

УДК 539.374

© 1991 г.

К. В. ИСАЕВ

АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается задача идентификации линейных дифференциальных моделей вязкоупругого поведения материалов по эмпирическим данным, полученным в условиях активного управляемого эксперимента. Разработан эффективный метод решения этой задачи.

Поставлен ряд задач оптимизации свободных параметров эксперимента (тестируемых процессов на входах экспериментальной установки, моментов времени наблюдения), наиболее адекватных экспериментальной практике. Дана интерпретация этих задач как задач оптимального управления и предложен численный метод их решения.

1. Приведение исходной модели к эквивалентной линейной по параметрам модели. При описании вязкоупругого поведения материалов широкое распространение получили дифференциальные модели, имеющие при нулевых начальных условиях в пространстве изображений по Лапласу вид соотношения [1]:

$$x(s) = \alpha_0 u(s) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{1+s\tau_i} u(s) \quad (1.1)$$

где s — комплексная переменная Лапласа; $u(s)$, $x(s)$ — образы наблюдаемых в эксперименте процессов, пропорциональных соответствующим компонентам тензоров напряжения и деформации; α_0 , α_i , τ_i ($i=1, 2, \dots, n$) — совокупность априори неизвестных параметров модели (1.1), оцениваемых по эмпирическим данным в результате решения задачи идентификации. Основная трудность решения этой задачи связана с наличием параметров τ_i , нелинейным образом входящих в правую часть соотношения (1.1). Существует, однако, возможность приведения модели (1.1) к эквивалентным ей и линейным по всей совокупности оцениваемых параметров моделям. Одна из таких моделей имеет вид

$$x(s) = a_0 u(s) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{1+sT_i} u(s) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{sT_i}{1+sT_i} x(s) \quad (1.2)$$

где оцениваемыми считаются параметры a_0 , a_i , b_i ($i=1, 2, \dots, n$), в то время как параметры T_i ($i=1, 2, \dots, n$) фиксируются произвольным образом положительными и различными. Эквивалентность моделей (1.1) и (1.2) здесь понимается в том смысле, что для произвольных положительных значений параметров α_0 , α_i , τ_i модели (1.1) найдутся такие значения параметров a_0 , a_i , b_i модели (1.2) (при заданных T_i), что любые процессы $u(s)$, $x(s)$, удовлетворяющие одному из соотношений (1.1) или (1.2), будут удовлетворять также другому из них, и наоборот — по параметрам модели (1.2) могут быть однозначно подобраны параметры модели (1.1).

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между совокупностями параметров моделей (1.1) и (1.2), которое устанавливается из следующих форм записи соответственно соотношений (1.1) и (1.2): $Q(s)x(s) = P(s)u(s)$, $(Q_1(s)/Q_2(s))x(s) = (P_1(s)/Q_2(s))u(s)$, где $Q(s)$, $P(s)$, $Q_1(s)$, $Q_2(s)$, $P_1(s)$ — полиномы степени n . Для эквивалентности моделей (1.1) и (1.2) необходимо выполнение тождеств $Q(s) = Q_1(s)$, $P(s) = P_1(s)$, которые дают способ взаимного пересчета параметров этих моделей. Так, чтобы пересчитать параметры модели (1.2) в параметры модели (1.1), необходимо вначале по значениям T_i и b_i определить коэффициенты полинома $Q_1(s)$, найти его корни и присвоить обратные им величины с противоположными знаками параметрам τ_i (можно показать, что корни полинома $Q_1(s)$ действительны и отрицательны), затем по значениям a_i , T_i найти коэффициенты полинома $P_1(s)$ и решить относительно α_i систему линейных уравнений, полученную приравнованием коэффициентов полиномов $P(s)$ и $P_1(s)$ при одинаковых степенях s (с учетом того, что τ_i уже определены). Аналогичным способом производится обратный пересчет параметров модели (1.1) в параметры модели (1.2).

Обратим внимание на то, что переход от нелинейной по параметрам модели к линейной оказывается возможным за счет утраты важного свойства ее ориентированности [2]. Это означает, что исходное соотношение (1.1) в отличие от (1.2) имеет явный относительный $x(s)$ вид.

2. Решение задачи идентификации. Эмпирические данные обычно имеют вид последовательности $\{\Delta t[j], u[j], x[j]\}_{j=1}^N$; где $\Delta t[j]$ — интервалы между двумя соседними моментами времени наблюдения (измерения) t_j и t_{j-1} ($\Delta t[j] = t_j - t_{j-1}$; $j = 1, 2, \dots, N$; $t_0 = 0$); $u[j]$, $x[j]$ — значения наблюдаемых процессов — оригиналов $u(t)$ и $x(t)$ образов $u(s)$ и $x(s)$ соответственно в моменты времени t_j . Вообще везде ниже значение некоторого процесса $y(t)$ в момент времени $t = t_j$ будем обозначать $y[j]$.

С вычислительной точки зрения модель (1.2) удобно записывать в векторной форме

$$x[j] = c^T z[j]; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

где $c = (a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^T$ — вектор (столбцовая матрица) оцениваемых параметров модели (1.2) (или (2.1)), T — символ транспонирования, $z[j] = (z_1[j], \dots, z_{2n+1}[j])^T$;

$$z_1[j] = u[j], \quad z_{i+1}[j] = \eta_i[j], \quad z_{n+i+1}[j] = x[j] - \eta_{n+i}[j] \quad (2.2)$$

$$\eta_i(s) = \frac{1}{1+sT_i} u(s), \quad \eta_{n+i}(s) = \frac{1}{1+sT_i} x(s) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

На каждом из интервалов $(t_{j-1}, t_j]$, помещая начало координат в точку t_{j-1} , процессы $u(t)$ и $x(t)$ будем аппроксимировать полиномами в общем случае различных степеней m_1 и m_2 :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{ij}^1 t^i, \quad x(t) = \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_{ij}^2 t^i \quad (2.4)$$

$$\lambda_{ij}^1 = \lambda_i^1(\{u[j-k], \Delta t[j-k]\}_{k=0}^{q_1}) \quad (2.5)$$

$$\lambda_{ij}^2 = \lambda_i^2(\{x[j-k], \Delta t[j-k]\}_{k=0}^{q_2})$$

Натуральные числа q_1, q_2 определяются степенями полиномов (2.4) и способом аппроксимации. Из (2.3), (2.4) получаем следующие рекур-

рентные соотношения

$$\eta_i[j] = \gamma_{ij}(\eta_i[j-1] - p_{m1,j}^1(i)) + p_{m1,j}^1(i) + r_{m1,j}^1(i)t, \quad \eta_i[0] = 0 \quad (2.6)$$

$$\eta_{n+i}[j] = \gamma_{ij}(\eta_{n+i}[j-1] - p_{m2,j}^1(i)) + p_{m2,j}^1(i) + r_{m2,j}^1(i)t, \quad \eta_{n+i}[0] = 0$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_i(\Delta t[j]) = \exp(-\Delta t[j]/T_i) \quad (2.7)$$

коэффициенты $p_{mj}^l(i)$, $r_{mj}^l(i)$ ($l=1, 2$) определяются последовательно в соответствии с рекуррентными соотношениями

$$p_{mj}^l(i) = p_{(m-1),j}^l(i) + \lambda_{ij}^l(-T_i)^r, \quad p_{0j}^l(i) = \lambda_{0j}^l \quad (2.8)$$

$$r_{mj}^l(i) = r_{(m-1),j}^l(i) + \lambda_{ij}^l \sum_{p=0}^m (-T_i)^p, \quad r_{0j}^l(i) = 0$$

Соотношения (2.1), (2.2), (2.5)–(2.8) полностью определяют некоторую дискретную динамическую систему, заданную в пространстве состояний [2] с вектором текущего состояния $\eta[j] = (\eta_1[j], \dots, \eta_{2n}[j])^T$. Задачу оценивания вектора параметров с этой системы определим как задачу минимизации (по c) функционала [2]:

$$I(c) = \sum_{j=1}^N \rho[j] (x[j] - c^T z[j])^2 + (c - c_0)^T D_0^{-1} (c - c_0)$$

где $\rho[j]$ – положительные весовые коэффициенты, в статистической интерпретации задачи идентификации обратно пропорциональные дисперсиям погрешностей наблюдения величин $\varepsilon[j] = x[j] - c^T z[j]$; c_0 – априорная оценка вектора c ; D_0 – положительно определенная симметричная матрица, в статистической интерпретации равная дисперсионной матрице оценки c_0 [3]. Решение сформулированной задачи имеет вид

$$c = M^{-1}[N] d[N] \quad (2.9)$$

где симметричная матрица $M[N]$ и вектор $d[N]$ могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям

$$M[j] = M[j-1] + \rho[j] z[j] z^T[j], \quad M[0] = D_0^{-1} \\ d[j] = d[j-1] + \rho[j] x[j] z[j], \quad d[0] = D_0^{-1} c_0, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

Таким образом, алгоритм оценивания параметра c сводится к выполнению в цикле от $j=1$ до $j=N$ следующих вычислений: по формулам (2.5) вычисляются коэффициенты полиномов аппроксимации (2.4) процессов $u(t)$ и $x(t)$; по формулам (2.7), (2.8) вычисляются коэффициенты $p_{mi,j}^l(i)$, $r_{mi,j}^l(i)$; в соответствии с рекуррентными соотношениями (2.6) уточняется текущее состояние системы $\eta[j]$; по формулам (2.2), (2.10) вычисляется вектор $z[j]$ и уточняются матрица $M[j]$ и вектор $d[j]$.

После окончания цикла в соответствии с (2.9) определяется оценка c вектора параметров модели (2.1) (или, что то же самое, модели (1.2)). Затем по изложенному выше алгоритму вектор c пересчитывается в параметры модели (1.1). В случаях значительного отличия полученных таким образом оценок параметров τ_i от априори выбранных значений параметров T_i , рекомендуется присвоить параметрам T_i значения τ_i и все вычисления повторить.

Особо отметим, что полученные рекуррентные соотношения для всех основных вычислений позволяет значительно экономить память вычисли-

тельных средств, а также при достаточном быстродействии этих средств реализовать все вычисления в масштабе реального времени эксперимента — по мере поступления значений $\Delta t[j]$, $u[j]$, $x[j]$ в память ЭВМ.

3. Задачи оптимизации экспериментов. Точность оценки параметров (качество) модели в соответствии с (2.9) определяется степенью обусловленности матрицы $M[N]$, которая в свою очередь зависит от эмпирических данных $\{\Delta t[j], u[j], x[j]\}_{j=1}^N$ или, как говорят, от их информационной представительности. Основными факторами, допускающими варьирование при проведении экспериментов, являются: число наблюдений N , последовательность интервалов времени между измерениями $\{\Delta t[j]\}_{j=1}^N$, а также процесс $v(t)$ на входе экспериментальной установки (тестирующий процесс), связанный с процессом нагружения образца материала $u(t)$ некоторым оператором: $u(t) = Lv(t)$.

Во многих случаях (при управлении процессом нагружения с помощью гидравлических или электрических приводов) указанная связь хорошо описывается (с точностью до постоянного множителя) соотношением

$$u(s) = v(s)/(1+sT) \quad (3.1)$$

Положим процесс $v(t)$ кусочно-постоянным на интервалах $(t[j-1], t[j])$, что означает возможность задания его в виде последовательности $\{v[j]\}_{j=1}^N$. Принятое ограничение с точки зрения рассматриваемых ниже задач оптимизации эксперимента несущественно, т.к. оптимальный (в классе произвольных ограниченных измеримых по Лебегу процессов) тестирующий процесс $v(t)$ является кусочно-постоянным на $(t[j-1], t[j])$. Соотношение (3.1) теперь можно записать в дискретном виде

$$u[j] = \gamma(\Delta t[j])u[j-1] + v[j](1 - \gamma(\Delta t[j])), \quad u[0] = 0 \quad (3.2)$$

$$\gamma(\Delta t[j]) = \exp(-\Delta t[j]/T)$$

Прежде чем определить так называемую модель чувствительности (по параметрам) [2] для исходной идентифицируемой модели (1.1), заметим, что обычно вместо параметров τ_i рассматривают параметры

$$\mu_i = \ln \tau_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

Переход с помощью (3.3) к логарифмической шкале постоянных времени оправдан с метрологической точки зрения: необходимо стремиться к равноточному оцениванию именно порядков μ_i постоянных времени τ_i , а не их самих. С учетом (3.3) модель чувствительности для (1.1) имеет вид

$$\Delta x(s) = \Delta \alpha_0 u(s) + \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i \frac{1}{1+s\tau_i} u(s) + \sum_{i=1}^n \Delta \mu_i \frac{-\alpha_i \tau_i s}{(1+s\tau_i)^2} u(s)$$

или в векторной форме

$$\Delta x[j] = \Delta^T y[j] \quad (3.4)$$

$$\Delta = (\Delta \alpha_0, \Delta \alpha_1, \dots, \Delta \alpha_n, \Delta \mu_1, \dots, \Delta \mu_n)^T, \quad y = (y_1, \dots, y_{2n+1})^T$$

и в соответствии с (3.1), (3.2):

$$y_1[j] = u[j], \quad y_{i+1}[j] = v_i[j], \quad y_{n+i+1}[j] = -\alpha_i(v_i[j] - v_{n+i}[j])$$

$$v_i[j] = \gamma_i(\Delta t[j])(v_i[j-1] + (u[j-1] - v[j])/T - v[j]) + v[j], \quad v_i[0] = 0$$

$$v_{n+i}[j] = \gamma_i(\Delta t[j]) \left(v_{n+i}[j-1] + \frac{1}{\tau_i} (v_i[j-1]) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tau_i} u[j-1] - \left(1 + \frac{1}{\tau_i} \right) v[j] - \tau_i v[j] \right), \quad v_{n+i}[0] = 0 \quad (3.5) \\ i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, N$$

Объединив переменные $u[j]$, $v_i[j]$, $v_{n+i}[j]$ в вектор $\varphi[j]$ размерности $2n+1$, систему рекуррентных соотношений (3.2), (3.5) запишем в компактной форме дискретного управляемого уравнения состояния

$$\varphi[j] = F(\varphi[j-1], v[j], \Delta t[j]), \quad \varphi[0] = 0 \quad (3.6)$$

с двумя скалярными управлениями $v = \{v[j]\}_{j=1}^N$ и $\Delta t = \{\Delta t[j]\}_{j=1}^N$, для которых примем следующие естественные ограничения

$$v^- \leq v[j] \leq v^+, \quad \Delta t^- \leq \Delta t[j] \quad \forall j=1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

Первое из ограничений (3.7) связано, во-первых, с ограниченными техническими возможностями экспериментальной установки и, во-вторых, с областью допустимых напряжений (деформаций) материала, для которой линейная (в смысле вход-выход) модель (1.1) достаточно точно описывает деформационные свойства материала. Величина Δt^- во втором из ограничений (3.7) определяется максимально возможным быстродействием цифровых измерительных, а также вычислительных (в случае обработки данных в масштабе реального времени) средств.

Два основных функционала, участвующих в различных постановках задачи оптимизации эксперимента, имеют вид

$$I_1(v, \Delta t) = \sum_{j=1}^N \Delta t[j] \quad (3.8)$$

$$I_2(v, \Delta t) = f(M_*(y)) \quad (3.9)$$

Здесь $y = \{y[j]\}_{j=1}^N$, $f(M_*)$ — непрерывная непрерывно дифференцируемая по всем элементам матрицы M_* функция

$$M_* = M_*^0 + \sum_{j=1}^N \rho_0[j] y[j] y^T[j]$$

где $\rho_0[j]$ — положительные весовые коэффициенты, при статистической интерпретации задачи обратно пропорциональные дисперсии измерений $x[j]$. При этом матрица M_* , называемая обычно информационной, обратна дисперсионной матрице оценки вектора параметров модели (1.1) (или оценки вектора Λ модели) (3.4). Начальное значение M_*^0 матрицы M_* взаимно однозначно связано с дисперсионной матрицей D_0 априорной оценки e_0 вектора параметров с модели (1.2) [4]. В качестве функции f в (3.9), определяющей меру погрешности оценивания параметров модели (1.1) (или степень обусловленности задачи идентификации), чаще всего выбирают определитель одного из главных миноров матрицы M_*^{-1} (обобщенную дисперсию) [4]. Минор выбирается в зависимости от подмножества параметров модели (1.1), точность оценивания которых хотят сделать максимальной или заданной в оптимизируемом эксперименте. Функции f другого типа рассматривались в [5].

Основные задачи оптимизации эксперимента могут быть сформулированы как задачи минимизации одного из функционалов $I_i(v, \Delta t)$ ($i=1, 2$)

при ограничении сверху на другой из них и заданном N . В одной из этих задач минимизируется мера погрешности оценивания некоторой совокупности параметров модели при ограниченном времени проведения эксперимента, в другой — минимизируется время эксперимента при заданной мере погрешности оценивания. Задачи, в которых число измерений N не фиксируется, а минимизируется или ограничивается, решаются путем итерирования решений одной из двух сформулированных основных задач. Во всех задачах в качестве оптимизируемых переменных могут рассматриваться либо обе последовательности v , Δt , либо одна из них (другая при этом задается).

Для определения модели чувствительности (3.4) и всех связанных с ней соотношений требуются точные значения параметров модели (1.1). Естественно при решении задач оптимизации эксперимента в качестве значений этих параметров брать их априорные оценки. Чем точнее эти оценки, тем ближе к оптимальному будет спланированный эксперимент. Как обычно, в случаях значительного несовпадения априорных и апостериорных оценок рекомендуется новое планирование и проведение эксперимента (процедура последовательного планирования) [4].

4. Алгоритмы оптимизации экспериментов. В соответствии с вышеизложенным основные задачи оптимизации эксперимента ставятся как задача

$$J_0(v, \Delta t) \rightarrow \min_{v, \Delta t}, \quad J_1(v, \Delta t) \leq J_{1*} \quad (4.1)$$

$$v^- \leq v[j] \leq v^+, \quad \Delta t^- \leq \Delta t[j] \leq \Delta t^+ \quad \forall j$$

где J_0 и J_1 — один и соответственно другой из функционалов (3.8), (3.9), J_{1*} — предельно допустимое значение функционала J_1 .

Решение задачи (4.1) методом последовательных приближений [6] (на базе аппроксимирующего линейного программирования [7, 8]) сводится к ряду итераций, на каждой из которых решается относительно приращений $\delta v[j]$, $\delta \Delta t[j]$; $j=1, 2, \dots, N$; следующая задача линейного программирования

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial J_0}{\partial v[j]} \delta v[j] + \frac{\partial J_0}{\partial \Delta t[j]} \delta \Delta t[j] \right] \rightarrow \min_{\delta v, \delta \Delta t} \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial J_1}{\partial v[j]} \delta v[j] + \frac{\partial J_1}{\partial \Delta t[j]} \delta \Delta t[j] \right] \leq J_{1*} - J_1(v, \Delta t)$$

$$v_i^- - v[j] \leq \delta v[j] \leq v_i^+ - v[j], \quad \Delta t^- - \Delta t[j] \leq \delta \Delta t[j]$$

Одним из наиболее простых и эффективных способов решения задачи (4.2) может служить метод деления вилки [6]. При этом вычисление производных $\partial J_m / \partial v[j]$, $\partial J_m / \partial \Delta t[j]$ ($m=0, 1$) может быть выполнено в соответствии со следующей леммой [8, 9].

Лемма. Пусть $J(w) = G(\{\varphi[j]\}_{j=1}^N, \{w[j]\}_{j=1}^N)$ — функционал, определенный с помощью функции G , заданной на элементах $w[j]$ и $\varphi[j]$ соответственно скалярной и векторной последовательностей $\{w[j]\}_{j=1}^N$ и $\{\varphi[j]\}_{j=1}^N$. Причем векторы $\varphi[j]$ связаны рекуррентным соотношением $\varphi[j] = F(\varphi[j-1], w[j])$, $\varphi[0] = \varphi_0$; $j=1, 2, \dots, N$; а скалярная и векторная функции G и F непрерывны вместе со своими первыми производными по всем своим аргументам. Тогда

$$\partial J / \partial w[j] = \partial F \varphi[j] / \partial w[j] + \partial G / \partial w[j]$$

где векторы сопряженных к $\varphi[j]$ переменных $\psi[j]$ вычисляются последовательно от $j=N$ до $j=1$ с помощью рекуррентных соотношений $\psi[j] = -\partial F \psi[j+1] / \partial \varphi[j] + \partial G / \partial \varphi[j]$, $\psi[N] = \partial G / \partial \varphi[N]$, $j=N-1, N-2, \dots, 1$, $\partial F / \partial \varphi[j]$ — квадратные матрицы, а $\partial G / \partial \varphi[j]$ — векторы размерности векторов $\varphi[j]$; $j=1, 2, \dots, N$.

Одним из важных следствий леммы, связанным с линейностью по $v[j]$ правой части соотношения (3.6), является следующий факт: во всех приведенных постановках задач оптимального управления экспериментом оптимальная последовательность v состоит из значений $v[j]$, принимающих лишь одно из двух крайних значений — v^- или v^+ . Этот факт существенно упрощает конструкцию генератора тестирующих процессов. В случаях более сложного, чем (3.1), описания привода экспериментальной установки лишь несколько усложняется соотношение (3.2) и, следовательно, включающая его система (3.6), что не влечет за собой никаких принципиальных изменений рассмотренного метода оптимизации.

Автор благодарит И. И. Воровича за внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
2. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
3. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974. 246 с.
4. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.
5. Исаев К. В. О некоторых информационных аспектах экспериментального определения вязкоупругих характеристик полимерных материалов // Механика композит. материалов. 1982. № 6. С. 977–982.
6. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
7. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
8. Исаев К. В. Об оптимальном управлении дискретно-непрерывными системами // Кибернетика и вычисл. техника. Киев: Наук. думка, 1988. № 79. № 45–51.
9. Исаев К. В. Об оптимальном тестировании одного класса динамических объектов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 2. С. 176–180.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
23.VIII.1990