

УДК 539.374

© 1991 г.

Л. П. ИСУПОВ

ВАРИАНТ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧНОСТИ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ

Широко изучаемый в настоящее время эффект электропластичности [1-3] определяется влиянием импульсного электротока на пластические свойства проводящих материалов. Установлено, что воздействие импульсом с плотностью тока $\approx 10^9$ А/м² и длительностью $\approx 10^{-4} - 10^{-1}$ с приводит к существенному снижению сопротивления пластическому деформированию и увеличению предельной пластической деформации. Систематические исследования эффекта электропластичности в одномерных экспериментах показали [4], что для импульсов с длительностью менее некоторого характерного времени τ_* определяющими параметрами являются удельная энергия E и величина накопленной предварительной пластической деформации ε^0 . Максимальный эффект наблюдался для $E \sim 10^9$ Дж/м³ и возрастал с увеличением предварительной деформации ε^0 .

В [4-6] предложены определяющие уравнения, позволяющие описать основные эффекты, наблюдаемые в одномерных экспериментах. При анализе сложного напряженного состояний необходимо учитывать анизотропию электропластического эффекта, которая неизбежно возникает в силу направленного действия электротока на предварительно деформированный материал. В публикуемой работе в рамках теории течения получены определяющие уравнения для раздельного действия тока и механического нагружения. Исследован случай плоского напряженного состояния и рассмотрены некоторые эффекты анизотропии, которые легко могут быть получены в простейших экспериментах на растяжение и кручение трубчатого образца.

1. В качестве основных параметров, определяющих действие импульсного электротока на пластические свойства материала, примем тензор предварительных пластических деформаций ε_{ij}^0 и вектор q_i , совпадающий по направлению с вектором плотности тока j_i и определяющий удельную энергию импульса E :

$$E = q_i q_i = \rho \int_0^{\Delta t} j_m(\tau) j_m(\tau) d\tau$$

Здесь ρ — проводимость изотропного материала, Δt — длительность импульса. В случае $j_m = \text{const}$ можно принять $q_m = (\rho \Delta t)^{1/2} j_m$.

При некоторой оптимальной энергии и длительности импульса эффективность действия тока пропорциональна величине накопленной предварительной пластической деформации [4]. Это позволяет использовать в качестве параметра анизотропии тензор второго ранга λ_{ij} , линейно зависящий от ε_{ij}^0 и квадратично — от вектора q_i :

$$\lambda_{ij} = 1/2 (\varepsilon_{im}^0 q_m q_j + \varepsilon_{jm}^0 q_m q_i) \quad (1.1)$$

Представим уравнение поверхности нагружения в виде

$$f(\sigma_{ij}, \lambda_{ij}, \chi) = 0 \quad (1.2)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, χ — скалярный параметр упрочнения. В этом случае пренебрегаем обычной деформационной анизотропией, не

включив в число аргументов функции нагружения (1.2) тензор пластических деформаций ε_{ij}^p .

Изотропная тензорная функция (1.2) в общем случае должна зависеть от полной системы совместных инвариантов тензоров σ_{ij} и λ_{ij} [7, 8]. Целый рациональный базис системы полиномиальных инвариантов для двух симметричных тензоров второго ранга включает следующие десять инвариантов [7]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii}, & I_2 &= \sigma_{ij}\sigma_{ij}, & I_3 &= \sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{ji} \\ J_1 &= \lambda_{ii}, & J_2 &= \lambda_{ij}\lambda_{ij}, & J_3 &= \lambda_{im}\lambda_{mj}\lambda_{ji} \\ K_1 &= \lambda_{ij}\sigma_{ij}, & K_2 &= 1/2(\sigma_{im}\lambda_{mj}\lambda_{ji} + \lambda_{im}\lambda_{mj}\sigma_{ji}) \\ K_3 &= 1/2(\lambda_{im}\sigma_{mj}\sigma_{ji} + \sigma_{im}\sigma_{mj}\lambda_{ji}) \\ K_4 &= 1/2(\lambda_{im}\lambda_{mj}\sigma_{jn}\sigma_{ni} + \sigma_{im}\sigma_{mj}\lambda_{jn}\lambda_{ni}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В качестве аргументов функции (1.2) достаточно использовать только функционально независимые инварианты [8, 9], которых среди (1.3) не более девяти. Покажем, что в качестве функционально независимых можно выбрать $I_1, I_2, J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3, K_4$. Для этого запишем эти инварианты в главной системе координат тензора λ_{ij} и рассмотрим условия их однозначной функциональной зависимости от компонент $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и σ_{ij} . Вычислив соответствующий якобиан преобразования D , получим $D = -48(\lambda_1 - \lambda_2)^3(\lambda_2 - \lambda_3)^3(\lambda_3 - \lambda_1)^3\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}$.

В случае различных главных значений λ_i определитель $D \neq 0$, если $\sigma_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, т. е. главные оси тензоров λ_{ij} и σ_{ij} не совпадают. Если тензоры λ_{ij} и σ_{ij} соосны, то число независимых инвариантов меньше девяти.

Уравнение поверхности нагружения, таким образом, может быть представлено в виде

$$f(I_1, I_2, J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3, K_4, \chi) = 0 \quad (1.4)$$

Ассоциированный закон пластичности на основе (1.4), (1.3) дает

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= d\lambda \left[\frac{\partial f}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial f}{\partial I_2} \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial K_1} \lambda_{ij} + \frac{\partial f}{\partial K_2} \Lambda_{ij} + \frac{\partial f}{\partial K_3} (\lambda_{im}\sigma_{mj} + \sigma_{im}\lambda_{mj}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial K_4} (\Lambda_{im}\sigma_{mj} + \sigma_{im}\Lambda_{mj}) \right] \\ \Lambda_{ij} &= 1/2(\lambda_{im}\lambda_{mj} + \lambda_{jm}\lambda_{mi}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Нетрудно показать, что тензоры, входящие в правую часть (1.5), являются линейно независимыми. Следовательно, тензорно линейные по напряжениям соотношения (1.5) представляют собой общий вид зависимости приращений пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$ как тензорной функции от σ_{ij} и λ_{ij} [9]. Условие пластической несжимаемости $d\varepsilon_{ii}^p = 0$ приводит к уравнению

$$3 \frac{\partial f}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial f}{\partial I_2} I_1 + \frac{\partial f}{\partial K_1} J_1 + \frac{\partial f}{\partial K_2} J_2 + 2 \frac{\partial f}{\partial K_3} K_1 + 2 \frac{\partial f}{\partial K_4} K_2 = 0$$

которое должно быть выполнено для любых тензоров σ_{ij} и λ_{ij} , удовлетворяющих (1.4).

2. Рассмотрим квадратичную по напряжениям функцию нагружения, что широко используется в теории пластичности [10, 11]. Используя выражения для инвариантов (1.3), получим для поверхности нагружения (1.4) следующее представление:

$$\begin{aligned} 1/2(c_1 I_1^2 + c_2 I_2 + 2c_3 I_1 K_1 + c_4 K_1^2 + c_5 K_3 + \\ + 2c_6 I_1 K_2 + c_7 K_4 + 2c_8 K_1 K_2 + c_9 K_2^2) = k^2(\chi) \\ c_i = c_i(J_1, J_2, J_3). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Закон пластичности (1.5) можем переписать:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda [A_1 \delta_{ij} + A_2 \sigma_{ij} + A_3 \lambda_{ij} + A_4 \Lambda_{ij} + A_5 (\sigma_{im} \lambda_{mj} + \lambda_{im} \sigma_{mj}) + A_6 (\sigma_{im} \Lambda_{mj} + \Lambda_{im} \sigma_{mj})] \quad (2.2)$$

$$A_1 = c_1 I_1 + c_3 K_1 + c_6 K_2, \quad A_2 = c_2, \quad A_3 = c_3 I_1 + c_4 K_1 + c_8 K_2$$

$$A_4 = c_6 I_1 + c_8 K_1 + c_9 K_2, \quad A_5 = c_5/2, \quad A_6 = c_7/2$$

Уравнение поверхности нагружения (2.1) можно записать в тензорном виде, используя тензор предельности H_{ijmn} [11]:

$$1/2 H_{ijmn} (\lambda_{pq}) \sigma_{ij} \sigma_{mn} = k^2 (\chi) \quad (2.3)$$

Тензор H_{ijmn} необходимо рассматривать как ортотропную тензорную функцию симметричного тензора второго ранга λ_{pq} , общее представление которой известно [9] и содержит девять коэффициентов:

$$H_{ijmn} = c_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + 1/2 c_2 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + c_3 (\delta_{ij} \lambda_{mn} + \delta_{mn} \lambda_{ij}) + c_4 \lambda_{ij} \lambda_{mn} +$$

$$+ 1/4 c_5 (\delta_{im} \lambda_{jn} + \delta_{in} \lambda_{jm} + \delta_{jm} \lambda_{in} + \delta_{jn} \lambda_{im}) + c_6 (\delta_{ij} \Lambda_{mn} + \delta_{mn} \Lambda_{ij}) + 1/4 c_7 (\delta_{im} \Lambda_{jn} +$$

$$+ \delta_{in} \Lambda_{jm} + \delta_{jm} \Lambda_{in} + \delta_{jn} \Lambda_{im}) + c_8 (\lambda_{ij} \Lambda_{mn} + \lambda_{mn} \Lambda_{ij}) + c_9 \Lambda_{ij} \Lambda_{mn} \quad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.3) приводит в точности к выражению (2.1), а закон пластичности (2.2) приобретает компактную форму

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda H_{ijmn} \sigma_{mn} \quad (2.5)$$

Условие пластической несжимаемости $H_{ijmn} \sigma_{mn} \delta_{ij} = 0$ должно быть выполнено для любого тензора напряжений σ_{mn} , что приводит к системе уравнений $H_{ijmn} \delta_{ij} = 0$. Это накладывает определенные ограничения на функции c_i , которые могут быть выбраны в виде

$$3c_1 + c_2 = 0, \quad c_3 = c_6 = c_8 = 0$$

$$c_5 + J_1 c_4 = 0, \quad c_7 + J_2 c_9 = 0 \quad (2.6)$$

Введем обозначения: $c_2 = a_0 (J_1, J_2, J_3)$, $c_4/a_0 = a_1 (J_1, J_2, J_3)$, $c_9/a_0 = a_2 (J_1, J_2, J_3)$.

Выражение (2.4) в результате существенно упрощается

$$H_{ijmn} = a_0 [1/2 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) - 1/3 \delta_{ij} \delta_{mn} + a_1 (\lambda_{ij} \lambda_{mn} - 1/4 J_1 (\delta_{im} \lambda_{jn} + \delta_{in} \lambda_{jm} + \delta_{jm} \lambda_{in} + \delta_{jn} \lambda_{im})) + a_2 (\Lambda_{ij} \Lambda_{mn} - 1/4 J_2 (\delta_{im} \Lambda_{jn} + \delta_{in} \Lambda_{jm} + \delta_{jm} \Lambda_{in} + \delta_{jn} \Lambda_{im}))] \quad (2.7)$$

что для уравнения поверхности нагружения (2.3) дает

$$1/2 a_0 [S_2 + a_1 (K_1^2 - J_1 K_3) + a_2 (K_2^2 - J_2 K_4)] = k^2 (\chi) \quad (2.8)$$

где S_2 — второй инвариант девиатора напряжений. Для закона пластичности (2.5) получим

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda a_0 [s_{ij} + a_1 (K_1 \lambda_{ij} - 1/2 J_1 (\sigma_{im} \lambda_{mj} + \lambda_{im} \sigma_{mj})) + a_2 (K_2 \Lambda_{ij} - 1/2 J_2 (\sigma_{im} \Lambda_{mj} + \Lambda_{im} \sigma_{mj}))] \quad (2.9)$$

Коэффициент $d\lambda > 0$ и может быть определен после задания параметра упрочнения χ из условия непрерывности изменения поверхности нагружения в процессе пластического деформирования

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = 0 \quad (2.10)$$

Приняв в качестве χ параметр Одквиста $d\chi = (2d\varepsilon_{ij}p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$, после подстановки в (2.10) с учетом (2.5) получим

$$d\lambda = \frac{H_{ijmn}\sigma_{ij}d\sigma_{mn}}{2kk'(2\sigma_{ij}H_{ijpq}H_{pqmn}\sigma_{mn})^{1/2}}, \quad k' = \frac{dk}{d\chi}$$

Если за меру упрочнения принята работа пластического деформирования $d\chi = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$, то из (2.5) и (2.10) следует $d\lambda = \frac{1}{4}H_{ijmn}\sigma_{ij}d\sigma_{mn}/k^3k'$.

При отсутствии импульсного воздействия электротока $q_i = 0$, $\lambda_{ij} = 0$ (2.8), (2.9) переходят в обычные уравнения теории изотропного упрочнения. В полученных соотношениях возможен учет трансляционного упрочнения, если заменить в них тензор напряжений σ_{ij} на тензор активных напряжений $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - \alpha_{ij}$ и задать закон изменения α_{ij} .

3. Рассмотрим простейший вариант предложенных соотношений. Предположим, что коэффициенты в (2.1), (2.4) зависят только от первого инварианта тензора λ_{ij} , т. е. $c_i = c_i(J_1)$. Тогда из (2.6) сразу следует $c_7 = c_9 = 0$, $a_2 = 0$ и для уравнения поверхности нагружения (2.8) получим

$${}^{1/2}a_0(J_1)[S_2 + a_1(J_1)(K_1^2 - J_1K_3)] = k^2(\chi) \quad (3.1)$$

Наиболее наглядное представление уравнение (3.1) имеет в главной системе координат тензора λ_{ij} . Вычислив соответствующие инварианты, после несложных преобразований найдем

$${}^{1/2}[H_1(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + H_2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H_3(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H_4\tau_{12}^2 + H_5\tau_{13}^2 + H_6\tau_{23}^2] = k^2/a_0 \quad (3.2)$$

$$H_1 = (1 - 3a_1\lambda_1\lambda_2)/3, \quad H_2 = (1 - 3a_1\lambda_2\lambda_3)/3$$

$$H_3 = (1 - 3a_1\lambda_1\lambda_3)/3, \quad H_4 = 2 - a_1J_1(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$H_5 = 2 - a_1J_1(\lambda_1 + \lambda_3), \quad H_6 = 2 - a_1J_1(\lambda_2 + \lambda_3)$$

где λ_i — главные значения тензора λ_{ij} . Соотношения (3.2) есть ничто иное, как квадратичный критерий Хилла для несжимаемой ортотропной среды [10], коэффициенты которого определены специальным образом.

В случае плоского напряженного состояния $\sigma_{3i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, предварительная пластическая деформация $\varepsilon_{3m}^0 = 0$, $m = 1, 2$. Если вектор тока направлен в плоскости так, что $q_3 = 0$, то $\lambda_{3i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) и для критерия пластичности в произвольной системе координат получим ($a_* = 3a_1/2$):

$$(1 - a_*\lambda_{11}\lambda_{22})(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) - (1 - 2a_*\lambda_{11}\lambda_{22})\sigma_{11}\sigma_{22} + (3 + a_*(4\lambda_{12}^2 - (\lambda_{11} + \lambda_{22})^2)) \times \\ \times \tau_{12}^2 + 2a_*\lambda_{12}(\lambda_{11} - \lambda_{22})\tau_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 3k^2/a_0 \quad (3.3)$$

4. Рассмотрим некоторые особенности импульсного воздействия электротока на пластическое деформирование и возможности определения материальных функций в экспериментах по растяжению и кручению тонкостенного трубчатого образца. Будем считать, что ось 1 направлена вдоль оси образца, а ось 2 — по касательной к окружности его сечения. В этом случае $\sigma_{22} = 0$. Обозначив $\sigma_{11} = \sigma$, $\tau_{12} = \tau$, получим на основе (3.3):

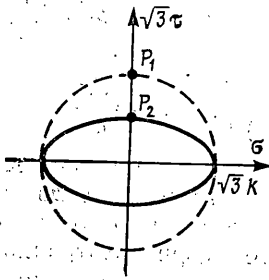
$$(1 - a_*\lambda_{11}\lambda_{22})\sigma^2 + (3 + 4a_*\lambda_{12}^2 - a_*(\lambda_{11} + \lambda_{22})^2)\tau^2 + 2\tau a_*\lambda_{12}(\lambda_{11} - \lambda_{22}) = 3k^2/a_0 \quad (4.1)$$

Примем следующие гипотезы о виде функций $a_*(J_1)$ и $a_0(J_1)$:

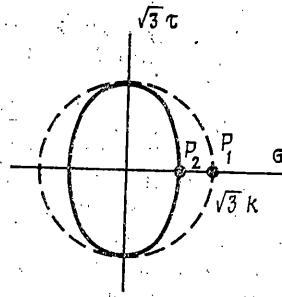
$$a_*(J_1) = A_1 = \text{const}, \quad a_0(J_1) = 1/(1 - A_2J_1^2)$$

Для определения констант A_1 и A_2 требуется два независимых эксперимента. При действии импульса тока вдоль оси образца с предварительным кручением $q_1 = q$, $q_2 = q_3 = 0$, $\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 = 0$ и $2\varepsilon_{12}^0 = \gamma$. Используя (4.1), получим $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$, $J_1 = 0$, $\lambda_{12} = \gamma q^2/4 = \gamma E/4$, что для (4.1) даёт

$$\sigma^2 + 3\tau^2(1 + A_1\gamma^2 E^2/12) = 3k^2 \quad (4.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 показана поверхность нагружения (4.2) и ее положение до воздействия импульса тока (пунктирная кривая). Константа A_1 легко находится по экспериментально определенным точкам P_1 и P_2 .

При действии импульса тока вдоль оси образца с предварительным растяжением $q_1=q$, $q_2=q_3=0$, $\varepsilon_{11}^0=\varepsilon$, $\varepsilon_{12}^0=0$, $\lambda_{11}=J_1=\varepsilon q^2=\varepsilon E$, $\lambda_{12}=\lambda_{22}=0$ и для критерия пластичности имеем

$$\frac{\sigma^2}{(1-A_2 J_1^2)} + 3\tau^2 \frac{(1-A_1 J_1^2/3)}{(1-A_2 J_1^2)} = 3k^2 \quad (4.3)$$

Константа A_2 может быть определена из эксперимента на одноосное растяжение при $\tau=0$.

Данные опытных исследований показывают, что действие тока после предварительного растяжения слабо влияет на сдвиговые характеристики среды и наоборот. Чтобы это было выполнено, необходимо положить в (4.3) $A_2=A_1/3=A$:

$$\sigma^2 + 3\tau^2(1-AJ_1^2) = 3k^2(1-AJ_1^2) \quad (4.4)$$

В таком случае остается только одна определяемая экспериментально константа A . Поверхность нагружения (4.4) показана на фиг. 2.

Представляет интерес характер возникающей пластической анизотропии в зависимости от направления действия тока. Рассмотрим вектор тока, направление которого может изменяться в плоскости: $q_1=q \cos \alpha$, $q_2=q \sin \alpha$, $q_3=0$, $q^2=E$.

В случае предварительного кручения $2\varepsilon_{12}^0=\gamma$, $\varepsilon_{11}^0=\varepsilon_{22}^0=0$, $\lambda_{11}=\lambda_{22}=\gamma E \sin 2\alpha/4$, $J_1=\gamma E \sin 2\alpha/2$, $\lambda_{12}=\gamma E/4$. Подставив эти соотношения в (4.1), с учетом выбранного вида функций a_0 и a_* получим для пределов упругости при растяжении σ_s и при сдвиге τ_s :

$$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}k} = \left(\frac{16-4A\gamma^2 E^2 \sin^2 2\alpha}{16-3A\gamma^2 E^2 \sin^2 2\alpha} \right)^{1/2}$$

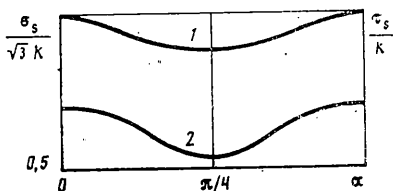
$$\frac{\tau_s}{k} = \left(\frac{4-A\gamma^2 E^2 \sin^2 2\alpha}{4+A\gamma^2 E^2 (1-\sin^2 2\alpha)} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Общий вид зависимостей (4.5) показан на фиг. 3. Кривая 1 соответствует σ_s , кривая 2 — τ_s .

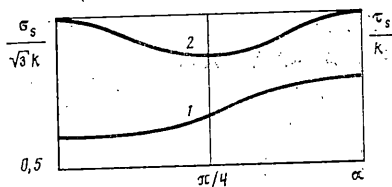
При задании предварительного пластического растяжения $\varepsilon_{11}^0=\varepsilon$, $\varepsilon_{22}^0=\varepsilon_{33}^0=-\varepsilon/2$, $\varepsilon_{12}^0=0$, $\lambda_{11}=\varepsilon E \cos^2 \alpha$, $\lambda_{22}=-\varepsilon E \sin^2 \alpha/2$, $\lambda_{12}=\varepsilon E \sin 2\alpha/8$, что для σ_s и τ_s дает

$$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}k} = \left(\frac{16-A\varepsilon^2 E^2 (1+3 \cos 2\alpha)^2}{16+6A\varepsilon^2 E^2 \sin^2 2\alpha} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\tau_s}{k} = \left(\frac{16-A\varepsilon^2 E^2 (1+3 \cos 2\alpha)^2}{16+A\varepsilon^2 E^2 (\sin^2 2\alpha - (1+3 \cos 2\alpha)^2)} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Качественный вид функций (4.6) показан на фиг. 4. Кривая 1 соответствует σ_s , кривая 2 — τ_s .

Приведенные результаты показывают, что эффект электропластичности может существенно зависеть от характера предварительной пластической деформации и направления вектора тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Троицкий О. А., Розно А. Г. Электропластический эффект в металлах // ФТТ. 1970. Т. 12. № 1. С. 203—210.
2. Спицын В. И., Троицкий О. А. Электропластическая деформация металлов. М.: Наука, 1985. 159 с.
3. Климов К. М., Новиков И. И. Действие импульсов электрического тока на процесс растяжения тонких металлических проволок // Изв. АН СССР. Металлы. 1983. № 3. С. 155—158.
4. Беклемишев Н. Н., Шапиро Г. С. О законе деформирования и критерии разрушения пластического проводящего материала с учетом воздействия импульса электромагнитного поля // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 41—51.
5. Беклемишев Н. Н., Веденяпин Е. Н., Шапиро Г. С. О законе деформирования проводящих материалов при действии импульсного электрического тока // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 151—155.
6. Беклемишев Н. Н., Веденяпин Е. Н., Шапиро Г. С. О законе деформирования проводящих материалов при действии электрического тока высокой плотности // Пробл. прочности. 1984. № 1. С. 106—109.
7. Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
8. Победра Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
9. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393—417.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. Рылевский Я. К. Разложение упругой энергии и критерии предельности // Успехи механики. 1984. Т. 7. № 3. С. 51—80.

Москва

Поступила в редакцию
17.IX.1990