

УДК 539.214; 539.374

© 1991 г.

Е. В. ЛОМАКИН

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ДИЛАТИРУЮЩИХ СРЕД

При исследовании механического поведения многих материалов обнаруживается зависимость процессов сдвигового и объемного деформирования. Наиболее заметно этот эффект проявляется у материалов, содержащих различного рода дефекты, поры, трещины. Одним из представителей данного класса сред является земная кора и содержащиеся в ней породы [1, 2]. Основные свойства этих материалов, отличающие их от тех, для которых справедливы гипотезы классических теорий деформирования, заключаются в отсутствие «единой кривой» для зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций, что является проявлением зависимости механических свойств от вида напряженного состояния. В условиях сдвига может происходить объемное деформирование материала. Отсутствует единая зависимость между средним напряжением и объемной деформацией. При этом в условиях действия сжимающих напряжений возможно объемное расширение материала, так что среднее напряжение и объемная деформация могут иметь разные знаки, хотя при равномерном трехосном сжатии для большинства материалов наблюдается близкая к линейной зависимость объемной деформации от среднего напряжения. Некоторые из этих эффектов проявляются также при исследовании свойств конструкционных графитов, чугуна, бетона, полимерных и композитных материалов и др. [3–6].

В работе рассмотрены определяющие соотношения, позволяющие описать наблюдаемые явления, и определены накладываемые на материальные функции ограничения, обеспечивающие выполнение основных энергетических условий, единственность решения краевых задач и др.

1. Уравнения связи между напряжениями и деформациями для рассматриваемого класса сред можно построить на основе подходов нелинейной теории упругости. Модели упругого поведения материалов предполагают потенциальность соотношений между напряжениями и деформациями. При этом общая форма потенциала для изотропного тела имеет вид

$$\Phi = \Phi(\sigma_0, \xi, \theta) \quad (1.1)$$

где $\sigma_0 = \sqrt{3/2} S_{ij} S_{ij}$ — интенсивность напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ — девиатор напряжений, $\sigma = 1/3 \sigma_{ii}$ — среднее напряжение. Параметр ξ представляет отношение среднего напряжения к интенсивности напряжений, $\xi = \sigma/\sigma_0$. Угол θ определяется соотношением $\cos 3\theta = 1/2 (S_{III}/\sigma_0^3)$, где $S_{III} = S_{ih} S_{hj} S_{ij}$ — третий инвариант девиатора напряжений.

В выражение (1.1) по сути дела входит один инвариант, определяющий интенсивность или уровень напряженного состояния, и два параметра, характеризующие вид напряженного состояния или соотношение между главными компонентами тензора напряжений. Физический смысл и значение каждого параметра при построении определяющих уравнений достаточно подробно рассмотрены в [7, 8]. Отметим только, что параметр ξ характеризует в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями и определяет в среднем вид напряженного состояния. При этом угол θ является параметром вида девиатора напряжений и определяет отклонения от этого среднего значения. Как свидетельствуют экспе-

риментальные данные, для многих материалов обнаруживается более сильная зависимость механических свойств от параметра ξ по сравнению с влиянием θ [7, 9] и для широкого класса материалов при построении определяющих уравнений можно использовать один параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$.

При построении определяющих уравнений для нелинейного упругого тела, деформационные характеристики которого зависят от вида напряженного состояния, исходим из следующих принципов.

Выражение для потенциала должно включать в себя как частный случай потенциал для классического линейно упругого тела. Вид напряженного состояния характеризуется в среднем, т. е. определяется параметром $\xi = \sigma/\sigma_0$.

Из выражения потенциала как частного случая должны следовать соотношения для классического нелинейно упругого тела с линейно упругим изменением объема.

Этим требованиям можно удовлетворить, представив потенциал в виде

$$\Phi = 1/2 (A + B\xi^2) \sigma_0^2 + [1 + \kappa(\xi)] g(\sigma_0) \quad (1.2)$$

Первое слагаемое представляет собой потенциал для классического линейно упругого тела

$$\Phi_0 = 1/2 (A + B\xi^2) \sigma_0^2$$

где $A = 1/2(1 + \nu)/E$, $B = 3(1 - 2\nu)/E$. В случае потенциала, представляемого выражением (1.2), соотношения между напряжениями и деформациями имеют следующий вид [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \left\{ A - \kappa'(\xi) \xi \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} + [1 + \kappa(\xi)] \frac{g'(\sigma_0)}{\sigma_0} \right\} S_{ij} + \\ + \frac{1}{3} \left[B + \frac{\kappa'(\xi)}{\xi} \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} \right] \sigma \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по параметру ξ . Из (1.3) можно получить выражения для интенсивности деформаций и объемной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = A\sigma_0 - \kappa'(\xi) \xi g(\sigma_0)/\sigma_0 + [1 + \kappa(\xi)] g'(\sigma_0) \\ \varepsilon = B\sigma + \kappa'(\xi) g(\sigma_0)/\sigma_0, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{2/3} e_{ij} e_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Соотношения (1.4) определяют нелинейную зависимость интенсивности деформаций и объемной деформации от интенсивности напряжений и среднего напряжения: $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma_0, \sigma)$, $\varepsilon = \varepsilon(\sigma_0, \sigma)$. Такого типа соотношения предлагались в [10, 11], но при этом считалось, что при равенстве нулю среднего напряжения ($\sigma = 0$) объемная деформация также равна нулю ($\varepsilon = 0$) и они должны иметь одинаковые знаки ($\sigma/\varepsilon > 0$) [11]. Предложенная в [12, 13] теория нелинейного объемного деформирования керамик основана на предположении о независимости процессов сдвигового и объемного деформирования. В [14] при построении определяющих уравнений использовался параметр вида деформированного состояния ($\varepsilon/\varepsilon_0$) и предполагалась линейная зависимость объемной деформации от среднего напряжения с объемным модулем, зависящим от знака объемной деформации. Однако характер зависимостей (1.4) может быть таким, что при равенстве нулю среднего напряжения σ объемная деформация ε отлична от нуля и наоборот, если $\varepsilon = 0$, то $\sigma \neq 0$. Более того, среднее напряжение и объемная деформация могут иметь разные знаки, что зависит от вида функций $\kappa(\xi)$.

При $\kappa(\xi) \equiv 0$ из выражения (1.2) следует потенциал для нелинейно упругого тела, диаграммы зависимости интенсивности деформаций от интенсивности напряжений для которого инвариантны к изменению вида

напряженного состояния, а объемная деформация пропорциональна среднему напряжению.

Функция $g(\sigma_0)$ характеризует нелинейность обобщенных диаграмм деформирования. Соотношения (1.3), (1.4) существенно упрощаются, если принять степенную зависимость $g(\sigma_0) = k\sigma_0^n/n$, которая находит широкое практическое применение. Тогда зависимость (1.3) между деформациями и напряжениями можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}[A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]S_{ij} + \frac{1}{3}[B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma\delta_{ij} \\ \lambda(\xi) &= 1 + \kappa(\xi) - \kappa'(\xi)\xi/n, \quad \Lambda(\xi) = \kappa'(\xi)/(\xi n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Интенсивность деформации и объемная деформация при этом определяются выражениями

$$\varepsilon_0 = [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma_0, \quad \varepsilon = [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma \quad (1.6)$$

Функции $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ связаны соотношениями

$$\lambda + \xi^2\Lambda = 1 + \kappa, \quad \lambda' + \xi^2\Lambda' = (n-2)\xi\Lambda \quad (1.7)$$

Из выражений (1.6) следует соотношение между объемной деформацией, интенсивностью деформации, интенсивностью напряжения и средним напряжением

$$\varepsilon - B\sigma = [\Lambda(\xi)\xi/\lambda(\xi)](\varepsilon_0 - A\sigma_0)$$

Таким образом, при $\kappa(\xi) \neq \text{const}$ объемная деформация и интенсивность деформации не могут изменяться независимым образом.

Для произвольных видов напряженного состояния параметр ξ принимает значения от $-\infty$ (равномерное трехосное сжатие), до ∞ (равномерное трехосное растяжение). Требуется особое рассмотрение также случай чистого сдвига ($\xi = 0$). Для того чтобы конечным значениям напряжений соответствовали конечные значения деформаций, произведение $\lambda(\xi)\sigma_0^{n-1}$ и $\Lambda(\xi)\sigma_0^{n-2}$ должно быть ограничено. Рассматривая случай чистого сдвига, заключаем, что представление функции $\lambda(\xi)$ в виде ряда не должно содержать отрицательные степени ξ . В случае равномерного трехосного напряженного состояния конечность деформаций будет обеспечена, если функции $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ изменяются не быстрее, чем

$$\lambda(\xi) \rightarrow C_1\xi^{n-1}, \quad \Lambda(\xi) \rightarrow C_2\xi^{n-2} \quad (\xi \rightarrow \pm\infty) \quad (1.8)$$

Для большинства материалов в условиях равномерного трехосного сжатия наблюдается практически линейная зависимость между средним напряжением и объемной деформацией. Это условие выполняется при

$$\Lambda(\xi)\xi^{-(n-2)} \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow -\infty) \quad (1.9)$$

2. Потенциал (1.2) должен обеспечивать единственность решений краевых задач. Достаточным условием единственности решения является выпуклость потенциала, т. е. $\delta^2\Phi = (\partial^2\Phi/\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl} > 0$. Используя (1.3) и (1.7), а также соотношения

$$\frac{1}{2}S_{ij}\delta S_{ij} = \sigma_0\delta\sigma_0, \quad \sigma_0^2\delta\xi = \sigma_0\delta\sigma - \sigma\delta\sigma_0 \quad (2.1)$$

получим

$$\begin{aligned} \delta^2\Phi &= \frac{3}{2} \left\{ A - \kappa'(\xi)\xi \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} + [1 + \kappa(\xi)] \frac{g'(\sigma_0)}{\sigma_0} \right\} \delta S_{ij}\delta S_{ij} + \\ &+ \left\{ [1 + \kappa(\xi)] \left[g''(\sigma_0) - \frac{g'(\sigma_0)}{\sigma_0} \right] - \kappa'(\xi)\xi \left[\frac{g'(\sigma_0)}{\sigma_0} - 2 \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} \right] \right\} (\delta\sigma_0)^2 + \\ &+ 2 \left\{ \kappa'(\xi) \left[\frac{g'(\sigma_0)}{\sigma_0} - \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} \right] - \kappa''(\xi)\xi \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} \right\} \delta\sigma_0\delta\sigma + \end{aligned}$$

$$+ \left[B + \kappa''(\xi) \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} \right] (\delta\sigma)^2$$

Между δS_{ij} и $\delta\sigma_0$ существует нелинейная зависимость [15] $\frac{1}{2}\delta S_{ij}\delta S_{ij} = -\sigma\delta^2\sigma_0 + (\delta\sigma_0)^2 \geq (\delta\sigma_0)^2$. Воспользовавшись этой зависимостью, получим

$$\begin{aligned} \delta^2\Phi &\geq \frac{1}{f_1(\xi, \sigma_0)} [f_1(\xi, \sigma_0)\delta\sigma_0 + f_2(\xi, \sigma_0)\delta\sigma]^2 + \\ &+ \left[B + \kappa''(\xi) \frac{g(\sigma_0)}{\sigma_0^2} - \frac{f_2(\xi, \sigma_0)}{f_1(\xi, \sigma_0)} \right] (\delta\sigma)^2 \\ f_1(\xi, \sigma_0) &= A + [1 + \kappa(\xi)] g''(\sigma_0) - 2\kappa'(\xi)\xi [g(\sigma_0)/\sigma_0^2 - g'(\sigma_0)/\sigma_0] + \\ &+ \kappa''(\xi)\xi^2 g(\sigma_0)/\sigma_0^3 \\ f_2(\xi, \sigma_0) &= \kappa'(\xi) [g'(\sigma_0)/\sigma_0 - g(\sigma_0)/\sigma_0^2] - \kappa''(\xi)\xi g(\sigma_0)/\sigma_0^2 \end{aligned}$$

Если квадратичная форма в правой части неравенства положительно определена, то потенциал — выпуклая функция. Для этого достаточно выполнения условий

$$f_1(\xi, \sigma_0) > 0, \quad B + \kappa''(\xi) g(\sigma_0)/\sigma_0^2 - f_2(\xi, \sigma_0)/f_1(\xi, \sigma_0) > 0 \quad (2.2)$$

Условия (2.2) в случае степенной функции $g(\sigma_0)$ имеют вид

$$A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2} > 0 \quad (2.3)$$

$$B + [\Lambda(\xi) - \xi\Lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2} - \frac{[\lambda'(\xi)k\sigma_0^{n-2}]^2}{A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2}} > 0$$

К неравенствам (2.3) необходимо добавить условие того, что потенциал представляет собой положительно определенную функцию, а именно

$$\frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2 + [\lambda(\xi) + \xi^2\Lambda(\xi)] k\sigma_0^n/n > 0. \quad (2.4)$$

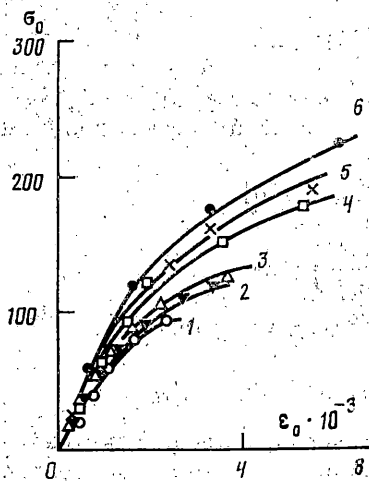
Условия (2.3), (2.4) обеспечивают единственность решения краевых задач.

3. Один из наиболее распространенных видов нагружения — это пропорциональное изменение внешних усилий или близкое к нему. Естественно возникает вопрос об условиях, накладываемых на материальные функции, при которых возможна реализация пропорционального нагружения в теле.

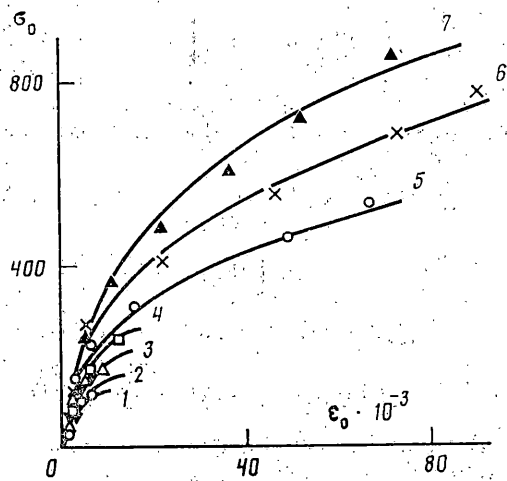
Предположим, что внешние объемные и поверхностные силы меняются пропорционально одному параметру β , т. е. $F_i = \beta F_i^0$, $T_i = \beta T_i^0$. Если положить $\sigma_{ij} = \beta\sigma_{ij}^0$, где β — постоянная для всех точек тела величина, то уравнения равновесия $\sigma_{ij,i} + F_i = 0$ и граничные условия $\sigma_{ijn} = T_i$ будут удовлетворены. При этом параметр ξ остается постоянным, $\xi = \xi^0$. Используя (1.3), получим следующие выражения для деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \beta\varepsilon_{ij}^{01} + \beta_1\varepsilon^{02}\delta_{ij} + \beta_2e_{ij}^{02} \quad (3.1) \\ \varepsilon_{ij}^{01} &= \frac{1}{3}B\sigma_0^0\delta_{ij} + \frac{1}{2}AS_{ij}^0, \quad \varepsilon^{02} = \varepsilon_{ij}^{02}\delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij}^{02} &= \frac{1}{3}\kappa'(\xi)g'(\sigma_0)\sigma_0^{-1}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\{-\kappa'(\xi)\xi g(\sigma_0)\sigma_0^{-1} + [1 + \kappa(\xi)]g'(\sigma_0)\sigma_0^{-1}\}S_{ij} \\ e_{ij}^{02} &= \varepsilon_{ij}^{02} - \frac{1}{3}\varepsilon^{02}\delta_{ij} \\ \beta_1 &= \beta^{-1} \frac{-\kappa'(\xi)\xi g(\beta\sigma_0^0) + [1 + \kappa(\xi)]g'(\beta\sigma_0^0)\sigma_0^0}{-\kappa'(\xi)\xi g(\sigma_0^0) + [1 + \kappa(\xi)]g'(\sigma_0^0)\sigma_0^0} \\ \beta_2 &= \beta^{-1} g(\beta\sigma_0^0)/g(\sigma_0^0) \end{aligned}$$

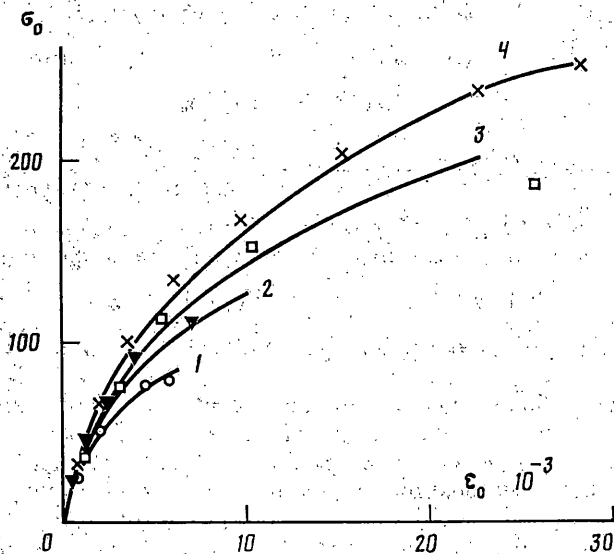
Компоненты тензора деформаций, определяемые выражением (3.1), должны удовлетворять уравнениям совместности деформаций. Если ε_{ij}^0 удовлетворяют уравнениям совместности деформаций, то ε_{ij} также



Фиг. 1.



Фиг. 2.

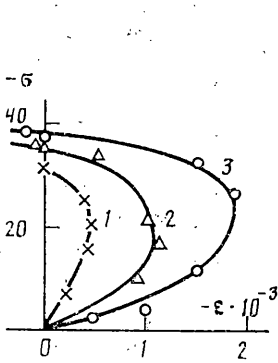


Фиг. 3.

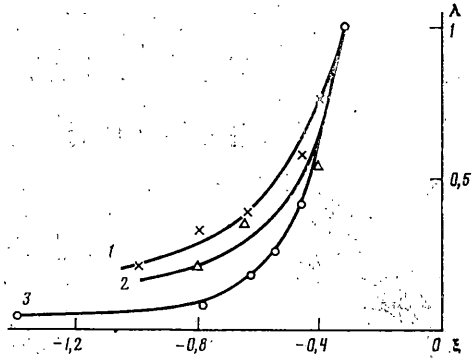
удовлетворяют этим уравнениям при условии: 1) β_1 и β_2 не зависят от координат; 2) либо $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, либо $\epsilon_{ij}^{01} = 0$. Первое условие выполняется в случае степенной функции $g(\sigma_0)$, при этом $\beta_1 = \beta_2 = \beta^{n-1}$. Второе условие выполняется при $n=2$ и $\epsilon_{ij}^{01} \neq 0$, но это соответствует случаю, когда диаграммы деформирования при пропорциональном нагружении линейные. Если $n \neq 2$, то для выполнения второго условия достаточно $\epsilon_{ij}^{01} = 0$.

Таким образом, условия того, что при пропорциональном изменении внешних сил в теле осуществляется пропорциональное нагружение, состоят в следующем: для каждого конкретного вида нагружения зависимость между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряжений описывается степенной функцией. При этом в отличие от условий, сформулированных в [16], не требуется несжимаемость материала.

4. Возможности предложенного подхода при описании деформирования рассмотренного класса сред можно проиллюстрировать на основе результатов экспериментальных исследований поведения различных горных пород, приведенных в [16].



Фиг. 4



Фиг. 5

Эксперименты проводились при пропорциональном нагружении сплошных цилиндрических образцов в условиях действия осевой сжимающей нагрузки и бокового давления. При этом абсолютная величина осевого напряжения во всех опытах превышала величину бокового давления, поэтому параметры Лоде для напряжений и деформаций имели постоянные значения $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon = 1$ для различных видов напряженного и деформированного состояний. Не изменялся также и угол θ , который непосредственно связан с параметром Лоде $\mu_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg}(\theta + \pi/3)$.

Представляет интерес исследование характера обобщенных диаграмм деформирования горных пород, построенных на основе приведенных в [6] экспериментальных данных (напряжения на всех фигурах даны в МПа). На фиг. 1 нанесены экспериментальные точки, соответствующие обобщенным диаграммам $\sigma_0 - \varepsilon_0$ для талькохлорита с плотностью $2,91 \text{ г/см}^3$ и пористостью $0,21\%$. В качестве характеристики диаграммы для каждого вида пропорционального нагружения может быть использован параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$. Светлые точки соответствуют одноосному сжатию ($\xi = -0,33$), темные и светлые треугольники — трехосному сжатию с параметром ξ ; равным $-0,407$ и $-0,464$, светлые квадраты — $\xi = -0,637$, крестики — $\xi = -0,808$, темные точки — $\xi = -1,02$.

На фиг. 2 приведены экспериментальные данные для белого мрамора, который имел плотность $2,71 \text{ г/см}^3$ и пористость $0,92\%$. Светлые точки, темные и светлые треугольники соответствуют тем же значениям параметра ξ , что и для талькохлорита, светлые квадраты — $\xi = -0,55$, темные точки — $\xi = -0,63$, крестики — $\xi = -0,79$, темные квадраты — $\xi = -1,39$.

На фиг. 3 приведены экспериментальные значения σ_0 и ε_0 для известняка. При этом светлые точки и треугольники соответствуют значениям параметра ξ в предыдущих двух случаях, светлые квадраты — $\xi = -0,658$, крестики — $\xi = -0,808$.

Аналогичные диаграммы можно привести и для других горных пород, например песчаника, диабазы, диорита и др. [6]. Общее свойство данных горных пород заключается в отсутствии единой диаграммы зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций. Кроме того, процесс деформирования сопровождается нелинейной зависимостью между объемной деформацией ε и средним напряжением σ . На фиг. 4 показаны диаграммы изменения объемной деформации в условиях одноосного сжатия. Диаграмма 1 построена на основе результатов испытаний образцов талькохлорита, диаграмма 2 — известняка, диаграмма 3 — мрамора. Из данных диаграмм видно, что в процессе нагружения среднее напряжение и объемная деформация могут иметь разные знаки, т. е. при сжимающем среднем напряжении может происходить объемное расширение материала.

При использовании зависимостей (1.2)–(1.4) для описания деформирования материалов кроме традиционных констант упругости A и B и функции нелинейности $g(\sigma_0)$ необходимо также определить функцию вида напряженного состояния $\kappa(\xi)$, которая характеризует чувствительность деформационных характеристик к виду нагружения. Данная функция определяется наиболее простым образом, когда $g(\sigma_0)$ аппроксимируется степенной зависимостью. Тогда второе соотношение (1.5) можно рассматривать как уравнение для нахождения функции $\kappa(\xi)$. При этом $\lambda = (\varepsilon_0 - A\sigma_0)/(k\sigma_0^{n-1})$ характеризует расхождение диаграмм $\sigma_0 - \varepsilon_0$ для разных видов пропорционального нагружения. Интегрируя второе соотношение (1.5) при известной функции $\lambda(\xi)$, находим

$$1 + \kappa(\xi) = \lambda(\xi) - \xi^n \int \frac{\lambda'(\xi) d\xi}{\xi^n} + C_0 \xi^n$$

Константа A определяется по начальному наклону обобщенных диаграмм, изображенных на фиг. 1–3. Функцию $\Lambda(\xi)$ можно определить из второго соотношения (1.7), рассматривая его как дифференциальное уравнение относительно $\Lambda(\xi)$ при известной функции $\lambda(\xi)$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\Lambda(\xi) = \left(- \int [\lambda'(\xi)/\xi^n] d\xi + C_0 \right) \xi^{n-2} \quad (4.1)$$

Константу B можно определить по начальному наклону диаграмм зависимости объемной деформации ε от среднего напряжения σ (фиг. 4) или на основе начального значения коэффициента Пуассона. Константа C_0 определяется по диаграмме зависимости ε от σ для произвольного вида пропорционального нагружения. Таким образом, согласно (1.7), функцию $\lambda(\xi)$ можно определить как на основе диаграмм $\sigma_0-\varepsilon_0$, так и $\sigma-\varepsilon$.

При определении функции $g(\sigma_0)$ можно исходить из диаграммы $\sigma_0-\varepsilon_0$ для произвольного вида пропорционального нагружения, например одноосного сжатия ($\xi = -0,33$). Тогда можно принять $\lambda(-0,33) = 1$.

Представленные на фиг. 1–3 экспериментальные данные хорошо аппроксимируются степенной зависимостью $g'(\sigma_0) = k\sigma_0^{n-1}$ с показателем $n-1=3$. В таблице приведены значения констант A и B , а также коэф-

N	$A \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^{-1}$	$B \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^{-1}$	$k \cdot 10^9 \text{ (МПа)}^{-3}$
1	4,1	2,85	1,532
2	1,4	6,1	2,46
3	2,7	8,1	5,97

фициента k для трех типов горных пород: 1 — талькохлорит, 2 — мрамор, 3 — известняк. Функцию $\lambda(\xi)$ можно определить по расхождению диаграмм $\sigma_0-\varepsilon_0$ при постоянном $\varepsilon_0-A\sigma_0$, проводя прямую, параллельную начальному наклону диаграмм.

Согласно ограничениям (1.8), для функции $\lambda(\xi)$ может быть предложена следующая аппроксимация:

$$\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{n-2} A_m \xi^m + \alpha e^{(c\xi)} \quad (4.2)$$

Тогда из (4.1) и (4.2) следует, что

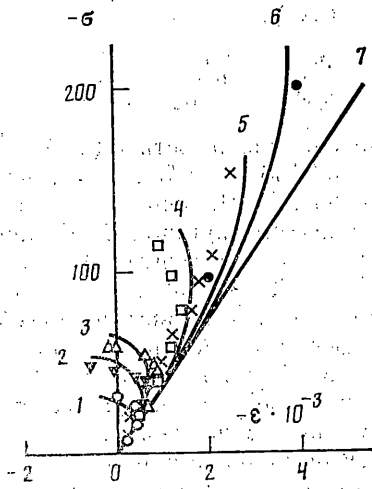
$$\Lambda(\xi) = \sum_{m=1}^{n-2} \frac{m}{n-m} A_m \xi^{m-2} + \alpha e^{(c\xi)} \xi^{-2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(c\xi)^m}{(n-1)(n-2)\dots(n-m)} - \frac{\alpha c^n \xi^{n-2}}{(n-1)!} \text{Ei}(c\xi) + C_0 \xi^{n-2} \quad (4.3)$$

где $\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция. Нетрудно проверить, что при этом условия (1.8) и (1.9) выполняются.

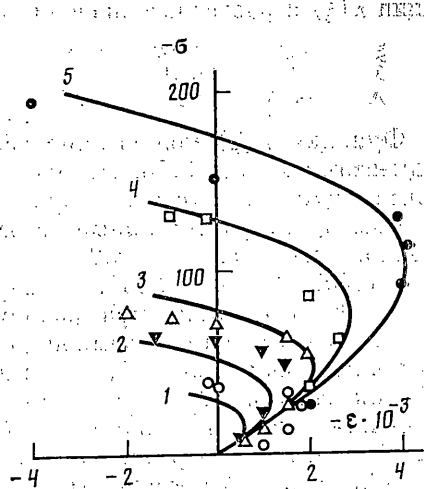
Ниже приведены значения функции $\lambda(\xi)$ для талькохлорита, определенные по диаграммам $\sigma_0-\varepsilon_0$ на фиг. 1:

ξ	-0,33	-0,407	-0,464	-0,637	-0,808	-1,02
λ	1	0,76	0,58	0,38	0,33	0,214
Λ	-1,698	-1,267	-0,8025	-0,3521	-0,1745	-0,086

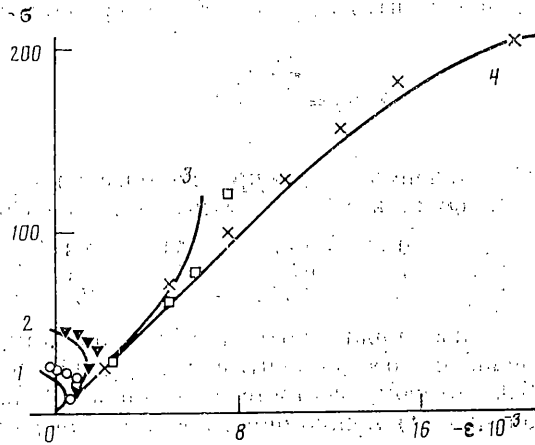
Аппроксимируя эти данные гладкой функцией, получим следующие значения коэффициентов в выражении (4.2): $A_m=0$, $\alpha=2,105$, $c=2,255$. График функции $\lambda(\xi)$ соответствует диаграмме 1 на фиг. 5. На основе данной диаграммы можно построить обобщенные кривые деформирова-



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

ния $\sigma_0 - \varepsilon_0$, которые показаны на фиг. 1 сплошными линиями. Диаграмма 1 соответствует $\xi = -0,33$; 2 — $\xi = -0,407$; 3 — $\xi = -0,464$; 4 — $\xi = -0,637$; 5 — $\xi = -0,808$; 6 — $\xi = -1,02$. Приведены также значения функции $\Lambda(\xi)$, рассчитанные по формуле (4.3). Поскольку при равномерном всестороннем сжатии зависимость между средним напряжением и объемной деформацией практически линейная, то в (4.3) следует положить $C_0 = 0$. На фиг. 6 показаны экспериментальные точки и расчетные диаграммы зависимости $\sigma - \varepsilon$, полученные на основе (1.6), (4.3). Обозначения диаграмм и экспериментальных точек соответствуют тем видам пропорционального нагружения, для которых построены диаграммы, приведенные на фиг. 1. Диаграмма 7 соответствует линейно упругому поведению среды с податливостью объемному деформированию $B = 2,85 \cdot 10^{-5}$ (МПа). Данные диаграммы демонстрируют достаточно хорошее соответствие между расчетными и экспериментальными зависимостями.

Аналогичным образом можно проанализировать экспериментальные данные для мрамора. Ниже приведены экспериментальные значения

функции $\lambda(\xi)$ и расчетные значения функции $\Lambda(\xi)$:

ξ	-0,33	-0,407	-0,464	-0,55	-0,63	-0,79	-1,39
λ	1	0,612	0,43	0,26	0,18	0,08	0,044
Λ	-3,38	-1,59	-0,91	-0,50	-0,305	-0,102	-0,0026

Функцию $\lambda(\xi)$ можно аппроксимировать зависимостью (4.2) с коэффициентами $A_0=0,01256$; $A_1=0,0564$; $A_2=0,0456$; $\alpha=6,56$; $c=5,7$. Этой аппроксимации соответствует кривая 3 на фиг. 5. На фиг. 2 показаны диаграммы $\sigma_0-\varepsilon_0$, рассчитанные на основе значений функции $\lambda(\xi)$, представленной выражением (4.2). Диаграмма 1 соответствует $\xi=-0,33$; 2 — $\xi=-0,407$; 3 — $\xi=-0,464$; 4 — $\xi=-0,55$; 5 — $\xi=-0,63$; 6 — $\xi=-0,79$; 7 — $\xi=-1,39$. Поскольку при равномерном трехосном сжатии мрамора диаграмма зависимости объемной деформации ε от среднего напряжения σ практически линейная, то в выражении (4.3) константа $C_0=0$. На фиг. 7 показаны экспериментальные точки и расчетные диаграммы $\sigma-\varepsilon$. Обозначения диаграмм соответствуют тем же значениям ξ , что и на фиг. 2. Расчетные диаграммы объемного деформирования при $\xi=-0,79$ и $\xi=-1,39$ также достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным, но на фиг. 7 не нанесены вследствие различия в масштабе.

При описании поведения функции $\lambda(\xi)$ на конечном интервале изменения параметра ξ может быть использован интерполяционный полином некоторой степени s :

$$\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^s A_m \xi^m \quad (4.4)$$

Ниже приведены значения $\lambda(\xi)$, определенные по диаграммам $\sigma_0-\varepsilon_0$ на фиг. 3 и значения функции $\Lambda(\xi)$, вычисленные на основе (4.1):

ξ	-0,33	-0,407	-0,658	-0,808
λ	1	0,54	0,36	0,211
Λ	-3,58	-0,972	-0,138	0,02

На основе этих данных можно построить интерполяционный полином (4.4) третьей степени с коэффициентами $A_0=8,214$; $A_1=39,421$; $A_2=-64,810$; $A_3=34,970$, которому соответствует кривая 2 на фиг. 5. Константу C_0 в выражении (4.1) можно определить по диаграмме 2 на фиг. 4, соответствующей одноосному сжатию известняка ($\xi=-0,33$). Вычисляя с помощью второго соотношения (1.6) значение $\Lambda(-0,33)$ и приравнявая (4.1) при $\xi=-0,33$, находим $C_0=55,53$. На фиг. 8 показаны расчетные диаграммы зависимости объемной деформации от среднего напряжения. При этом обнаружено некоторое отличие в характере объемного деформирования известняка по сравнению с другими двумя типами горных пород. Это отличие заключается в том, что для видов нагружения с параметром $\xi \leq -0,808$ по мере роста напряжений происходит уплотнение материала во всем диапазоне напряжений, хотя для других видов нагружения ($\xi > -0,808$) характер диаграмм такой же, как и показанных на фиг. 6 и 7. Приведенные на фиг. 8 экспериментальные данные и расчетные зависимости показывают, что этот эффект также можно описать с помощью зависимостей (1.5).

Таким образом, показано, что для рассмотренного класса материалов параметры объемного деформирования могут быть определены на основе девиаторных характеристик. Предложенный подход позволяет также эквивалентным образом определять девиаторные характеристики деформирования среды на основе характеристик объемного деформирования. При этом нетрудно установить, что, несмотря на значительное объемное расширение материалов в условиях действия сжимающих напряжений ($\sigma/\varepsilon < 0$) неравенства (2.3) и (2.4), обеспечивающие единственность ре-

шения краевых задач и положительную определенность потенциала, выполняются. Показана возможность реализации пропорционального нагружения в дилатирующих телах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаевский В. Н. Современные проблемы механики грунтов // Определяющие законы механики грунтов. Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1975. С. 210–229.
2. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. No. 6. P. 371–394.
3. Айбиндер С. Б., Тюнина Э. Л., Цируле К. И. Свойства полимеров в различных напряженных состояниях. М.: Химия, 1981. 232 с.
4. Березин А. В., Ломакин Е. В., Строков В. И., Барабанов В. Н. Сопротивление деформированию и разрушение изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Проблемы прочности. 1979. № 2. С. 60–65.
5. Леонов М. Я., Паняев В. А., Русинко К. Н. Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инж. журн. МТТ. 1967. № 6. С. 26–32.
6. Ставрогин А. Н., Петросеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
7. Новожилков В. В. О физическом смысле инвариантов, используемых в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 5. С. 615–619.
8. Ломакин Е. В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 92–99.
9. Ломакин Е. В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. Ч. I. Экспериментальные зависимости и определяющие соотношения // Механика композитных материалов. 1988. № 1. С. 3–9.
10. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М.: Гостехиздат, 1955. 271 с.
11. Быков Д. Л. Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды // Инж. журн. МТТ. 1966. № 4. С. 58–64.
12. Buidiansky V., Hutchinson J. W., Lambropoulos J. C. Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics // Int. J. Solids Structures. 1983. V. 19. No. 4. P. 337–355.
13. Abeyaratne R., Jiang G. Dilatationally nonlinear elastic materials. I. Some theory // Int. J. Solids Structures. 1989. V. 25. No. 10. P. 1201–1219.
14. Панферов В. М. Теория упругости и деформационная теория пластичности для твердых тел с разными свойствами на сжатие, растяжение и кручение // ДАН СССР. 1968. Т. 180. № 1. С. 41–44.
15. Ломакин Е. В. О единственности решения задач теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 42–45.
16. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.IV.1990