МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3.01

Ю. Д. КОПЕЙКИН, В. М. ХВИСЕВИЧ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Интегральная формула общего решения дифференциальных уравнений стационарной термоупругости для пространства трех измерений в декартовых координатах получена в статье [1]. По сравнению с формулой Сомилиана указанная формула содержит так называемые температурные добавки в виде термоупругих потенциалов простого и двойного слоев.

1. Рассмотрим трехмерную краевую задачу для односвязной области. На граничной поверхности S заданы значения $f_i(x_s)$ усилий $p_i(x)$ и значения $F(x_s)$ температуры. Квазистационарная задача распадается на две краевые задачи.

Поле температуры $T(x)$ разыскивается в форме ньютоновского потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\varkappa(y)$:

$$T(x)=\oint_S \varkappa(y)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS_y,\qquad r=|y-x| \tag{1.1}$$

Из граничного условия задачи Дирихле получаем интегральное уравнение

$$2\pi\varkappa(x_S)+\text{v.p.}\oint_S \varkappa(y)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS_y=F(x_S) \tag{1.2}$$

Здесь φ — угол между вектором $r=y-x$ и внешней нормалью n_y к S в точке интегрирования y.

Положим, что температура найдена квадратурой после решения уравнения (1.2). Тогда требуется отыскать поля упругих перемещений $u_i(x)$ и напряжений.

Перемещения u_i представим в виде суммы эластопотенциала простого слоя и термоупругого потенциала двойного слоя, т. е. температурной добавки, которая соответствует потенциалу (1.1):

$$u_i(x)=u_i^0+u_i^T=\oint_S\left[u_{ij}(x,y)\nu_j(y)+\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 r\varkappa(y)}{\partial y_i\,\partial n_y}\right]dS_y \tag{1.3}$$

В (1.3) через ν обозначен коэффициент Пуассона; α — температурный коэффициент линейного расширения; $u_{ij}(x,\ y)$ — фундаментальное решение Кельвина

$$u_{ij}(x,y)=\frac{(3-4\nu)\delta_{ij}+\beta_i\beta_j}{16\pi\mu r(1-\nu)},\qquad \beta_i=\frac{\partial r}{\partial y_i}=-\frac{\partial r}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

δ_{ij} — символ Кронекера, μ — модуль упругости второго рода.

Дифференцируя перемещения (1.3), найдем деформации ε_{ij}, которые внесем в формулы закона Дюгамеля. Получим напряжения

$$\sigma_{ij}(x)=\frac{1}{2(1-\nu)}\oint_S[3\beta_i\beta_j\beta_k+(1-2\nu)(\delta_{ik}\beta_j-\delta_{kj}\beta_i-\delta_{ij}\beta_k)]\nu_k(y)\frac{dS_y}{r^2}+$$

$$+\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\oint_S[n_i(y)\beta_j+n_j(y)\beta_i-(\delta_{ij}+3\beta_i\beta_j)\cos\varphi]\varkappa(y)\frac{dS_y}{r^2} \qquad (1.5)$$

В точках x_S границы S напряжения (1.5) изменяются скачком согласно формулам, составленным в статьях [2], [3]:

$$\sigma_{ij}(x_S)=2\pi\Big\{n_i(x_S)\nu_j(x_S)+n_j(x_S)\nu_i(x_S)-\delta_{ij}+$$

$$+\frac{\delta_{ij}-n_i(x_S)n_j(x_S)}{1-\nu}[\nu_n(x_S)-2\alpha(1+\nu)\varkappa(x_S)]\Big\}+\text{v.p.}\,\sigma_{ij}(x_S), \qquad (1.6)$$

$$\nu_n(x_S)=n_k(x_S)\nu_k(x_S)$$

Через $\text{v.p.}\sigma_{ij}(x_S)$ обозначены главные значения интегралов (1.5), которые при $x\to x_S$ становятся сингулярными интегралами.

Подставив значения (1.6) в граничные условия силового типа, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно вектора $\nu_i(y)$ плотности эластопотенциала простого слоя

$$2\pi\nu_i(x_s)+\frac{1}{2(1-\nu)}\oint_s[(1-2\nu)(\delta_{ik}\cos\psi+n_k(x_s)\beta_i-n_i(x_s)\beta_k)+$$

$$+3\beta_i\beta_k\cos\psi]\nu_k(y)\frac{dS_y}{r^2}=f_i(x_s)-\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\oint_S[n_i(y)\cos\psi+$$

$$+\beta_i n_j(y)n_j(x_s)-(n_i(x_s)+3\beta_i\cos\psi]\varkappa(y)\frac{dS_y}{r^2}, \qquad \cos\psi=n_k(x)\beta_k \qquad (1.7)$$

После решения уравнений (1.7) перемещения и напряжения в термоупругой области определяются квадратурами (1.3), (1.5). В граничных точках x_S предельные значения напряжений определяются по формулам (1.6).

2. Уравнения для осесимметричной (двумерной) задачи термоупругости, которые соответствуют написанным выше уравнениям трехмерной задачи можно получить путем интегрирования. Но сначала нужно записать уравнения (1.1)—(1.7) в цилиндрических координатах $\rho\vartheta z$. Такие преобразования выполнены в [3—5] [1], для краевых задач теории упругости. Поэтому здесь сделаем только температурные добавки.

В цилиндрических координатах имеем следующие соотношения:

$$r^2=\rho_x^2+\rho_y^2+2\rho_x\rho_y\cos\theta+Z^2, \quad \theta=\vartheta_y-\vartheta_x, \quad Z=z_y-z_x$$

$$\beta_{\rho x}=-\frac{\partial r}{\partial\rho_x}=\frac{\rho_y\cos\theta-\rho_x}{r}, \quad \beta_{\vartheta x}=-\frac{\partial r}{\rho_x\,\partial\vartheta_x}=\frac{\rho_y\sin\theta}{r}, \quad \beta_{zx}=-\frac{\partial r}{\partial z_x}=\frac{Z}{r}$$

$$\beta_{\rho y}=\frac{\partial r}{\partial\rho_y}=\frac{\rho_y-\rho_x\cos\theta}{r}, \quad \beta_{\vartheta y}=\frac{\partial r}{\rho_y\,\partial\vartheta_y}=\frac{\rho_x\sin\theta}{r}, \quad \beta_{zx}=\frac{\partial r}{\partial z_y}=\beta_{zy} \qquad (2.1)$$

[1] *Копейкин Ю. Д.* Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела: Дис. д-ра физ.-мат. н. М., 1969. С. 280.

В случае поверхности вращения S будет $n_{\vartheta y}=n_{\vartheta x}=0$, так как нормаль к S лежит в меридиональном сечении. Поэтому

$$\cos\varphi=n_{\rho y}\beta_{\rho y}+n_{zy}\beta_{zy},\quad \cos\psi=n_{\rho x}\beta_{\rho x}+n_{zx}\beta_{zx} \tag{2.2}$$

Буквенные индексы i и j формул (1.1)—(1.7) в осесимметричной задаче принимают значения ρ, ϑ, z. Вектор $u_i(x)$ имеет только два элемента: u — перемещение по оси ρ и w — перемещение по оси z. Упругие составляющие u^0, w^0 переписывать не будем; напишем подробно только температурные добавки u^T, w^T, так что

$$\begin{gathered}u(x)=u^0(x)-\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1+\nu}{1-\nu}\oint\limits_s\beta_{\rho x}\frac{\cos\varphi}{r}\varkappa(y)\,dS_y\\ w(x)=w^0(x)-\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1+\nu}{1-\nu}\oint\limits_s\left(\frac{\beta_{zx}}{r}\cos\varphi-\frac{n_{zy}}{r}\right)\varkappa(y)\,dS_y\end{gathered} \tag{2.3}$$

Введем обозначения для девяти интегралов, из которых будут состоять все получаемые выражения

$$\begin{gathered}I_1=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{r},\quad I_2=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{r^3},\quad I_3=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{r^3}\\ I_4=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r},\quad I_5=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^3},\quad I_6=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{r^5}\\ I_7=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{r^5},\quad I_8=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^3\theta\,d\theta}{r^5},\quad I_9=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^5}\end{gathered} \tag{2.4}$$

В уравнениях (2.3) положим $dS_y=\rho_y d\theta dl_y$, где dl_y элемент дуги контура L меридионального сечения тела вращения. Неизвестная плотность $\varkappa(y)$ потенциала не зависит от θ, поэтому ядра интегралов можно проинтегрировать по θ от нуля до 2π. В (2.3) останутся после этого только контурные интегралы для двумерных осесимметричных задач, причем их ядра будут выражены функциями I_1—I_9, которые были вычислены ранее [2].

Таким образом вместо (2.3) получаем осесимметричные термоупругие потенциалы для перемещений, содержащие одномерные интегралы

$$\begin{gathered}u(x)=u^0(x)-\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int\limits_L\{n_{\rho y}[(\rho_x^2+\rho_y^2)I_2-\rho_x\rho_y(I_3+I_5)-I_1]+\\ +n_{zy}Z(\rho_yI_2-\rho_xI_5)\}\rho_y\varkappa(y)\,dl_y\\ w(x)=w^0(x)-\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int\limits_L[n_{\rho y}Z(\rho_yI_5-\rho_xI_2)+n_{zy}(Z^2I_5-I_4)]\rho_y\varkappa(y)\,dl_y\end{gathered} \tag{2.5}$$

В описанном порядке получаем из (1.5) одномерные потенциалы для напряжений

$$\sigma_{\rho\rho}(x)=\sigma_{\rho\rho}^0-\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int\limits_L\{n_{\rho y}[4\rho_yI_5-2\rho_xI_2-2\rho_yI_3-3\rho_y(\rho_y^2+Z^2)I_9+3\rho_y^3I_7-$$

[2] См. указ. публик. с. 000.

$$-3\rho_x\rho_y^2 I_8+3\rho_x(\rho_y^2+Z^2)I_6]+n_{zy}[4I_5-3(\rho_y^2+Z^2)I_9+3\rho_y^2 I_7]Z\}\rho_y\varkappa(y)dl_y$$

$$\sigma_{zz}(x)=\sigma_{zz}^0-\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int_L[n_{\rho y}(\rho_y I_5-\rho_x I_2+3Z^2\rho_y I_9-3Z^2\rho_x I_6)+$$

$$+n_{zy}Z(3Z^2 I_9-I_5)]\rho_y\varkappa(y)dl_y$$

$$\sigma_{\rho z}(x)=\sigma_{\rho z}^0-\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int_L\{n_{\rho y}Z[3(\rho_x^2+\rho_y^2)I_6-I_2-3\rho_x\rho_y I_9-3\rho_x\rho_y I_7]+$$

$$+n_{zy}(\rho_x I_5-\rho_y I_2-3Z^2\rho_x I_9+3Z^2\rho_y I_6)\}\rho_y\varkappa(y)dl_y$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(x)=\sigma_{\vartheta\vartheta}^0-\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int_L\left\{n_{\rho y}\left[\rho_y I_5+\frac{\rho_y^2-\rho_x^2}{\rho_x}I_2-\frac{1}{\rho_x}I_1-\rho_y I_3\right]+\right.$$

$$\left.+n_{zy}\left(\frac{\rho_y}{\rho_x}I_2+I_5\right)Z\right\}\rho_y\varkappa(y)dl_y \qquad (2.6)$$

Формулы скачка (1.6) для осесимметричных напряжений (2.6) принимают вид

$$\sigma_{\rho\rho}(x_s)=\frac{1}{1-\nu}[\nu_\rho(x_s)(2-\nu-n_{\rho x}^2)n_{\rho x}+\nu_z(x_s)(\nu-n_{\rho x}^2)n_{zx}]-$$

$$-\frac{2\alpha(1+\nu)}{1-\nu}\varkappa(x_s)n_{zx}^2+v.p.\sigma_{\rho\rho}(x_s)$$

$$\sigma_{zz}(x_s)=\frac{1}{1-\nu}[\nu_\rho(x_s)(\nu-n_{zx}^2)n_{\rho x}+\nu_z(x_s)(2-\nu-n_{zx}^2)n_{zx}]-$$

$$-2\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\varkappa(x_s)n_{\rho x}^2+v.p.\sigma_{zz}(x_s) \qquad (2.7)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(x_s)=\frac{\nu}{1-\nu}(\nu_\rho(x_s)\cdot n_{\rho x}+\nu_z(x_s)n_{zx})-2\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\varkappa(x_s)+v.p.\sigma_{\vartheta\vartheta}(x_s)$$

$$\sigma_{\rho z}(x_s)=\frac{1}{1+\nu}[\nu_\rho(x_s)(1-\nu-n_{\rho x}^2)n_{zx}+\nu_z(x_s)(1-\nu-n_{zx}^2)n_{\rho x}+$$

$$+2\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}n_{\rho x}n_{zx}\varkappa(x_s)+v.p.\sigma_{\rho z}(x_s)$$

Через $v.p.\sigma_{ij}(x_s)$ обозначены интегралы (2.6), которые становятся сингулярными при $x\to x_s$ и имеют смысл главного значения по Коши.

Наконец, подставляем предельные значения напряжений (2.7) в граничные условия и получаем систему сингулярных интегральных уравнений для осесимметричной термоупругой краевой задачи.

$$2\pi\nu_i(x_s)+v.p.\sigma_{ij}(x_s)n_{jx}(x_s)=f_i(x_s) \qquad (2.8)$$

Уравнения (2.8) получены из уравнений (1.7) путем однократного интегрирования и они заменяют уравнения (1.7) в осесимметричных задачах.

Осуществлено численное решение системы сингулярных интегральных уравнений (2.8) на ЭВМ.

Для вычисления сингулярных интегралов применялся способ описанный в статье [6].

В качестве примера реализовали краевую задачу термоупругости для полой **сферы**. Рассматриваемая область ($^1/_4$ часть меридионального сечения шарового сегмента) кусочно-гладкая с выступающими углами. Граница области имеет три куска (2 дуги окружности и прямая). Каждый кусок разбивали на 4 элемента.

Разработанный алгоритм имеет высокую точность. В этом можно убедиться, сравнивая результаты численного решения с аналитическим. Даже при таком количестве элементов дискретизации границы области погрешность составила сотые доли процента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копейкин Ю. Д., Шишкин В. П.* Интегральная форма общего решения уравнений стационарной термоупругости // ПММ. 1986. Т. 48. Вып. 1. С. 166–169.
2. *Копейкин Ю. Д.* Интегральные уравнения пространственных задач статики упругого тела // Прикл. механика. 1965. Т. 1. Вып. 5. С. 29–35.
3. *Копейкин Ю. Д., Мартынчук В. Д.* Интегральные уравнения второй краевой задачи о равновесии упругого тела вращения // Прикладная механика. 1967. Т. 3. Вып. 2. С. 29–39.
4. *Копейкин Ю. Д., Калинин А. А.* Прямое решение осесимметричной второй краевой задачи теории упругости методом бигармонических потенциалов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1972. № 3. С. 85–90.
5. *Копейкин Ю. Д., Шишкин В. П.* Прямое решение краевых задач теории упругости для тел вращения на основе интегральной формулы Сомилиана // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1977. № 3. С. 35–41.
6. *Бормот Ю. Л.* Численный анализ методом потенциала пространственного напряженного состояния элементов конструкций // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 42–44.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1990