МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.374

И. Г. КАДОМЦЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОУДАРЕНИИ ТЕЛ

Одной из важных характеристик при изучении соударения тел является коэффициент восстановления. В данной статье описан приближенный подход для его определения. Задача решается в квазистатической постановке. На этапе внедрения используется решение статической контактной упругопластической задачи [1], упругие деформации не учитываются, и в этом случае для коэффициента восстановления получено явное выражение. Сравнение с результатами экспериментов из [3] показывает лучшее совпадение предлагаемой теории, чем та, которая используется в [3]. Затем коэффициент восстановления находится другим способом, определяя упругую энергию, накопленную в процессе внедрения. Решение получается в эллиптических интегралах первого и второго рода и хорошо согласуется с полученным ранее.

Рассматривается прямое центральное упругопластическое соударение двух тел массой m_i, которые сближаются с относительной скоростью v_0. Определяется коэффициент восстановления, который равен отношению относительной скорости после удара к v_0. Для того чтобы найти скорость расхождения тел, рассмотрим внутренние процессы, которые происходят в телах во время удара. Считаем, что $v_0 \ll c_0$ (скорости звука в телах). Это позволяет задачу рассматривать в квазистатической постановке, т. е. считать, что в процессе удара зависимость между местным смятием α и силой контактного взаимодействия P будет такой же, как и в случае статического нагружения.

Воспользуемся зависимостью $\alpha(P)$ для упругопластических контактных задач из [1], которая имеет вид

$$\begin{gathered}
\alpha=bP^{2/3}, \quad P<P_1 \\
\alpha=b_0P^{2/3}+\alpha_p(P_{\max}); \quad \dot{P}<0, \quad P>P_1 \\
\alpha=(1+\beta)cP+(1-\beta)Pd; \quad \dot{P}>0, \quad P>P_1 \\
b=R^{-1/3}[3/(4E)]^{2/3}, \quad P_1=(3R/4)^2\varkappa^3E^{-2} \\
b_0=R_0^{-1/3}[3/(4E)]^{2/3}, \quad a_{\max}=(P/\varkappa)^{1/2} \\
R_0=3\varkappa(4Ea_{\max})^{-1}, \quad \varkappa=5{,}7k\pi \\
E=E_1E_2[E_1(1-\mu_2^2)+E_2(1-\mu_1^2)]^{-1} \\
c=3\varkappa^{1/2}(8E)^{-1}, \quad d=(2\varkappa R)^{-1}, \quad R^{-1}=R_1^{-1}+R_2^{-1}
\end{gathered} \tag{1}$$

E_i — модули Юнга тел, μ_i — коэффициенты Пуассона, $P_{\max}$ — максимальная сила контактного взаимодействия, $a_{\max}$ — максимальный радиус контакта, k — наименьшая пластическая константа двух тел, R_1 и R_2 — радиусы кривизны тел в точке касания. Параметр β характеризует вытекание материала из-под штампа в процессе его внедрения и зависит от формы штампа. Для параболического штампа $\beta=0{,}33$.

На этапе внедрения, при развитых пластических деформациях, пренебрегаем упругой составляющей местного смятия. В этом случае зависимость $\alpha(P)$ имеет вид

$$\alpha(P)=(1-\beta)Pd \tag{2}$$

Уравнению движения тел можно придать вид

$$m\alpha^{\cdot\cdot}=-P(\alpha),\quad m=m_1m_2/(m_1+m_2) \tag{3}$$

$$\alpha(0)=0,\quad \alpha^{\cdot}(0)=v_0$$

Решая (3) с учетом (2), имеем

$$\alpha=v_0\omega^{-1}\sin\omega t,\quad \omega^2=2\varkappa R/(m(1-\beta)) \tag{4}$$

Из (4) получаем

$$\alpha_{\max}=v_0[m(1-\beta)/(2\varkappa R)]^{1/2},\quad P_{\max}=v_0[2m\varkappa R/(1-\beta)]^{1/2}$$

Уравнение движения тела при отскоке, согласно (1), имеет вид

$$m\alpha^{\cdot\cdot}=-(4E/3)^{4/3}\varkappa^{-1/2}a_{\max}^{1/2}(\alpha-\alpha_p)^{3/2} \tag{5}$$

$$\alpha_p=\alpha_{\max}-\alpha_e(P_{\max}),\quad \alpha_e(P_{\max})=3\varkappa a_{\max}(4E)^{-1}$$

с начальными условиями $\alpha(0)=\alpha_{\max}$ и $\alpha^{\cdot}(0)=0$. Решая (5), находим скорость отскока

$$v_1=[3/(5E)]^{1/2}m^{-1/8}\varkappa^{5/8}[2R/(1-\beta)]^{3/8}v_0^{3/4}$$

Отсюда коэффициент восстановления для тел с квадратичным зазором имеет вид

$$\lambda_1=v_1/v_0=4{,}577m^{-1/8}R^{3/8}E^{-1/2}\sigma_T^{5/8}\ v_0^{-1/4} \tag{6}$$

При наличии развитых пластических деформаций распределение давлений под штампом стремится к распределению давлений в жесткопластической задаче [2]. Давление из [2] будем аппроксимировать функцией вида

$$q(\xi)=B\sum_{i=0}^{n}A_iP_i(\xi),\quad \int_0^1 P_i(\xi)P_j(\xi)\xi\,d\xi=\delta_{ij} \tag{7}$$

Здесь $P_i(\xi)$ — ортонормированные полиномы Якоби с весом ξ, δ_{ij} — символ Кронекера. Коэффициенты A_i определяются из условия минимума функционала

$$J=\int_F \varepsilon^2\,dF=2\pi\int_0^1\varepsilon^2\xi\,d\xi,\quad \varepsilon=q(\xi)-q_T,\quad \xi=z/a$$

Здесь $q_т$ — давление, заданное численно, из [2]. Из $\partial J/\partial A_k=0$ получим: $A_0=4{,}103$, $A_1=0{,}2458$, $A_2=0{,}1266$, $A_3=0{,}02424$, $A_4=0{,}0169$. Константа B определяется из условия, что

$$\int_F q(\xi)dF=P \tag{8}$$

Подставляя в (8) $q(\xi)$, из (7) находим $B=\sigma_т/(0{,}7017A_0)$. По известным формулам теории упругости находим перемещения на поверхности тел

$$w_y=\theta\int_F\frac{q(r')}{r}dF,\quad \theta=(1-\mu^2)(\pi E)^{-1} \tag{9}$$

Если подставить в (9) давление $q(\xi)$, то окончательно получим

$$w_y=\theta \dot{a}_{\max} B\left[\sum_{i=0}^{n} B_i\xi^i K(\xi)+\sum_{i=0}^{n} C_i\xi^i E(\xi)\right]$$

Здесь $K(\xi)$ и $E(\xi)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, B_i и C_i — известные коэффициенты. Теперь нетрудно определить упругую энергию, накопленную в процессе внедрения штампа в упругопластическое полупространство

$$U_y=\int_F q(\xi)w_y\,dF$$

Окончательно получим $U_y=57{,}942\pi\theta B^2 a^3_{\max}$. Упругая энергия, накопленная в теле, переходит в кинетическую энергию штампа при его отскоке. Тогда $u_y=mv_1^2/2$, отсюда $v_1=(2u_y/m)^{1/2}$, а коэффициент восстановления

$$\lambda_1=v_1/v_0 \qquad (10)$$

Сравним результаты построенной теории с результатами экспериментов из [3]. Все исходные данные берутся из [3]. Однако там не приводятся значения динамического предела текучести материалов $\sigma_т$, поэтому для его определения использовался первый опыт при скорости 5 м/с. Результаты экспериментов и расчетов приведены ниже

5	0,74	0,74	0,69	0,69	0,69	0,68	0,56	0,56	0,63
10	0,64	0,62	0,66	0,58	0,58	0,65	0,47	0,47	0,60
20	0,54	0,52	0,62	0,47	0,48	0,61	0,38	0,39	0,56
50	0,40	0,41	0,57	0,33	0,38	0,54	0,27	0,31	0,51
100	0,29	0,35	0,53	0,23	0,32	0,52	0,18	0,26	0,47
150	0,23	0,31	0,51	0,16	0,29	0,50	0,13	0,24	0,45
200	0,19	0,29	0,49	0,12	0,27	0,48	0,09	0,22	0,43

В качестве инденторов применялись закаленные подшипниковые шарики диаметром 1,59 мм, массой 16,2 мг, а мишенью служили образцы из дюраля Д16Т, отожженная сталь Ст3 и катаная техническая медь М1. В столбце 1 дана скорость удара шарика по мишени в м/с, столбцы 2—4 дают значения коэффициентов восстановления для экспериментальных значений, вычисленных по формуле (8) и определяемых теорией [3] соответственно. В столбцах 5—7 в том же порядке приведены λ для Ст3, а в 8—10 — для меди. Сравнение показывает лучшее совпадение с экспериментами предлагаемой теории. При скорости 100 м/с и больше диаметр пластического отпечатка приближается к диаметру шарика и, следовательно, нарушаются исходные предпосылки данной теории. Отсюда заметные расхождения с экспериментами. Расчеты по (10) практически совпадают с расчетами по (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Кадомцев И. Г., Царюк Л. Б.* Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 1. С. 16—26.
2. *Ишлинский А. Ю.* Осесимметричная задача пластичности и проба Бринеля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 8. С. 201—222.
3. *Кангур Х. Ф., Клейс И. Р.* Экспериментальное и расчетное определение коэффициента восстановления при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 182—185.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
12.IX.1990