих случаях до момента прохождения передним фронтом участка с трением совпадают (кривые 1). После прохождения фронтом участка с трением профили волн за фронтом разгрузки при разных законах трения отличаются. Как видно из фиг. 4, вторичная волна зарождается внутри самого участка с трением и распространяется вслед за фронтом разгрузки.

На фиг. 5 приведены зависимости относительного смещения  $u$ , м от времени  $t$ , сек для фиксированных сечений стержня. Здесь сплошные кривые 1, 2, 3 относятся к результатам расчета с законом трения (2.1) на контакте стержня с внешней средой при  $\gamma=1$ . Кривые 4, 5, 6 также относятся к результатам расчета с законом трения (2.1) при  $\gamma=1,1$ , а кривые 7, 8, 9 – при  $\gamma=2$ . Пунктирные линии относятся к результатам расчета с законом сухого трения Кулона. Кривые 1, 4, 7 относятся к сечению стержня  $x=1,0$  м (передняя граница участка стержня с трением), кривые 2, 5, 8 относятся к сечению  $x=1,2$  (внутри участка с трением), а кривые 3, 6, 9 относятся к  $x=1,5$  м (задняя граница участка с трением). Во всех случаях  $u_*^e=0,000005$  м;  $\sigma_{\max}=100$  МПа;  $\theta=0,0001$  с и  $\sigma_N=1,0$  МПа;  $f=0,425$ .

Значения относительного смещения сечений стержня в случаях закона сухого трения и закона трения (2.1) отличаются незначительно для упругого стержня (кривые 1, 2, 3 и пунктирные линии). Вязкие свойства стержня существенно влияют на значения относительного смещения сечений стержня. При  $\gamma=1,1$  значения относительного смещения уже отличаются от значений при  $\gamma=1$ . При этом значения относительного смещения в начальных сечениях участка с трением уменьшаются незначительно, а в сечениях, близких к задней границе участка с трением, эта разница увеличивается (кривые 3 и 6). Увеличение значения  $\gamma$ , что соответствует увеличению вязких свойств материала стержня, приводит к существенному уменьшению значений относительных смещений (кривые 7, 8, 9). При  $\gamma=2$  относительные смещения задних сечений участка с трением стержня практически близки к нулю (кривая 9).

На фиг. 6 приведены результаты расчетов при тех же исходных данных, что и для фиг. 3, но с различными значениями  $u_*^e$ ,  $x_1$  и  $x_2$ . Здесь сплошные линии относятся к результатам расчета при  $u_*^e=0,000005$  м, а пунктирные – при  $u_*^e=0,0001$  м, штрихпунктирные – при  $u_*^e=0,0005$  м. В этих случаях  $\gamma=1,0$ . Штриховая линия получена при  $\gamma=2$  и  $u_*^e=0,0001$  м. На фиг. 6, а приведены изменения напряжений  $\sigma$ , МПа, а на фиг. 6, б изменения скорости частиц  $v$ , м/с по времени  $t$ , с. Во всех случаях на контакте стержня с внешней средой принят закон трения (2.1). Здесь стержень с внешней средой контактирует и взаимодействует по всей длине, то есть  $x_1=0$ ,  $x_2 \rightarrow \infty$ . Кривые 1 относятся к сечению стержня  $x=0,40$  м, кривые 2 –  $x=1,0$  м, а кривые 3 –  $x=2,0$  м.

Профили волн в сечениях упругого стержня внутри участка с трением при одинаковых исходных данных и параметрах закона трения, в случае ограниченного и неограниченного (сплошного) участка стержня с трением качественно отличаются (фиг. 3, а и фиг. 6, а). В сечениях стержня, ограниченных участком с трением, за фронтом падающей волны значение напряжения сначала падает, затем из-за влияния отраженной от границы участка с трением волны нарастает (фиг. 3, а). В сечениях стержня сплошного участка трения за фронтом волны значение напряжения все время падает (фиг. 6, а). С увеличением значения  $u_*^e$  интенсивность падения значений напряжения и скорости частиц существенно уменьшается (фиг. 6). По мере распространения прямоугольного импульса по упругому стержню, профиль импульса превращается в треугольный. При меньших значениях  $u_*^e$  площадь этого треугольника с удалением от начального сечения стержня уменьшается существенно. Однако площади этих треугольников не станут равными нулю. Эти треугольные импульсы будут распространяться по упругому стержню и нести незначительную энергию. Существование таких импульсов обнаружено в экспериментах [7]. При большой длине участка с трением и значительных касательных напряжениях за участком с трением стержня в [7] обнаружен всплеск (вздрагивание), что соответствует действию таких импульсов.

При распространении прямоугольного импульса по вязкоупругому стержню с внешним трением, взаимодействующему по всей длине с окружающей средой, из-за наличия внутреннего трения в самом материале стержня этот импульс истощается быстрее (штриховые линии, фиг. 6). По мере удаления от начального сечения значение скачка на переднем фронте волны падает, длительность волны уменьшается. При достаточном удалении от начального сечения ( $x=2,0$  м) в вязкоупругом стержне с внешним трением волна практически исчезает.

Таким образом, в деформируемых стержнях с внешним трением, параметры волн существенно зависят от вязких свойств стержня. Увеличение  $\gamma$ , что соответствует

увеличению вязкости стержня, приводит к быстрому истощению скачка на фронте, качественному изменению профиля и в дальнейшем, полному поглощению волны на некотором расстоянии от начального сечения стержня.

Параметры волны также зависят от закона трения на поверхности контакта стержня с внешней средой. Профили волн в случае закона трения (2.1) отличаются от профилей волн в случае закона сухого трения проявлением «пика» на переднем фронте и вторичной волны после фронта разгрузки в стержнях с ограниченным участком трения. Закон трения (2.1) приводит также к появлению незатухающего треугольного импульса в упругих стержнях сплошного внешнего трения. Длительность этих импульсов зависит от параметра  $u_*$  закона трения (2.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никигин Л. В.* Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения // *Инж. ж.* 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 126–130.
2. *Никигин Л. В.* Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1967. № 2. С. 166–170.
3. *Никигин Л. В.* Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1978. № 6. С. 137–145.
4. *Никигин Л. В., Тюреходжаев А. Н.* Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите // *Механика композ. материалов.* 1986. № 1. С. 28–37.
5. *Никигин Л. В., Тюреходжаев А. Н.* Воздействия ударной волны в грунте на подземный трубопровод // *АН СССР. МТТ.* 1987. № 1. С. 98–106.
6. *Викторов В. В., Карабаев Р. Р., Никигин Л. В., Хамраев А. Х.* Экспериментальная проверка закона сухого трения при распространении волн в обжатом стержне // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1988. № 3. С. 165–171.
7. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Распространение волн в упругих стержнях, находясь в среде с сухим трением // *Тр. ин-та механики МГУ: Задачи механики твердого деформируемого тела.* М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 64–99.
8. *Мирзаев И. М.* Динамика предварительного напряженного стержня при действии ударной нагрузки // *Динамические задачи неупругой среды.* Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып. 71. С. 65–74.
9. *Тарханов Г. В.* Влияние предварительного смещения на распространение упругой волны по стержню при наличии сухого трения // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1982. № 2. С. 173–178.
10. *Филиппов А. Н.* Распространение продольных упругих волн в стержне, окруженном средой типа Винклера // *Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.* 1983. № 1. С. 74–78.
11. *Сахарова А. С.* Продольные волны в вязкоупругом стержне с сухим трением на границе // *Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.* 1984. № 5. С. 53–57.
12. *Филиппов И. Г.* Теория продольного колебания вязкоупругого круглого стержня, находящегося в деформируемой среде // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 6. С. 155–163.
13. *Ильюшин А. А., Рашидов Т. Р.* О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // *Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук.* 1971. № 1. С. 37–42.
14. *Зволинский Н. В., Шлиник К. Н.* Континуальная модель слоистой упругой среды // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 5–14.
15. *Никигин И. С.* Осредненные уравнения сплошной среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 5. С. 80–86.
16. *Бураго Н. Х., Кукуджанов В. Н.* Распространение волн в материалах с запаздыванием текучести // *Распространение упругих и упруго-пластичных волн.* Алма-Ата: Наука, 1973. С. 101–107.
17. *Султанов К. С.* Распространение продольных волн в вязкоупругом полупространстве, включающем поглощающий слой // *ПМТФ.* 1984. № 5. С. 137–142.

Ташкент

Поступила в редакцию  
11.IV.1990