МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3

И. П. ГЕТМАН

К ТЕОРИИ РАСЧЕТА НЕРЕГУЛЯРНЫХ УПРУГИХ ВОЛНОВОДОВ

Одной из основных задач в теории волноводов является определение условий существования и описание характеристик собственных волн, или мод, данного волновода. Глубокие математические исследования по изучению упругих продольно-однородных (регулярных) волноводов содержатся в [1].

Под нерегулярным или продольно-неоднородным волноводом понимается волновод, вдоль оси которого могут меняться или его физические свойства, или характер однородных граничных условий на его ограничивающей поверхности, или геометрические размеры сечения волновода, или направление оси волновода, или то и другое вместе взятое (см. фигуру).

Среди немногочисленных исследований по расчету волновых полей в нерегулярных упругих волноводах отметим работы [2–6]. Сложности в этих задачах связаны главным образом с выполнением условий сопряжения на границах раздела регулярности волновода.

В работе предлагается достаточно универсальный прием, позволяющий алгебраизировать возникающие в нерегулярных волноводах условия сопряжения.

1. В теории упругих волноводов собственные волны описываются однородной системой уравнений движения сплошной среды и определяются как нетривиальные их решения с учетом граничных условий, обусловленных конкретным видом волноведущей структуры.

Собственная волна, характеризуемая вектором перемещений $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t)$, на каждом участке регулярности волновода представляется в виде $\mathbf{a}(x_2, x_3)e^{i(\gamma x_1-\omega t)}$. При заданной частоте ω комплексный параметр γ характеризует длину волны и ее затухание при распространении вдоль оси волновода $Ox_1=Ox$, x_2, $x_3 \in D$ – области, занятой поперечным сечением волновода. Волновое число γ является спектральным параметром следующей задачи

$$(\gamma^2 C+\gamma B+A-\omega^2 R)\mathbf{a}=0 \tag{1.1}$$

или ей эквивалентной

$$(T-\gamma)\mathbf{V}=0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{V}(x_2, x_3)=\{\mathbf{a}, i(\gamma C-B_1)\mathbf{a}\}$ – шестикомпонентный вектор:

$$C=\|c_{1mn1}\|,\ B=-B_1-B_1^*,\ A=i(\partial_2 B_2+\partial_3 B_3)$$

$$B_k=i\|c_{kmn2}\partial_2+c_{kmn3}\partial_3\|,\ R=\operatorname{diag}\|\rho\|$$

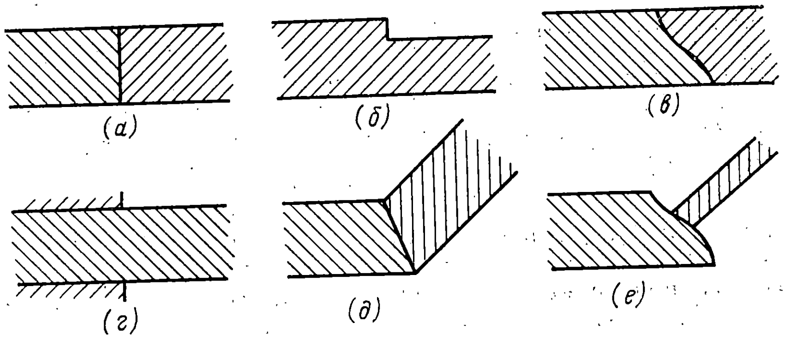
$$T=\left\|\begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22}\end{matrix}\right\|,\qquad t_{11}=C^{-1}B_1,\qquad t_{12}=-iC^{-1}$$

$$t_{21}=i(B_1^*C^{-1}B_1-A+\omega^2 R),\ t_{22}=B_1^*C^{-1}$$

$$\partial_n=\partial/\partial x_n,\ m,\ n=1, 2, 3,\ i^2=-1$$

$c_{ijkl}(x_2, x_3)$ – модули упругости, $\rho(x_2, x_3)$ – плотность.

Уравнения (1.1), (1.2) следует дополнить однородными граничными условиями, заданными на границе области D.



Средний за период $T=2\pi/\omega$ поток энергии через поперечное сечение волновода $x=x_1=\mathrm{const}$ можно представить в форме [6, 7]:

$$P(\mathbf{W})=\frac{\omega}{4}(J\mathbf{W},\mathbf{W})_{H(D)}=\frac{\omega}{4}[\mathbf{W},\mathbf{W}], \quad J=i\begin{Vmatrix} O & -I \\ I & O \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

O, I — трехмерные нулевая и единичная матрицы, $\mathbf{W}=\{\mathbf{U},\ \boldsymbol{\sigma}_1\}=\mathbf{V}e^{i(\gamma x-\omega t)}$ — шестикомпонентный вектор, $\boldsymbol{\sigma}_1$ — вектор напряжений на площадке, перпендикулярной оси волновода, $H(D)$ — гильбертово пространство шестикомпонентных вектор-функций, интегрируемых с квадратом в D.

Пусть γ_k — простое собственное значение спектральной задачи (1.1), $\mathbf{a}_k$ — соответствующий ему собственный вектор (случай кратного значения изучен в [6, 8]). Тогда общее представление волнового поля в волноводе через собственные волны на участке регулярности имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x)&=\sum_k C_k\mathbf{u}_k=\sum_k C_k\mathbf{a}_k e^{i(\gamma_k x-\omega t)} \\ \mathbf{W}(x)&=\sum_k C_k\mathbf{W}_k=\sum_k C_k\mathbf{V}_k e^{i(\gamma_k x-\omega t)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

где C_k — амплитудные множители, подлежащие определению.

Расположение собственных значений γ_k на комплексной плоскости таково, что при любом фиксированном ω имеется конечное число вещественных значений $\gamma_s^{\pm}=\pm\gamma_s$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ и счетное количество симметрично расположенных четверок комплексных значений $\gamma_t^+=\gamma_t$, $\gamma_t^-=\gamma_t^*$, $\gamma_{-t}^+=-\gamma_t^*$, $\gamma_{-t}^-=-\gamma_t$, $(t=\pm1, \pm2, \ldots)$, $\mathrm{Jm}\,\gamma_t^+>0$, $\mathrm{Jm}\,\gamma_t^-<0$. Звездочкой отмечена операция комплексного сопряжения.

Соотношения (1.4) тогда можно представить в виде

$$\mathbf{W}(x)=\sum_{s=1}^{N}(C_s^+\mathbf{W}_s^+ + C_s^-\mathbf{W}_s^-)+\sum_{t=-\infty}^{\infty}(C_t^+\mathbf{W}_t^+ + C_t^-\mathbf{W}_t^-) \tag{1.5}$$

Собственная волна $\mathbf{W}_s^+$, соответствующая положительному вещественному значению γ_s, называемая однородной, переносит энергию в положительном направлении оси Ox $P(W_s^+)>0$. Собственная волна $\mathbf{W}_t^+$, отвечающая комплексному собственному значению, называется неоднородной и экспоненциально затухает в положительном направлении оси Ox. Противоположными свойствами обладают собственные волны $\mathbf{W}_s^-$ и $\mathbf{W}_t^-$.

В [7, 8] установлено, что оператор T из (1.2) является J-самосопряженным, т. е. $(JT)^*=JT$. Основываясь на этом факте, легко устанавливается J-ортогональность собственных векторов $\mathbf{V}_k$ и, как следствие, J-ортогональность собственных волн $\mathbf{W}_k$:

$$[\mathbf{W}_m, \mathbf{W}_n]=(J\mathbf{W}_m, \mathbf{W}_n)=[\mathbf{V}_m, \mathbf{V}_n]=(J\mathbf{V}_m, \mathbf{V}_n)=\begin{cases} 0, & \gamma_m\neq\gamma_n^* \\ d_m, & \gamma_m=\gamma_n^* \end{cases} \tag{1.6}$$

Пусть O — сечение волновода, отличное от нормального сечения D, и пусть

$$\mathbf{\Psi}_k=\{\mathbf{U}_k, \sigma_n(\mathbf{U}_k)\} \tag{1.7}$$

след собственной волны, представляющий собой шестикомпонентный вектор, определенный на поверхности O, σ_n — вектор напряжений на O.

На основании теоремы взаимности следует, что если векторы $\mathbf{\Psi}_m$, $\mathbf{\Psi}_n$ J-ортогональны на одном из сечений волновода, то они J-ортогональны и на других сечениях. В силу того, что в сечении D векторы $\mathbf{\Psi}_k$ и $\mathbf{W}_k$ совпадают, а для последних выполняются условия J-ортогональности (1.6), то справедливы следующие условия J-ортогональности.

$$[\psi_m, \psi_n]_O=(J\psi_m, \psi_n)_{H(O)}=\begin{cases} 0, & \gamma_m\neq\gamma_n^* \\ d_m, & \gamma_m=\gamma_n^* \end{cases} \tag{1.8}$$

На основании изложенного перейдем к рассмотрению конкретных задач.

2. Рассмотрим цилиндрический волновод с осью Ox $V=V_1\cup V_2$, состоящий из двух полубесконечных волноводов $V_1=(-\infty, 0]\times D$, $V_2=[0, \infty)\times D$, жестко соединенных между собой по нормальному сечению $x=0$ (фиг. 1, a). Подобласти V_1, V_2 в общем случае различаются характером граничных условий на боковых поверхностях, модулями упругости c_{ijkl} и плотностью ρ.

Будем считать, что источником колебаний является однородная волна

$$\mathbf{W}_l^{1+}=\mathbf{V}_l^{1+}e^{i(\gamma_l x-\omega t)}, \quad P(\mathbf{W}_l^{1+})>0 \tag{2.1}$$

падающая из $x=-\infty$ на границу раздела $x=0$. Верхний индекс указывает на принадлежность к подобласти.

Общее представление решения в каждой из подобластей с учетом условий излучения может быть представлено в виде

$$\mathbf{W}^1(x)=\mathbf{W}_l^{1+}+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{1-}\mathbf{W}_k^{1-}, \quad \mathbf{W}^2(x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{2+}\mathbf{W}_k^{2+} \tag{2.2}$$

где постоянные C_k^{1-}, C_k^{2+} подлежат определению.

Из условия того, что волноводы жестко соединены по сечению $x=0$, следует условие непрерывности вектора W:

$$\mathbf{W}^1(0)=\mathbf{W}^2(0) \tag{2.3}$$

Подставляя в условия сопряжения (2.3) представления (2.2) приходим к системе функциональных уравнений

$$\mathbf{V}_l^{1+}+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{1-}\mathbf{V}_k^{1-}=\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{2+}\mathbf{V}_k^{2+} \tag{2.4}$$

Введем в рассмотрение подсистему собственных векторов $M^{1\beta}=\{\mathbf{V}_1^{1\beta}, \mathbf{V}_2^{1\beta}, \ldots, \mathbf{V}_{N^1}^{1\beta}; \mathbf{V}_{N^1+1}^{1\beta}, \mathbf{V}_{-N^1-1}^{1\beta}, \mathbf{V}_{N^1+2}^{1\beta}, \mathbf{V}_{-N^1-2}^{1\beta}, \ldots\}$, $\beta=1, 2$, где N^1 — число вещественных собственных значений в области V_1, а $\mathbf{V}_s^{11}=\mathbf{V}_s^{1+}$, $\mathbf{V}_s^{12}=\mathbf{V}_s^{1-}$, $s=1, 2, \ldots, N^1$, $\mathbf{V}_t^{11}=\mathbf{V}_t^{1-}$; $\mathbf{V}_t^{12}=\mathbf{V}_t^{1+}$, $t=\pm(N^1+1)$, $\pm(N^1+2), \ldots$.

Для сведения уравнений (2.4) к системе алгебраических уравнений воспользуемся условиями J-ортогональности (1.6), для чего подействуем оператором J на соотношение (2.4), а затем полученное равенство скалярно умножим последовательно на элементы множества M^{11}. В результате получим алгебраическую систему уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}{}^1 C_k{}^{2+} = d_m{}^{1+}\delta_{lm}, \qquad d_l{}^{1+} = [\mathbf{V}_l{}^{1+}, \mathbf{V}_l{}^{1+}] \tag{2.5}$$

$$a_{mk}{}^1 = [\mathbf{V}_k{}^{2+}, \mathbf{V}_m{}^{11}] = i\int_D (\mathbf{a}_k{}^{2+}\boldsymbol{\sigma}_{1m}^{11^*} - \boldsymbol{\sigma}_{1k}^{2+}\mathbf{a}_m^{11^*})\,dS$$

Определив из системы (2.5) постоянные $C_k{}^{2+}$, по ним определим постоянные $C_k{}^{1-}$. Для этого подействуем оператором J на соотношения (2.4), а затем полученное равенство скалярно умножим последовательно на элементы множества M^{12}. В результате получим

$$C_m{}^{1-} d_m{}^{1-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}{}^2 C_k{}^{2+}, \quad a_{mk}{}^2 = [\mathbf{V}_k{}^{2+}, \mathbf{V}_m{}^{12}], \quad d_m{}^{1-} = [\mathbf{V}_m{}^{1-}\ \mathbf{V}_m{}^{12}] \tag{2.6}$$

В выражениях (2.5), (2.6) суммирование по m не проводится.

Полученные соотношения позволяют полностью определить решение поставленной задачи. Результаты численного исследования систем (2.5), (2.6) для частного случая двух состыкованных упругих полуполос приводятся в [6].

3. Рассмотрим случай ступенчатого волновода (фиг. 1б), когда два полубесконечных цилиндрических состыкованных волновода имеют разные нормальные сечения D_1 и D_2, при этом для $x=0$ область D_2 является частью области D_1.

По-прежнему будем считать, что на границу раздела волноводов падает волна (2.1).

Обозначим через $D_1^- = D_1/D_2$ множество точек области D_1 несовпадающих с D_2. Тогда граничные условия и условия сопряжения при $x=0$ можно записать в виде

$$\mathbf{W}^1|_{D_1^-} = \{P_u\mathbf{W}^1|_{D_1^-},\ \boldsymbol{\sigma}_1|_{D_1^-} = 0\},\quad \mathbf{W}^1|_{D_2} = \mathbf{W}^2|_{D_2} \tag{3.1}$$

где $P_u = \{I, 0\}$ матрица 3×6.

Подставляя в (3.1) представление решений в виде (2.2) придем к следующим соотношениям

$$\mathbf{V}_l{}^{1+} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k{}^{1-}\mathbf{V}_k{}^{1-} = \begin{cases} \left\{\mathbf{a}_l{}^{1+} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k{}^{1-}\mathbf{a}_k{}^{1-}, 0\right\}, & \mathbf{r}\in D_1^- \\[2ex] \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k{}^{2+}\mathbf{V}_k{}^{2+}, & \mathbf{r}\in D_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор торца цилиндра V_1.

Умножая с помощью индефинитного скалярного произведения (1.6) соотношения (3.2) последовательно на элементы множеств M^{11}, M^{12} получим следующие бесконечные системы

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{11} C_k^{1-} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{12} C_k^{2+} = d_m^{1+} - b_m^1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{21} C_k^{1-} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{22} C_k^{2+} - d_m^{1-} C_m^{1-} = -b_m^2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$a_{mk}^{11} = i \int_{D_1^-} \mathbf{a}_k^{1-} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{11*} dS, \qquad a_{mk}^{21} = i \int_{D_1^-} \mathbf{a}_k^{1-} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{12*} dS$$

$$a_{mk}^{12} = i \int_{D_2} (\mathbf{a}_k^{2+} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{11*} - \boldsymbol{\sigma}_{1k}^{2+} \cdot \mathbf{a}_m^{11*}) dS, \qquad a_{mk}^{22} = i \int_{D_2} (\mathbf{a}_k^{2+} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{12*} - \boldsymbol{\sigma}_{1k}^{2+} \cdot \mathbf{a}_m^{12*}) dS$$

$$b_m^1 = i \int_{D_1^-} \mathbf{a}_l^{1+} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{11*} dS, \qquad b_m^2 = i \int_{D_2} \mathbf{a}_l^{1+} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{12*} dS$$

Определив постоянные C_k^{1-}, C_k^{2+} из решения бесконечных систем алгебраических уравнений (3.3), найдем решение исходной задачи.

4. Рассмотим случай, когда два полубесконечных волновода V_1 и V_2 с одинаковым нормальным сечением D соединены между собой под углом друг к другу по некоторой поверхности O (фиг. 1, ∂).

Как и прежде считаем, что на границу раздела волноводов падает волна вида (2.1).

Вводя в рассмотрение систему следов собственных волн на поверхности O для подобластей V_1 и V_2 в соответствии с (1.7), граничные условия жесткого контакта волноводов по поверхности могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{\Psi}_l^{1+} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{1-} \boldsymbol{\Psi}_k^{1-} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{2+} \boldsymbol{\Psi}_k^{2+} \tag{4.1}$$

Для сведения уравнений (4.1) к системе алгебраических уравнений воспользуемся условием J-ортогональности следов (1.8). Умножая (4.1) с помощью индефинитного скалярного произведения на элементы множества M^{11}, в котором собственные векторы $\mathbf{V}_k^{1\beta}$ заменены следами $\boldsymbol{\Psi}_k^{1\beta}$, приходим к алгебраической системе вида (2.5), в которой коэффициенты

$$\begin{gathered} a_{mk}^1 = [\boldsymbol{\Psi}_k^{2+}, \boldsymbol{\Psi}_m^{11}]_O = i \int_O (\boldsymbol{\Psi}_{uk}^{2+} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\sigma m}^{11*} - \boldsymbol{\Psi}_{\sigma k}^{2+} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{um}^{11*}) dS \\ d_l^{1+} = [\boldsymbol{\Psi}_l^{1+}, \boldsymbol{\Psi}_l^{1+}]_O, \ \boldsymbol{\Psi}_{uk} = P_u \boldsymbol{\Psi}_k, \ \boldsymbol{\Psi}_{\sigma k} = P_\sigma \boldsymbol{\Psi}_k, \ P_\sigma = \{0, I\} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Проводя аналогичную операцию с помощью множества M^{12} получим соотношения для определения постоянных C_m^{-1}, имеющие форму (2.6), в которых $a_{mk}^2 = [\boldsymbol{\Psi}_k^{2+}, \boldsymbol{\Psi}_m^{12}]_O$, $d_m^{1-} = [\boldsymbol{\Psi}_m^{1-}, \boldsymbol{\Psi}_m^{12}]_O$.

Результаты для волновода, изображенного на фиг. 1, *в* получаются из рассмотренных выше, как частный случай.

5. Рассмотрим предыдущую задачу в случае, когда волноводы V_1 и V_2 имеют различные сечения D_1 и D_2 и соединены жестко по произвольному сечению O_2 цилиндра V_2 (фиг. 1, *е*), которое является частью сечения O_1 цилиндра V_1.

Обозначим через $O_1^- = O_1/O_2$ — множество точек поверхности O_1 несовпадающих с O_2. Тогда граничные условия и условия сопряжения на торцевой поверхности O_1 можно записать в виде

$$\Psi_l^{1+} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{1-}\Psi_k^{1-} = \begin{cases} \left\{\Psi_{ul}^{1+} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{1-}\Psi_{uk}^{1-}, 0\right\}, & \mathbf{r}\in O_1^- \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{2+}\Psi_k^{2+}, & \mathbf{r}\in O_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Умножая (5.1) с помощью индефинитного скалярного произведения на элементы множества M^{11} и M^{12} следов собственных волн на O_1 и пользуясь условием J-ортогональности (1.8), приходим к алгебраической системе вида (3.3), в которой коэффициенты

$$a_{mk}^{11} = i\int_{O_1} \Psi_{uk}^{1-}\cdot\Psi_{\sigma m}^{11*}dS, \qquad a_{mk}^{21} = i\int_{O_1} \Psi_{uk}^{1-}\cdot\Psi_{\sigma m}^{12*}dS$$

$$a_{mk}^{12} = i\int_{O_2} (\Psi_{uk}^{2+}\cdot\Psi_{\sigma m}^{11*} - \Psi_{\sigma k}^{2+}\cdot\Psi_{um}^{11*})dS,$$

$$a_{mk}^{22} = i\int_{O_2} (\Psi_{uk}^{2+}\cdot\Psi_{\sigma m}^{12*} - \Psi_{\sigma k}^{2+}\cdot\Psi_{um}^{12*})dS \quad (5.2)$$

$$b_m^1 = i\int_{O_1} \Psi_{ul}^{1+}\cdot\Psi_{\sigma m}^{11*}dS, \qquad b_m^2 = i\int_{O_2} \Psi_{ul}^{1+}\cdot\Psi_{\sigma m}^{12*}dS$$

Определяя постоянные C_k^{1-}, C_k^{2+} из решения бесконечных систем алгебраических уравнений находим решение поставленной задачи.

Рассмотренный метод сведения к бесконечным системам легко переносится на случай, когда в зоне соединения двух волноводов имеется трещина или жесткое включение. Аналогичным образом строятся бесконечные системы в случае волновода с двумя и более границами раздела регулярности.

Автор благодарит И. И. Воровича и Ю. А. Устинова за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Бабешко В. А., Ворович И. И.* Динамические свойства полуограниченных упругих и электроупругих трехмерных тел при смешанных граничных условиях и наличии включений // Аннот. докл. V Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981. С. 39.
3. *Касаткин Б. А.* Об одном классе дифракционных задач для нормальных и поверхностных волн // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 2. С. 232–237.
4. *Гринченко В. Т., Городецкая Н. С.* Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 5. С. 121–125.
5. *Гетман И. П., Лисицкий О. Н.* Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1044–1048.
6. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* О распространении волн в упругом продольно-неоднородном цилиндре // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 103–108.
7. *Краснушкин П. Е.* Резонансы в упругом бесконечном цилиндре и трансформация комплексных волн в незатухающие // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 44–48.
8. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1981. № 6. С. 97–146.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
23.VIII.1990