МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3

А. М. ФИЛИМОНОВ

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

В работе приведено построение стоячих волн убывающей амплитуды в одномерной сплошной среде с гистерезисом. Приведены явные формулы для изменения амплитуды в пучностях стоячих волн и для промежутков времени между последовательными прохождениями положения равновесия. Полученный результат может использоваться как в качестве модельного примера при изучении сплошных сред с гистерезисом, так и может быть применен к некоторым конкретным механическим системам.

Рассматриваются продольные перемещения $u(x, t)$ одномерной сплошной среды с лагранжевой координатой сечения x в момент времени t. Связь между продольными напряжением σ и относительной деформацией $\varepsilon=u_x$ принимается такой:

$$\begin{gathered}
\sigma=\alpha|\varepsilon|^{p-1} \quad (\varepsilon\geqslant0,\ \varepsilon_t\geqslant0)\\
\sigma=\alpha k_m|\varepsilon|^{q-1} \quad (\varepsilon\geqslant0,\ \varepsilon_t<0)\\
\sigma=-\beta|\varepsilon|^{p-1} \quad (\varepsilon\leqslant0,\ \varepsilon_t\leqslant0)\\
\sigma=-\beta k_m|\varepsilon|^{q-1} \quad (\varepsilon\leqslant0,\ \varepsilon_t>0)\\
k_m=\max_{\mu\leqslant\tau\leqslant t}|\varepsilon(x,\tau)|^{p-q},\qquad \mu=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\{\tau\,|\,\varepsilon(x,\tau)=0\}
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $q\geqslant p>1$ — некоторые заданные константы.

В плоскости σ, ε зависимость (1) имеет вид семейства восьмерок. Пользуясь терминологией [1] можно сказать, что первая и третья строки (1) описывают нагрузочную кривую, а разгрузочная кривая вырождается в точку (0,0) (что, в частности, отличает рассматриваемую зависимость (1) от тех, что изучались в [1]). Вторая и четвертая строки в (1) описывают семейство переходных кривых, обеспечивающих непрерывный возврат с ветви нагрузки. Отметим, что петли гистерезиса типа (1) не являются экзотикой, а встречаются на практике. Например, как следует из [2], зависимость (1) описывает силовые характеристики межвагонных поглощающих аппаратов.

Сплошная среда, обладающая гистерезисными свойствами была рассмотрена в [3], однако вид изученной в [3] петли гистерезиса иной, нежели (1) (кривая имеет вид эллипса). Поэтому характер колебаний в случае зависимости вида (1) оказался во многом другим.

Уравнение свободных продольных колебаний имеет вид

$$u_{tt}-\partial\sigma(u_x)/\partial x=0 \tag{2}$$

Если $\sigma=a|\varepsilon|^{b-2}\varepsilon$ $(a>0,\ b>1)$, то, как следует из [4], для любого заданного $l>0$ у этого уравнения существуют последовательность периодических по x и t решений вида $u_n=Z_n(x)T_n(t)$, для которых $u_n(0, t)=u_n(l, t)$.

Причем $Z_n(x)$ — решение с периодом $D(Z_n)=2l/n$ $(n=1, 2, \ldots)$ уравнения

$$2|Z_n'(x)|^b+b\lambda_nZ_n^2(x)=b\lambda_n \tag{3}$$

$$\lambda_n=2(4\sqrt{\pi}\Gamma(1-1/b)/(D(Z_n)\Gamma(^3/_2-1/b)))^b/b$$

а $T_n(t)$ — решение с периодом $G(T_n)$ уравнения

$$T_n''(t)+a(b-1)\lambda_nT_n(t)|T_n(t)|^{b-2}=0 \tag{4}$$

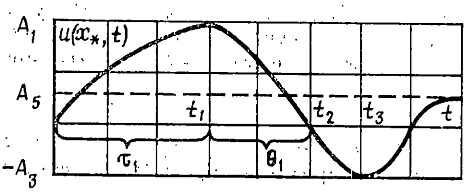
$$G(T_n)=2\sqrt{2\pi}\Gamma(1/b)b^{1/b}/(\Gamma(^1/_2+1/b)b(a(b-1)\lambda_nC^{1-2/b})^{1/b}$$

$$C_n=(T_n'(t))^2/2+(a(b-1)\lambda_n|T_n(t)|^b/b$$

Для уравнения (2) поставим начальные и граничные условия

$$u(x, 0)=0, \; u_t(x, 0)=AZ_n(x), \; u(0, t)=u(l, t) \tag{5}$$

Здесь $Z_n(x)$ — решение уравнения (3) при $b=p$, $Z_n(0)=0(Z_n'(0)>0)$, $A>0$ — произвольная константа, играющая роль максимальной начальной амплитуды в пучности стоячей волны. Эта стоячая волна строится поша-



говым алгоритмом по времени, путем последовательного решения уравнения (2). В тот момент времени, когда $u_xu_{xt}=0$, происходит переключение с одной строки зависимости (1) на другую.

Теорема. Существует решение задачи (2), (5) с зависимостью $\sigma(\varepsilon)$ вида (1) обладающее следующими свойствами: для каждого $n=1, 2, \ldots$ найдется последовательность моментов переключения $0=t_0<t_1<\ldots$ таких, что поочередно на временных интервалах $[t_j, t_{j+1}]$ функции $u=Z_n(x)T_{n,j}(t)$ являются решениями уравнения (2), причем

$$\tau_{j+1}=\tau_1((q/p)(\alpha/\beta)^{p/2-1})^{j/p}$$

$$\theta_{j+1}=\theta_1((q/p)(\alpha/\beta)^{q/2-1})^{j/q}$$

$$\tau_1=\sqrt{\pi}\Gamma(1/p)/(2\alpha\lambda_np(p-1)\Gamma(1/2+1/p)A^{p/2-1})$$

$$\theta_1=\sqrt{\pi}\Gamma(1/p)/(2\alpha\lambda_nq(p-1)\Gamma(1/2+1/p)A^{p/q-p/q})$$

$$A_{4j-1}=A((\alpha p)/(\beta q))^{j/p}, \; A_{4j+1}=A_3((\beta p)/(\alpha q))^{j/p}$$

$$A_0=A, \; A_{2j}=A_{2j-1}, \; \tau_j=t_{2j}-t_{2j-2}, \; \theta_j=t_{2j}-t_{2j-1} \; (j=0, 1, \ldots) \tag{6}$$

Примерный вид такого решения $u(x_*, t)$ при $n=1$, x_* $l/2$ показан на фигуре.

Доказательство. Полагая $n=1$ построим решение, обладающего сформулированными свойствами.

Первый шаг. Разделяя переменные в (2), где зависимость $\sigma(\varepsilon)$ описывается первой строкой (1) получаем, что $u=Z_1(x)T_{1,1}(t)$ — решение этого уравнения, где $T_{1,1}(t)$ — решение уравнения (4) при $a=\alpha$, $b=p$:

$$T_{1,1}(0)=0; \quad T_{1,1}'(0)=(2\alpha\lambda_1(p-1)A_1^p/p)^{1/2}, \quad A_1=A$$

$$t_1=G(T_{1,1})/4=\sqrt{\pi}\Gamma(1/p)/((2\alpha\lambda_1p(p-1)A^{p-2}))^{1/2}\Gamma(1/2-1/p)) \tag{7}$$

Второй шаг. В момент $t=t_1$, происходит переключение с первой строки зависимости $\sigma(\varepsilon)$ (1) на вторую. Поэтому уравнение (2) приобретает вид:

$$u_{tt}-\alpha A_1\partial(|Z_1'(x)|^{p-q}|u_x|^{q-2}u_x)/\partial x=0 \tag{8}$$

Начальные условия для этого уравнения принимаем такими:

$$u(x, t_1) = Z_1(x) T_{1,1}(t_1) = A_1 Z_1(x), \quad u_t(x, t_1) = Z_1(x) T'_{1,1}(t_1) \tag{9}$$

Разделяя переменные в (2) получаем, что $u = Z_1(x) T_{1,2}(t)$ – решение уравнения (2), где $T_{1,2}(t)$ – решение (4) при

$$Q = \alpha(p-1) A^{p-q}/(q-1), \quad b = q, \quad T_{1,2}(t_1) = A_1, \quad T'_{1,2}(t_1) = 0, \quad A_2 = A_1 \tag{10}$$

$$t_2 = t_1 + G(T_{1,2})/4 = t_1 + \sqrt{\pi}\Gamma(1/q)/(\Gamma(1/2+1/q)(2\alpha\lambda_1 q(p-1) A_1{}^{p(q-2)/q})^{1/2})$$

Третий шаг. В момент $t = t_2$ происходит переключение со второй строки зависимости $\sigma(\varepsilon)$ (1) на третью. Начальные условия для соответствующего уравнения (2) принимаем такими:

$$u(x, t_2) = 0, \quad u_t(x, t_2) = Z_1(x) T'_{1,2}(t_2) = -Z_2(x)(A_1{}^p 2\alpha\lambda_1 p/q)^{1/2} \tag{11}$$

Дальнейшее построение решения совершенно аналогично первому шагу с измененным начальным моментом времени и заменой $T'_{1,1}(0)$ на $T'_{1,2}(t_2)$. Поэтому

$$A_3 = A_1((\alpha p)/(\beta q))^{1/p}$$

$$t_3 = t_2 + \sqrt{\pi}\Gamma(1/p)((\beta q)/\alpha p)^{p/2-1}/(\Gamma(1/2+1/p)(2\lambda_1 p(p-1) A^{p-2})^{1/2})$$

Далее все шаги повторяются с очевидными изменениями.

Отметим, что из (6) получается следствие: если $(p-2)(q-2) \geqslant 0$, то соответствующая нелинейная «струна» издает звук повышающейся $(p<2)$ или понижающейся $(p>2)$ частоты при уменьшении амплитуды, что согласуется с [4].

Если $D(Z_n) = 2l/n$ $(n>1)$, то отрезок $[0, l]$ нужно разбить на промежутки длиной $D(Z_n)/4$, внутри каждого из которых $Z_n(x)$ и $Z_n'(x)$ сохраняют знак. При этом $u(x, 0) = 0$, а $u_t(x, 0) = A Z_n(x)$, либо $u_t(x, 0) = A Z_n(x)((\alpha p)/(\beta q))^{1/p}$.

Отметим, что в уравнение (2) можно добавить слагаемые $r_1 u_t$, $r_2 u_{xxt} |u_{xt}|^{p-2}$, характеризующие рассеяние энергии из-за сил внешнего и внутреннего сопротивления движению, а также добавить правую часть вида $Z_n(x) f(t)$, где $f(t)$ – заданная функция, а $Z_n(x)$ имеет тот же смысл, что и выше. Тогда, как и в [5], где разобран случай отсутствия гистерезиса, можно построить аналогичные решения вида $Z_n(x) T(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.
2. *Вершинский С. В., Данилов В. Н., Челноков И. И.* Динамика вагона. М.: Транспорт, 1978. 352 с.
3. *Панов Д. Ю.* О крутильных колебаниях стержня при наличии упругого гистерезиса // Прикл. матем. и мех. 1940. Т. 4. № 1. С. 65–78.
4. *Филимонов А. М.* Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2076–2084.
5. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Периодические колебания в нелинейных одномерных сплошных средах // IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев: Наук. думка. 1984. С. 274–276.

Москва

Поступила в редакцию 21.III.1990