МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

Статья является посмертной публикацией выдающегося советского механика Давида Иосифовича Шермана. В этом году ему исполнилось бы 85 лет.

УДК 539.3

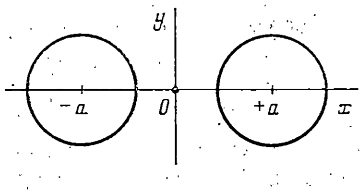
Д. И. ШЕРМАН

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ [1]

В работе рассматривается вопрос о напряженном состоянии неограниченной упругой анизотропной среды, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями. При этом использован предложенный в свое время автором способ изучения упругих изотропных неодносвязных плоских сред [2], предполагающий введение на одном из контуров вспомогательной функции $\omega(t)$.

Этот способ и для этого более сложного случая оказался эффективным и привел к довольно оправданным положительным результатам.

1. Допустим, что упругая анизотропная среда заполняет неограниченную область S в плоскости $z=x+iy$, ослабленную двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиуса R [1]. Окружности, ограничивающие отверстия, назовем L_1 и L_2; прямую, соединяющую их центры, примем за направление оси абсцисс; аффиксы центров обозначим через $-a$ и a, так что начало координат помещено в середине отрезка длиной $2a$ (фигура). Предположим, что к краям отверстий приложены известные внешние силы. В этом случае задача о плоско-деформированном состоянии среды S сводится к определению двух функций $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$, регулярных от своих переменных $z_1=x+\mu_1 y$ и $z_2=x+\mu_2 y$ в соответственных областях S_1 и S_2, где μ_1 и μ_2 — вообще говоря, комплексные параметры, характеризующие анизотропию среды. Область S переходит последовательно в области S_1 и S_2 при помощи указанных (неаналитических) линейных преобразований. Для нахождения функций $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ имеем следующие краевые условия



$$(1+i\mu_1)F_1(\zeta_1)+(1+i\bar{\mu}_1)\overline{F_1(\zeta_1)}+(1+i\mu_2)F_2(\zeta_2)+ \\ +(1+i\bar{\mu}_2)\overline{F_2(\zeta_2)}=f_1(t)+C_1 \text{ на } L_1 \qquad (1.1)$$

$$(1+i\mu_1)F_1(\zeta_1)+(1+i\bar{\mu}_1)\overline{F_1(\zeta_1)}+(1+i\mu_2)F_2(\zeta_2)+ \\ +(1+i\bar{\mu}_2)\overline{F_2(\zeta_2)}=f_2(t) \text{ на } L_2 \qquad (1.2)$$

где t — аффикс точки L_1 и L_2, а ζ_1 и ζ_2 — аффиксы точек кривых (эллипсов), $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$ и $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$, являющихся отображениями L_1, L_2 в плоскости z_1 и z_2. Введем на окружности L_2 вспомогательную функцию $\omega(t)$

[1] Отверстия могут быть различными.

по условию [2]:

$$[(1+i\mu_1)F_1(\zeta_1)+(1+i\mu_2)F_2(\zeta_2)]-[(1+i\overline{\mu}_1)\overline{F_1(\zeta_1)}+$$
$$+(1+i\overline{\mu}_2)\overline{F_2(\zeta_2)}]=2\omega(t) \qquad (1.3)$$

Складывая и вычитая почленно одно из другого равенства (1.2) и (1.3), будем иметь такие соотношения на L_2:

$$(1+i\mu_1)F_1(\zeta_1)+(1+i\mu_2)F_2(\zeta_2)=\omega(t)+f_2(t)$$
$$(1+i\overline{\mu}_1)\overline{F_1(\zeta_1)}+(1+i\overline{\mu}_2)\overline{F_2(\zeta_2)}=-\omega(t)+f_2(t) \qquad (1.4)$$

Перейдя во втором из них к сопряженным значениям и разрешив его совместно с первым соотношением относительной функций $F_1(\zeta_1)$ и $F_2(\zeta_2)$, получим на L_2:

$$F_1(\zeta_1)=\frac{1}{2i(\mu_1-\mu_2)}[(1-i\mu_2)\omega(t)+(1+i\mu_2)\overline{\omega(t)}]+$$
$$+\frac{1}{2i(\mu_1-\mu_2)}[(1-i\mu_2)f_2(t)-(1+i\mu_2)\overline{f_2(t)}] \qquad (1.5)$$

$$F_2(\zeta_2)=-\frac{1}{2i(\mu_1-\mu_2)}[(1-i\mu_1)\omega(t)+(1+i\mu_1)\overline{\omega(t)}]-$$
$$-\frac{1}{2i(\mu_1-\mu_2)}[(1-i\mu_1)f_2(t)-(1+i\mu_1)\overline{f_2(t)}] \qquad (1.6)$$

Те же указанные выше (Неаналитические в S_1 и S_2) преобразования принимают на контуре L_2 вид

$$t_1+a=\frac{1}{2}\left[(1-i\mu_1)(t+a)+(1+i\mu_1)\frac{R^2}{t+a}\right] \quad \text{на} \quad L_2^{(1)} \qquad (1.7)$$

$$t_2+a=\frac{1}{2}\left[(1-i\mu_2)(t+a)+(1+i\mu_2)\frac{R^2}{t+a}\right] \quad \text{на} \quad L_2^{(2)} \qquad (1.8)$$

Введем следующие обозначения

$$\lambda_1=(1+i\mu_1)/(1-i\mu_1), \quad \lambda_2=(1+i\mu_2)/(1-i\mu_2)$$
$$\varepsilon_{1,2}=(1-i\mu_1)/(2i(\mu_1-\mu_2)), \qquad \varepsilon_{2,1}=(1-i\mu_2)/(2i(\mu_1-\mu_2)) \qquad (1.9)$$

и остановимся в дальнейшем подробно на случае сильной анизотропии ортотропного тела. В частности, прибегая далее к иллюстрации отдельных и, как правило, наиболее ответственных моментов процесса, будем брать параметры анизотропии $\mu_1=0{,}1\ i$, $\mu_2=10\ i$. При этом величины, выписанные в последнем равенстве, примут значения

$$\lambda_1=-\lambda_2=\lambda=9/11, \quad \varepsilon_{1,2}=1/18, \quad \varepsilon_{2,1}=5/9 \qquad (1.10)$$

Эллипсы $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$, лежащие в плоскости $z_1=x+\mu_1 y$, при взятых параметрах сильной анизотропии — удлиненные (с полуосями $a_1=R$ и $b_1=0{,}1\,R$). Другие же два эллипса $L_1^{(2)}$ и $L_2^{(2)}$, расположенные в плоскости $z_2=x+\mu_2 y$, напротив, имеют резко вытянутую форму (их полуоси $a_2=R$ и $b_2=10\,R$), что, очевидно, в значительной степени усложняет рассмотрение

Пока будем вести исследование для общего случая анизотропной среды. При помощи обозначений (1.9) придадим (1.5) и (1.6) вид

$$F_1(\zeta_1)=\varepsilon_{2,1}[\omega(t)+\lambda_2\overline{\omega(t)}]+P_1(t) \quad \text{на} \quad L_2 \qquad (1.11)$$
$$F_2(\zeta_2)=-\varepsilon_{1,2}[\omega(t)+\lambda_1\overline{\omega(t)}]+P_2(t) \quad \text{на} \quad L_2$$

где свободные члены $P_1(t)$ и $P_2(t)$ таковы

$$P_1(t)=\varepsilon_{2,1}[f(t)-\lambda_2\overline{f(t)}],\quad P_2(t)=-\varepsilon_{1,2}[f(t)-\lambda_1\overline{f(t)}] \tag{1.12}$$

Следуя основному принципу развиваемой методики, введем новые функции $F_1^*(z_1)$ и $F_2^*(z_2)$, из которых первая регулярна всюду вне эллипса $L_1^{(1)}$ в плоскости z_1, а вторая — вне эллипса $L_1^{(2)}$ в плоскости z_2. Они даются формулами

$$F_1(z_1)=F_1^*(z_1)+\frac{\varepsilon_{2,1}}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{\omega(t)+\lambda_2\overline{\omega(t)}}{\zeta_1-z_1}\,d\zeta_1+R_1^{(0)}(z_1) \tag{1.13}$$

$$F_2(z_2)=F_2^*(z_2)-\frac{\varepsilon_{1,2}}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(2)}}\frac{\omega(t)+\lambda_1\overline{\omega(t)}}{\zeta_2-z_2}\,d\zeta_2+R_2^{(0)}(z_2) \tag{1.14}$$

причем в них известные функции

$$R_1^{(0)}(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{P_1(t)}{\zeta_1-z_1}\,d\zeta_1,\quad R_2^{(0)}(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(2)}}\frac{P_2(t)}{\zeta_2-z_2}\,d\zeta_2 \tag{1.15}$$

Для тех же функций внутри эллипсов $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$ поочередно имеем

$$F_1^*(z_1)=-\frac{\varepsilon_{2,1}}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{\omega(t)+\lambda_2\overline{\omega(t)}}{\zeta_1-z_1}\,d\zeta_1-R_1^{(0)}(z_1) \tag{1.16}$$

$$F_2^*(z_2)=\frac{\varepsilon_{1,2}}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(2)}}\frac{\omega(t)+\lambda_1\overline{\omega(t)}}{\zeta_2-z_2}\,d\zeta_2-R_2^{(0)}(z_2)$$

Искомую плотность $\omega(t)$ будем искать в форме комплексного ряда Фурье с неизвестными коэффициентами

$$\omega(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k\left(\frac{t+a}{R}\right)^k+\alpha_{-k}\left(\frac{R}{t+a}\right)^k\right]$$

Целесообразно далее ассоциировать эти коэффициенты с функционалами

$$\alpha_n=-\frac{R^n}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega(t)}{(t+a)^{n+1}}\,dt\qquad(n=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots)$$

Из формул (1.7) и (1.8) нетрудно заключить, что преобразования

$$z_1+a=\frac{1}{2}\left[(1-i\mu_1)(z+a)+(1+i\mu_1)\frac{R^2}{z+a}\right] \tag{1.17}$$

$$z_2+a=\frac{1}{2}\left[(1-i\mu_2)(z+a)+(1+i\mu_2)\frac{R^2}{z+a}\right] \tag{1.18}$$

дают в проставленной последовательности конформное отображение внешности эллипсов $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$, расположенных соответственно в плоскостях z_1 и z_2, на внешность окружности L_2 в основной плоскости z.

Интегралы, содержащиеся в равенствах (1.13) и (1.14), суть функции от переменных z_1 и z_2, регулярные вне $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$. Подвергнем их преобразованию на основе формул (1.17) и (1.18). Простые выкладки дают

$$\frac{dt_1}{t_1-z_1}=\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{(t+a)-\lambda_1 R^2/(z+a)}-\frac{1}{t+a}\right)dt$$

$$\frac{dt_2}{t_2-z_2}=\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{(t+a)-\lambda_2 R^2/(z+a)}-\frac{1}{t+a}\right)dt \tag{1.19}$$

Наряду с этим имеем соотношения

$$\frac{1}{2i(\mu_1-\mu_2)}[(1-i\mu_1)\omega(t)+(1+i\mu_1)\overline{\omega(t)}]=\varepsilon_{1,2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_{1,k}\left(\frac{t+a}{R}\right)^k$$

$$\frac{1}{2i(\mu_1-\mu_2)}[(1-i\mu_2)\omega(t)+(1+i\mu_2)\overline{\omega(t)}]=\varepsilon_{2,1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_{2,k}\left(\frac{t+a}{R}\right)^k \tag{1.20}$$

В них величины $\beta_{1,k}$ и $\beta_{2,k}$ таковы

$$\beta_{1,k}=\alpha_k+\lambda_1\overline{\alpha}_{-k},\quad \beta_{2,k}=\alpha_k+\lambda_2\overline{\alpha}_{-k} \tag{1.21}$$

Отсюда легко приходим к соотношениям

$$\frac{\varepsilon_{2,1}}{2\pi i}\int_{L_2^{(1)}}\frac{\omega(t)+\lambda_2\overline{\omega(t)}}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1=\varepsilon_{2,1}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{2,-k}-\lambda_1^k\beta_{2,k})\left(\frac{R}{z+a}\right)^k \tag{1.22}$$

$$-\frac{\varepsilon_{1,2}}{2\pi i}\int_{L_2^{(2)}}\frac{\omega(t)+\lambda_1\overline{\omega(t)}}{t_2-z_2}dt_2=-\varepsilon_{1,2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{1,-k}-\lambda_2^k\beta_{1,k})\left(\frac{R}{z+a}\right)^k \tag{1.23}$$

Введем функции

$$\Delta^m(z)=(R/(z+a))^m\quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.24}$$

регулярные вне окружности L_2 а, стало быть, и внутри окружности L_1, и равные нулю на бесконечности.

При помощи соотношений (1.7) и (1.8) находим

$$\Delta^m(z)=\Delta_1^m(z_1),\ \Delta^m(z)=\Delta_2^m(z_2)\quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{1.25}$$

где под $\Delta_1^m(z_1)$ и $\Delta_2^m(z_2)$ — в предположении, что среда ортотропная — понимаются функции

$$\Delta_1^m(z_1)=\left[\frac{(z_1+a)-((z_1+a)^2-(1-|\mu_1|^2)R^2)^{1/2}}{(1-|\mu_1|)R}\right]^m \tag{1.26}$$

$$\Delta_2^m(z_2)=\left[\frac{(z_2+a)-((z_2+a)^2-(1-|\mu_2|^2)R^2)^{1/2}}{(1-|\mu_2|)R}\right]^m \tag{1.27}$$

Первая из них регулярна в плоскости z_1 вне эллипса $L_2^{(1)}$, а вторая — в плоскости z_2 вне эллипса $L_2^{(2)}$; кроме того, обе они обращаются в нуль на бесконечности. Таким образом, каждая из них регулярна внутри другого эллипса ($L_1^{(1)}$ или $L_1^{(2)}$), расположенного в плоскости ее определения. Отсюда следует, что внутри эллипсов $L_1^{(1)}$ и $L_1^{(2)}$ справедливы формулы Коши (обход кривых, по которым берутся интегралы, считается происходящим в направлении, противоположном движению часовой стрелки):

$$\Delta_1^m(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^{(1)}}\Delta_1^m(\zeta_1)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1},\quad \Delta_2^m(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^{(2)}}\Delta_2^m(\zeta_2)\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2} \tag{1.28}$$

Неаналитические преобразования, переводящие плоскость z соответственно в плоскости z_1 и z_2, выглядят так на контуре L_1:

$$\zeta_1-a=\tfrac{1}{2}[(1+|\mu_1|)(t-a)+(1-|\mu_1|)R^2/(t-a)] \tag{1.29}$$

$$\zeta_2-a=\tfrac{1}{2}[(1+|\mu_2|)(t-a)+(1-|\mu_2|)R^2/(t-a)] \tag{1.30}$$

Взяв эти предельные равенства во внимание, заключаем, что соотношения

$$z_1-a=\tfrac{1}{2}[(1+|\mu_1|)(z-a)+(1-|\mu_1|)R^2/(z-a)] \tag{1.31}$$

$$z_2-a=\tfrac{1}{2}[(1+|\mu_2|)(z-a)+(1-|\mu_2|)R^2/(z-a)] \tag{1.32}$$

дают (в названном порядке) конформное отображение внешности эллипсов $L_1^{(1)}$ и $L_1^{(2)}$ (по порядку в плоскости z_1, и затем z_2) на внешность окружности L_1 в плоскости z. Как видно, конформность этих преобразований нарушается внутри окружности L_1 в точках с аффиксами $a\pm((1-|\mu_1|)(1+|\mu_1|)^{-1})^{1/2}R$ и $a\pm((1-|\mu_2|)(1+|\mu_2|)^{-1})^{1/2}R$, являющихся нулями производных тех же выражений (1.31) и (1.32). Отсюда следует, что в действительности каждое из отображений будет конформным в плоскости z (вне окружности несколько меньшего радиуса, нежели R (охватываемой L_1). Указанные нули производных выражений (1.31) и (1.32) отвечают фокусам эллипсов $L_1^{(1)}$ и $L_1^{(2)}$ (в плоскостях z_1 и z_2) с аффиксами, равными $z_1^{(1,2)}=a\pm(1-|\mu_1|^2)^{1/2}R$ и $z_2^{(1,2)}=a\pm(1-|\mu_2|^2)^{1/2}R$.

Упомянутая окружность в плоскости z (содержащаяся в круге, ограниченном L_1) согласно (1.31) и (1.32) переходит в берега прямолинейных разрезов, соединяющих фокусы тех же эллипсов $L_1^{(1)}$ и $L_1^{(2)}$.

На основании, например, преобразования (1.31) имеем

$$\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}=\left[\frac{1}{t-z}+\frac{1}{(t-a)-\lambda R^2/(z-a)}-\frac{1}{t-a}\right]dt \tag{1.33}$$

где предполагается, что z_1 изменяется внутри эллипса $L_1^{(1)}$, не пересекая берегов разреза, а, значит, $|z-a|>((1-|\mu_1|)(1+|\mu_1|)^{-1})^{1/2}R$ и $\lambda R^2|(z-a)^{-1}|<\sqrt{\lambda}R<R$. В связи с (1.3) первому из соотношений (1.28) можно придать форму

$$\Delta_1^{(m)}(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\Delta_1^{(m)}(\zeta_1)\left[\frac{1}{t-z}+\frac{1}{(t-a)-\lambda R^2/(z-a)}-\frac{1}{t-a}\right]dt \tag{1.34}$$

На основе соотношения (1.31) функцию $\Delta_1^{(1)}(z_1)$, даваемую формулой (1.26), можно выразить через переменную z, по которой она будет регулярна в некотором концентрическом кольце, содержащем окружность L_1; на последней эта функция разложима в комплексный ряд Фурье

$$\Delta_1^{m}(\zeta_1)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\delta_{1\nu}^{(m)}\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} \tag{1.35}$$

где $\delta_{1\nu}^{(m)}$ — некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные. Пользуясь этим разложением, из предшествующей формулы (1.34) получим

$$\Delta_1^{m}(z_1)=\delta_{10}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1\nu}^{(m)}\left[\left(\frac{z-a}{R}\right)^{\nu}+\lambda_1^{\nu}\left(\frac{R}{z-a}\right)^{\nu}\right] \tag{1.36}$$

Учтя дополнительно первую из двух пар формул (они вытекают из (1.31) и (1.32):

$$\frac{R}{z-a}=\frac{1}{(1-|\mu_1|)}\left[\frac{z_1-a}{R}-\left(\left(\frac{z_1-a}{R}\right)^2-(1-|\mu_1|^2)\right)^{1/2}\right]$$

$$\frac{z-a}{R}=\frac{1}{(1+|\mu_1|)}\left[\frac{z_1-a}{R}+\left(\left(\frac{z_1-a}{R}\right)^2-(1-|\mu_1|^2)\right)^{1/2}\right] \tag{1.37}$$

$$\frac{R}{z-a}=-\frac{1}{(|\mu_2|-1)}\left[\frac{z_2-a}{R}-\left(\left(\frac{z_2-a}{R}\right)^2+(|\mu_2|^2-1)\right)^{1/2}\right]$$

$$\frac{z-a}{R}=\frac{1}{(|\mu_2|+1)}\left[\frac{z_2-a}{R}+\left(\left(\frac{z_2-a}{R}\right)^2+(|\mu_2|^2-1)\right)^{1/2}\right] \tag{1.38}$$

придадим соотношению (1.36) вид

$$\Delta_1^m(z_1)=\delta_{10}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1\nu}^{(m)}\left\{\frac{1}{(1+|\mu_1|)^\nu}\left[\frac{z_1-a}{R}+\left(\left(\frac{z_1-a}{R}\right)^2-(1-|\mu_1|^2)\right)^{1/2}\right]^\nu+\right.$$
$$\left.+\lambda^\nu\frac{1}{(1-|\mu_1|)^\nu}\left[\frac{z_1-a}{R}-\left(\left(\frac{z_1-a}{R}\right)^2-(1-|\mu_1|^2)\right)^{1/2}\right]^\nu\right\} \tag{1.39}$$

Эта формула сохраняет силу всюду внутри эллипса $L_1^{(1)}$ и по существу выражает разложение регулярной в эллипсе функции в ряд по полиномам типа Фабера [3]. Аналогичное разложение нетрудно выписать для функции $\Delta_2^m(z_2)$. Вид его таков

$$\Delta_2^m(z_2)=\delta_{20}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{2,\nu}^{(m)}\left\{\frac{1}{(1+|\mu_2|)^\nu}\left[\frac{z_2-a}{R}-\left(\left(\frac{z_2-a}{R}\right)^2+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+(|\mu_2|^2-1)\right)^{1/2}\right]^\nu+\lambda^\nu\frac{1}{(|\mu_2|-1)^\nu}\left[\frac{z_2-a}{R}\left(\left(\frac{z_2-a}{R}\right)^2+(|\mu_2|^2-1)\right)^{1/2}\right]^\nu\right\}$$

Эта формула справедлива внутри эллипса $L_1^{(2)}$ в плоскости z_2. Здесь $\delta_{2\nu}^{(m)}$ суть коэффициенты разложения Фурье на контуре L_1:

$$\Delta_2^m(\zeta_2)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\delta_{2\nu}^{(m)}\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu \tag{1.40}$$

Как и (1.36), предпоследнее разложение получается из формулы

$$\Delta_2^m(z_2)=\delta_{20}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{2\nu}^{(m)}\left[\left(\frac{z-a}{R}\right)^\nu+(-1)^\nu\lambda^\nu\left(\frac{R}{z-a}\right)^\nu\right] \tag{1.41}$$

по привлечении равенств (1.38). Более удобными, чем (1.35) и (1.40), являются формы разложения Фурье на контуре L_1, представляемые в предельном переходе формулами (1.36) и (1.41). Для удобства выпишем эти разложения

$$\Delta_1^m(\zeta_1)=\delta_{10}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1\nu}^{(m)}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right] \tag{1.42}$$

$$\Delta_2^m(\zeta_2)=\delta_{20}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{2\nu}^{(m)}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu}+(-1)^{\nu}\lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right]$$

Весьма важно располагать достаточно удобными рекуррентными формулами для нахождения величин $\delta_{j\nu}^{(m)}=(j=1,\ 2;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Для $m=1$ коэффициенты $\delta_{j\nu}^{(1)}=\delta_{j\nu}$ $(j=1,\ 2)$ незатруднительно подсчитать, опираясь на равенства (1.26) и (1.27). С другой стороны, знание $\delta_{j\nu}$ позволит воспользоваться некоей приемлемой рекуррентной формулой — ее не столь уже сложно вывести для определения всех тех коэффициентов $\delta_{j\nu}^{(m)}$ $(j=1,\ 2;\ m=2,\ 3,\ \ldots)$, в которых по ходу дела окажется надобность.

В силу (1.25), (1.26) и (1.27), формулы (1.13) и (1.14) приобретают вид

$$F_1(z_1)=F_1^*(z_1)+\varepsilon_{2,1}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{2,-k}-\lambda_1^k\beta_{2,k})\,\Delta_1^k(z_1)+R_1(z_1) \tag{1.43}$$

$$F_2(z_2)=F_2^*(z_2)-\varepsilon_{1,2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{1,-k}-\lambda_2^k\beta_{1,k})\,\Delta_2^k(z_2)+R_2(z_2)$$

Фигурирующие в (1.37) и (1.41) разложения справедливы на L_1. Введем обозначения

$$\chi_1^{(m)}(t)=\delta_{10}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1\nu}^{(m)}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu}+\lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right] \tag{1.44}$$

$$\chi_2^{(m)}(t)=\delta_{20}^{(m)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{2\nu}^{(m)}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu}+(-1)^{\nu}\lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right] \tag{1.45}$$

так, что на той же окружности L_1 имеем

$$\Delta_1^m(\zeta_1)=\chi_1^{(m)}(t),\quad \Delta_2^m(\zeta_2)=\chi_2^{(m)}(t) \tag{1.46}$$

Займемся теперь выводом рекуррентного соотношения для коэффициентов $\delta_{10}^{(m)}$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$. Непосредственно имеем на L_1 (здесь введены множители $\varepsilon_0={}^1/_2$ и $\varepsilon_\nu=1$ для $\nu>0$):

$$\Delta_1^{m+1}(\zeta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\delta_{1,k}^{(m)}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{k}+\lambda^{k}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{k}\right]\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\delta_{1,\nu}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu}+\lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right] \tag{1.47}$$

Разобьем второй множитель на сумму двух рядов, один из них в пределах $0\leqslant\nu\leqslant k$, а другой для $k+1\leqslant\nu<\infty$. Легко видеть, что для $\nu\leqslant k$ произведение

$$\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{k}+\lambda^{k}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{k}\right]\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu}+\lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right]=$$
$$=\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{k+\nu}+\lambda^{k+\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{k+\nu}\right]+\lambda^{\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{k-\nu}+\lambda^{k-\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{k-\nu}\right]$$

Поэтому первый из названных составляющих рядов, если учесть стоящий перед ним степенной двучлен, зависящий от индекса k, последовательно преобразуется так:

$$\sum_{\nu=0}^{k}\varepsilon_\nu\delta_{1,\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^k+\lambda^k\left(\frac{R}{t-a}\right)^k\right]\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]=$$

$$=\sum_{\nu=k}^{2k}\varepsilon_{\nu-k}\delta_{1,\nu-k}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k}\varepsilon_{k-\nu}\delta_{1,k-\nu}\lambda^{k-\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{2k}\delta_{1,|k-\nu|}\eta_{k-\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right] \qquad (1.48)$$

$$\eta_n=\lambda^n,\ n>0;\ \eta_n=1,\ n\leqslant 0$$

В соответствии с этим первая двойная сумма в (1.47) будет вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\delta_{1,k}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{2k}\delta_{1,|k-\nu|}\eta_{k-\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right] \qquad (1.49)$$

Займемся другим составляющим рядом, относящимся к тому же второму множителю в (1.47). Для $\nu>k$ произведение

$$\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^k+\lambda^k\left(\frac{R}{t-a}\right)^k\right]\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]=\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{k+\nu}+\right.$$

$$\left.+\lambda^{k+\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{k+\nu}\right]+\lambda^k\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu-k}+\lambda^{\nu-k}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu-k}\right]$$

и, значит, упомянутый второй множитель (с приданным ему предшествующим степенным двучленом) может быть записан так

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\delta_{1,\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^k+\lambda^k\left(\frac{R}{t-a}\right)^k\right]=$$

$$=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\delta_{1,\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{k+\nu}+\lambda^{k+\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{k+\nu}\right]+\lambda^k\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\delta_{1,\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu-k}+\right.$$

$$\left.+\lambda^{\nu-k}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu-k}\right]=\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\delta_{1,\nu-k}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]+$$

$$+\lambda^k\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1,k+\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu\right]=$$

$$= \sum_{\nu=2k+1}^{\infty} \delta_{1,|k-\nu|}\eta_{k-\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} + \lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right] +$$

$$+\lambda^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1,k+\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} + \lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right]$$

В связи с последним равенством вторая двойная сумма (в том же расчлененном соотношении (1.47)) примет форму

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\delta_{1,k}^{(m)}\left\{\sum_{\nu=2k+1}^{\infty}\delta_{1,|k-\nu|}\eta_{k-\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} + \lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right] +\right.$$

$$\left.+\lambda^{k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1,k+\nu}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} + \lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right]\right\}$$

Выделив из первой двойной суммы (1.49) слагаемое, отвечающее $\nu=0$, приведем ее к виду

$$\Delta_m^{m+1}(\zeta_1) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\lambda^k\delta_{1,k}^{(m)}\delta_{1,k} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} +\right.$$

$$\left.+\lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\delta_{1,k}^{(m)}\left(\delta_{1,|k-\nu|}\eta_{k-\nu}+\delta_{1,k+\nu}\lambda^{k}\right)$$

С другой стороны, согласно (1.42) имеем

$$\Delta_1^{m+1}(\zeta_1) = \delta_{1,0}^{(m+1)} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{1,\nu}^{(m+1)}\left[\left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} + \lambda^{\nu}\left(\frac{R}{t-a}\right)^{\nu}\right]$$

Сопоставляя это равенство с предшествующим, найдем

$$\delta_{1,0}^{(m+1)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\lambda^k\delta_{1,k}^{(m)}\delta_{1,k}, \qquad \delta_{1,\nu}^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\delta_{1,k}^{(m)}\left(\delta_{1,|k-\nu|}\eta_{k-\nu}+\lambda^k\delta_{1,k+\nu}\right)$$

$(\nu=1, 2, 3, \ldots; m=1, 2, 3, \ldots)$

Полагая в этих формулах $m=1$, придем к значениям $\delta_{1,\nu}^{(2)}$. Тогда, взяв в них $m=2$, получим все $\delta_{1,\nu}^{(3)}$ и т. д. Величины же $\delta_{1,\nu}$ можно подсчитать непосредственно. Аналогичные рекуррентные формулы могут быть выписаны и для коэффициентов $\delta_{2,\nu}^{(m)}$. Перейдем к нахождению $\delta_{1,\nu}$ и $\delta_{2,\nu}$.

Функции $\Delta_1(z_1)$, даваемой равенством (1.26), можно придать вид (напомним, что $\mu_1=01i$; $\mu_2=10i$ и $2a=2{,}2R$):

$$\Delta_1(z_1) = \frac{(z_1-a)+2a-([(z_1-a)+kR][(z_1-a)+lR)^{1/2}}{(1-|\mu_1|)R}$$

$$k=2{,}2-(1-|\mu_1|^2)^{1/2}, \quad l=2{,}2+(1-|\mu_1|^2)^{1/2}$$

Учитывая к тому же преобразование (1.31), будем иметь

$$\Delta_1(z_1)=\frac{11}{18}\frac{z-a}{R}+\frac{1}{2}\frac{R}{z-a}+\frac{22}{9}-\frac{11}{18}(|w_{12}^{(1)}||w_{22}^{(1)}|)^{1/2}(N_1(z))^{1/2}$$

причем значащаяся под знаком радикала функция $N_1(z)$ имеет вид

$$N_1(z)=\left(1-w_{1,1}^{(1)}\frac{R}{z-a}\right)\left(1-w_{2,1}^{(1)}\frac{R}{z-a}\right)\left(1-\frac{1}{w^{(1)}_{1,2}}\frac{z-a}{R}\right)\left(1-\frac{1}{w^{(1)}_{2,2}}\frac{z-a}{R}\right) \tag{1.50}$$

где приняты обозначения

$$w_{1,1}^{(1)}=[-10k+(100k^2-99)^{1/2}]/11=-0,47751;$$
$$w_{1,2}^{(1)}=[-10k-(100k^2-99)^{1/2}]/11=-1,71342;$$
$$w_{2,1}^{(1)}=[-10l+(100l^2-99)^{1/2}]/11=-0,14444;$$
$$w_{2,2}^{(1)}=[-10l-(100l^2-99)^{1/2}]/11=-5,66463.$$

Как видно, наличие $w_{1,2}^{(1)}$ несколько ухудшает сходимость разложения Фурье на контуре L_1 последнего слагаемого в (1.53). Тем не менее, все же выполнив это разложение, получим нужные величины $\delta_{1\nu}$.

Перейдем теперь к функции (1.27), определяемой в плоскости z_2 для степенного показателя $m=1$. Имеем

$$\Delta_2(z_2)=\frac{(z_2-a)+2a-([(z_2-a)+k_2R][(z_2-a)+l_2R])^{1/2}}{(1-|\mu_2|)R}$$

$$k_2=(2,2+i3\sqrt{11}),\qquad l_2=(2,2-i3\sqrt{11})$$

Используя далее (1.32), получим

$$\Delta_2(z_2)=-\frac{11}{18}\frac{z-a}{R}+\frac{1}{2}\frac{R}{z-a}-\frac{2,2}{9}+\frac{11}{18}|w_{2,1}^{(2)}|(N_2(z))^{1/2} \tag{1.51}$$

причем содержащаяся под радикалом функция такова

$$N_2(z)=\left(1-w_{1,1}^{(2)}\frac{R}{z-a}\right)\left(1-w_{2,2}^{(2)}\frac{R}{z-a}\right)\left(1-\frac{1}{w^{(2)}_{2,1}}\frac{z-a}{R}\right)\left(1-\frac{1}{w^{(2)}_{1,2}}\frac{z-a}{R}\right)$$

Входящие в нее $w_{1,1}^{(2)},\ldots,w_{1,2}^{(2)}$ — комплексные величины, равные

$$w_{1,1}^{(2)}=\xi_{11}^{(2)}-i\eta_{11}^{(2)},\quad \xi_{1,1}^{(2)}=0,24945,\quad \eta_{1,1}^{(2)}=-0,50203,\quad |w_{1,1}^{(2)}|=0,56059$$
$$w_{1,2}^{(2)}=\xi_{1,2}^{(2)}+i\eta_{12}^{(2)},\quad \xi_{1,2}^{(2)}=-0,64945,\quad \eta_{1,2}^{(2)}=-1,30704,\quad |w_{1,2}^{(2)}|=1,45950$$
$$w_{2,1}^{(2)}=\xi_{2,1}^{(2)}+i\eta_{2,1}^{(2)},\quad \xi_{2,1}^{(2)}=-0,64945,\quad \eta_{2,1}^{(2)}=1,30704,\quad w_{1,2}^{(2)}=\overline{w}_{2,1}^{(2)}$$
$$w_{2,2}^{(2)}=\xi_{2,2}^{(2)}+i\eta_{2,2}^{(2)},\quad \xi_{2,2}^{(2)}=0,24945,\quad \eta_{2,2}^{(2)}=0,50203,\quad w_{1,1}^{(2)}=\overline{w}_{2,2}^{(2)}$$
$$1/w_{1,2}^{(2)}=\overline{w}_{1,2}^{(2)}/|w_{1,2}^{(2)}|^2=-0,30489+i0,61359$$

Как и следовало ожидать, разложение Фурье на окружности L_1 последнего слагаемого в (1.51) сходится медленнее, нежели в предыдущем случае. Ниже укажем в силу каких именно обстоятельств будет заметно ослабление влияния этого дефекта на заключительном этапе.

2. Перейдем теперь к краевому условию (1.1) на окружности L_1. Как указывалось ранее, функции $F_1^*(z_1)$ и $F_2^*(z_2)$ регулярны вне $L_1^{(1)}$ в плоскости z_1 и вне $L_1^{(2)}$ в плоскости z_2. Принимая во внимание конформные преобразования (1.31) и (1.32), положим

$$F_1^*(z_1)=G_1^*(z),\quad F_2^*(z_2)=G_2^*(z),\quad G_1^*(\infty)=G_2^*(\infty)=0 \tag{2.1}$$

где функции $G_1^*(z)$ и $G_2^*(z)$ регулярны вне окружности L_1. Беря во внимание это важное обстоятельство и одновременно не выпуская из поля зрения равенства (1.43)—(1.46), придадим граничному условию (1.1) следующую форму:

$$(1+i\mu_1)G_1^*(t)+(1+i\bar{\mu}_1)\overline{G_1^*(t)}+(1+i\mu_2)G_2^*(t)+(1+i\bar{\mu}_2)\overline{G_2^*(t)}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}p_\nu\left(\frac{t-a}{R}\right)^\nu+\sum_{\nu=1}^{\infty}q_\nu\left(\frac{R}{t-a}\right)^\nu+Q(t)+p_0(\alpha_k,\alpha_{-k})+G_1\quad \text{на}\quad L_1 \tag{2.2}$$

Здесь введены такие обозначения для функционалов и свободных членов

$$p_\nu=-\sum_{k=1}^{\infty}p_{k,\nu}(\alpha_k,\alpha_{-k}),\qquad q_\nu=-\sum_{k=1}^{\infty}q_{k\nu}(\alpha_k,\alpha_{-k})\qquad(\nu=1,2,\ldots) \tag{2.3}$$

где $p_{k,\nu}$ и $q_{k,\nu}$ даются выражениями

$$p_{k,\nu}=\varepsilon_{2,1}[(1-|\mu_1|)(\beta_{2,-k}-\lambda^k\beta_{2,k})+(1+|\mu_1|)\lambda^\nu(\bar\beta_{2,-k}-\lambda^k\bar\beta_{2,k})]\delta_{1,\nu}^{(k)}+$$
$$+\varepsilon_{1,2}[(|\mu_2|-1)(\beta_{1,-k}-(-1)^k\lambda^k\beta_{1,k})-$$
$$-(-1)^\nu\lambda^\nu(1+|\mu_2|)(\bar\beta_{1,-k}-(-1)^k\lambda^k\bar\beta_{1,k})]\delta_{2,\nu}^{(k)}$$
$$q_{k,\nu}=\varepsilon_{2,1}[(1-|\mu_1|)\lambda^\nu(\beta_{2,-k}-\lambda^k\beta_{2k})+(1+|\mu_1|)(\bar\beta_{2,-k}-\lambda^k\bar\beta_{2,k})]\delta_{1,\nu}^{(k)}+$$
$$+\varepsilon_{1,2}[(-1)^\nu\lambda^\nu(|\mu_2|-1)(\beta_{1,-k}-(-1)^k\lambda^k\beta_{1,k})-$$
$$-(1+|\mu_2|)(\bar\beta_{1,-k}-(-1)^k\lambda^k\bar\beta_{1,k})]\delta_{2,\nu}^{(k)} \tag{2.4}$$

Остальные величины, содержащиеся в (2.2), таковы

$$p_0=-\sum_{k=1}^{\infty}p_{k0}(\alpha_k,\alpha_{-k}),\quad p_{k,0}=\varepsilon_{2,1}[(1-|\mu_1|)(\beta_{2,-k}-\lambda^k\beta_{2,k})+$$
$$+(1+|\mu_1|)(\bar\beta_{2,-k}-\lambda^k\bar\beta_{2,k})]\delta_{1,0}^{(k)}+\varepsilon_{1,2}[(|\mu_2|-1)(\beta_{1,-k}-(-1)^k\lambda^k\beta_{1,k})-$$
$$-(1+|\mu_2|)(\bar\beta_{1,-k}-(-1)^k\lambda^k\bar\beta_{1,k})]\delta_{2,0}^{(k)}$$
$$Q(t)=2f_1(t)-(1-|\mu_1|)R_1(\zeta_1)-(1-|\mu_2|)R_2(\zeta_2)-$$
$$-(1+|\mu_1|)\overline{R_1(\zeta_1)}-(1+|\mu_2|)\overline{R_2(\zeta_2)} \tag{2.5}$$

Для определения $G_1^*(z)$ и $G_2^*(z)$ получаем из краевого соотношения (2.2) равенства

$$(1-|\mu_1|)G_1^*(z)+(1-|\mu_2|)G_2^*(z)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k\left(\frac{R}{z-a}\right)^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{Q(t)}{t-z}dt \tag{2.6}$$

$$(1+|\mu_1|)G_1^*(z)+(1+|\mu_2|)G_2^*(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{p}_k\left(\frac{R}{z-a}\right)^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{Q(t)}{t-z}dt$$

С другой стороны, извлекаемые отсюда же предельные значения выражений, стоящих слева, внесем в то же краевое условие (2.2). Тогда придем к формуле, содержащей обособленно постоянную C_1 (выпавшую из предыдущих равенств):

$$C_1+p_0(\alpha_k,\alpha_{-k})=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}Q(t)\frac{dt}{t-a} \qquad (2.7)$$

В нее (как видно) входят функционалы α_k и α_{-k} ($k=1, 2, \ldots$); после того как они будут найдены, можно будет подсчитать значение C_1. Разрешим сейчас систему (2.6) относительно функций $G_1^*(z)$ и $G_2^*(z)$. Будем иметь

$$\begin{aligned}G_1^*(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}r_{1k}\left(\frac{R}{z-a}\right)^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{Q_1(t)}{t-z}dt\\ G_2^*(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}r_{2k}\left(\frac{R}{z-a}\right)^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{Q_2(t)}{t-z}dt\end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$\begin{aligned}r_{1k}(\alpha_\nu,\alpha_{-\nu})&=\frac{1}{2(|\mu_2|-|\mu_1|)}[(1+|\mu_2|)q_k-(1-|\mu_2|)\bar{p}_k]\\ r_{2k}(\alpha_\nu,\alpha_{-\nu})&=\frac{1}{2(|\mu_2|-|\mu_1|)}[-(1+|\mu_1|)q_k+(1-|\mu_1|)\bar{p}_k]\\ Q_1(t)&=\frac{1}{2(|\mu_2|-|\mu_1|)}[(1+|\mu_2|)Q(t)-(1-|\mu_2|)\overline{Q(t)}]\\ Q_2(t)&=\frac{1}{2(|\mu_2|-|\mu_1|)}[-(1-|\mu_1|)Q(t)+(1-|\mu_1|)\overline{Q(t)}]\end{aligned} \qquad (2.9)$$

причем коэффициенты $r_{1k}(\alpha_\nu, \alpha_{-\nu})$ и $r_{2k}(\alpha_\nu, \alpha_{-\nu})$, вообще говоря, зависят от всех функционалов α_ν и $\alpha_{-\nu}$.

Обращаясь к преобразованиям (1.31) и (1.32) или, что то же самое, к формулам (1.37) и (1.38), вернемся в равенствах (2.8) к соответственным прежним переменным z_1 и z_2. Получим

$$F_1^*(z_1)=\sum_{k=1}^{\infty}r_{1k}h_1^k(z_1)+M_1(z_1),\quad F_2^*(z_2)=\sum_{k=1}^{\infty}r_{2k}h_2^k(z_2)+M_2(z_2) \qquad (2.10)$$

$$\begin{aligned}h_1(z_1)&=\frac{1}{(1-|\mu_1|)}\left\{\frac{z_1-a}{R}-\left[\left(\frac{z_1-a}{R}\right)^2-(1-|\mu_1|)^2\right]^{1/2}\right\}\\ h_2(z_2)&=-\frac{1}{(|\mu_2|-1)}\left\{\frac{z_2-a}{R}-\left[\left(\frac{z_2-a}{R}\right)^2+(|\mu_2|-1)^2\right]^{1/2}\right\}\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Здесь $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$ — приведенные соответственно к переменным z_1 и z_2 известные (регулярные вне L_1) функции, стоящие в правых частях соотношений (2.8). Такое приведение легко реализовать, разложив сперва эти функции в ряду по отрицательным степеням двучлена $(z-a)/R$, а затем учтя выражения (2.11).

Имея в своем распоряжении формулы (2.10), перейдем к завершающему этапу; при этом будем опираться на вспомогательное соотношение (1.3), взятое на контуре L_2. Подсчеты, которые в дальнейшем понадобится провести, будут выполнены на основе ведущих формул (1.13) и (1.14). При этом надо будет учесть и предельные равенства типа

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{\varepsilon_{21}[\omega(t)-\lambda\overline{(\omega)t}]}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1=\frac{1}{2}\varepsilon_{2,1}[\omega(t_0)-\lambda\overline{\omega(t_0)}]+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{\varepsilon_{2,1}[\omega(t)-\overline{\lambda\omega(t)}]}{\zeta_1-\zeta_{10}}d\zeta_1$$
$$z\to\zeta_{10}\ \text{извне}\ L_2^{(1)}$$

где интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши; кроме того, следует также не упускать из вида соотношения на L_2:

$$\zeta_1-\zeta_{10}=\frac{1}{2}(t-t_0)\left[(1+|\mu_1|)-(1-|\mu_1|)\frac{R^2}{(t+a)(t_0+a)}\right]$$
$$\bar\zeta_1-\bar\zeta_{10}=\frac{1}{2}(t-t_0)\left[(1-|\mu_1|)-(1+|\mu_1|)\frac{R^2}{(t+a)(t_0+a)}\right]$$

и им аналогичные. Для более сжатой записи формул, что способствует лучшему их обозрению, интегралы, стоящие в формулах (1.13) и (1.14), обозначим

$$O_1^*(z_1)=\frac{\varepsilon_{21}}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{\omega(t)-\lambda\overline{\omega(t)}}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1,\quad O_2^*(z_2)=-\frac{\varepsilon_{12}}{2\pi i}\int\limits_{L_2^{(1)}}\frac{\omega(t)+\lambda\overline{\omega(t)}}{\zeta_2-z_2}d\zeta_2 \tag{2,12}$$

в связи с чем равенства (1.13), (1.14) запишутся компактнее

$$F_1(z_1)=F_1^*(z_1)+O_1^*(z_1)+R_1^{(0)}(z_1)$$
$$F_2(z_2)=F_2^*(z_2)+O_2^*(z_2)+R_2^{(0)}(z_2)$$

Во многом оказываются полезными и помогают такого рода соотношения (на кривой L_2):

$$d\ln\frac{\zeta_1-\zeta_{10}}{\zeta_2-\zeta_{20}}=\frac{dt}{t+a-\lambda R^2/(t_0+a)}-\frac{dt}{t+a+\lambda R^2/(t_0+a)}$$
$$d\ln\frac{\bar\zeta_1-\bar\zeta_{10}}{\bar\zeta_1-\bar\zeta_{20}}=\frac{dt}{t+a-R^2/[\lambda(t_0+a)]}-\frac{dt}{t+a+R^2/[\lambda(t_0+a)]}$$
$$d\ln\frac{\zeta_1-\zeta_{10}}{\bar\zeta_1-\bar\zeta_{10}}=\frac{dt}{t+a-\lambda R^2/(t_0+a)}-\frac{dt}{t+a-R^2/[\lambda(t_0+a)]}$$

Совместно они приводят к существенно важной формуле

$$[(1-|\mu_1|)O_1^*(\zeta_{10})+(1-|\mu_2|)O_2^*(\zeta_{20})]-$$
$$-[(1+|\mu_1|)\overline{O_1^*(\zeta_{10})}+(1+|\mu_2|)\overline{O_2^*(\zeta_{20})}]=$$
$$=\omega(t_0)+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_2}\omega(t)\left[\frac{1}{t+a-\lambda R^2/(t_0+a)}+\frac{1}{t+a+\lambda R^2/(t_0+a)}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_2}\omega(t)\left[\frac{1}{t+a-R^2/[\lambda(t_0+a)]}+\frac{1}{t+a+R^2/[\lambda(t_0+a)]}\right]dt-$$

$$-\frac{\lambda}{4\pi i}\int\limits_{L_2}\overline{\omega(t)}\left[\frac{1}{t+a-\lambda R^2/(t_0+a)}-\frac{1}{t+a+\lambda R^2/(t_0+a)}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{4\lambda\pi i}\int\limits_{L_2}\overline{\omega(t)}\left[\frac{1}{t+a-R^2/[\lambda(t_0+a)]}-\frac{1}{t+a+R^2/[\lambda(t_0+a)]}\right]dt$$

Алгебраической сумме интегралов, находящихся справа в последней формуле, придадим наименование $O^*[\omega(t),\ t_0]$. Очевидно, в окрестности окружности L_2 справедливы разложения Лорана наподобие (1.41), а именно

$$h_1^k(z_1)=\theta_{10}^{(k)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_{1\nu}^{(k)}\left[\left(\frac{z+a}{R}\right)+\lambda^\nu\left(\frac{R}{z+a}\right)^\nu\right]$$

В силу симметрии между $\delta_{1\nu}^{(k)}$ и $\theta_{1\nu}^{(k)}$ существует взаимосвязь, ее нетрудно выявить. Сходное разложение можно выписать для $h_2^k(z_2)$ с коэффициентами $\theta_{2\nu}^{(k)}$. Из формул (2.10) получаем на той же окружности

$$F_1^*(\zeta_{10})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu g_{1\nu}\left[\left(\frac{t_0+a}{R}\right)^\nu+\lambda^\nu\left(\frac{R}{t_0+a}\right)^\nu\right]+M_1(\zeta_{10})$$

$$F_2^*(\zeta_{20})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu g_{2\nu}\left[\left(\frac{t_0+a}{R}\right)^\nu+(-1)^\nu\lambda^\nu\left(\frac{R}{t_0+a}\right)^\nu\right]+M_2(\zeta_{20})$$

где $g_{1\nu}$ и $g_{2\nu}$ зависят от функционалов α_k и α_{-k} и равны

$$g_{1\nu}=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{1\nu}^{(k)}r_{1k},\qquad g_{2\nu}=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{2\nu}^{(k)}r_{2k}$$

Составленное (по образцу левой части (2.13)) выражение

$$[(1-|\mu_1|)F_1^*(\zeta_{10})+(1-|\mu_2|)F_2^*(\zeta_{20})]-[(1+|\mu_1|\overline{F_1^*(\zeta_{10})}+$$
$$+(1+|\mu_2|)\overline{F_2^*(\zeta_{20})}]=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\left[H_\nu\left(\frac{t_0+a}{R}\right)^\nu+H_{-\nu}\left(\frac{R}{t_0+a}\right)^\nu\right]+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[M_\nu\left(\frac{t_0+a}{R}\right)^\nu+M_{-\nu}\left(\frac{R}{t_0+a}\right)^\nu\right]$$

где величины H_ν и $H_{-\nu}$ — опять-таки содержат функционалы α_k и α_{-k}, а M_ν и $M_{-\nu}$ — коэффициенты Фурье известной функции — назовем ее $M(t_0)$. Группа нескольких только что установленных соотношений позволяет в итоге построить из (1.3) для нахождения вспомогательной функции $\omega(t)$ следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\omega(t_0)=O^*[\omega(t);\,t_0]+\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\left[H_\nu\left(\frac{t_0+a}{R}\right)^\nu+\right.$$

$$+H_{-\nu}\left(\frac{R}{t_0+a}\right)^{\nu}\Bigg]+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[P_{\nu}\left(\frac{t_0+a}{R}\right)^{\nu}+P_{-\nu}\left(\frac{R}{t_0+a}\right)^{\nu}\right] \text{ на } L_2 \qquad (2.14)$$

где последняя сумма справа дает разложение свободного члена $P(t_0)$, равного

$$P(t_0)=M(t_0)+[(1-|\mu_1|)R_1^{(0)}(\zeta_{10})+(1-|\mu_2|)R_2^{(0)}(\zeta_{20})]-$$
$$-[(1+|\mu_1|)\overline{R_1^{(0)}(\zeta_{10})}+(1+|\mu_2|)\overline{R_2^{(0)}(\zeta_{20})}]$$

Естественно пытаться заменить фредгольмово уравнение (2.14) бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно функционалов α_k и α_{-k}. К сожалению, можно полагать, что непосредственное сведение (2.14) к такой системе уравнений не обеспечит достаточно благоприятных структурных свойств последней. Это недвусмысленно вытекает из поведения интегралов, входящих в первый оператор справа в (2.14) из-за сравнительной близости параметра $\lambda=9/11$ к единице. Внушает также, видимо, обоснованное опасение медленное убывание некоторых величин, содержащихся в коэффициентах Фурье в (2.14). Поэтому целесообразно от уравнения (2.14) перейти к уравнению с итерированными ядрами. Это качественно улучшит положение дела. В интегралах в названном первом операторе (2.14) вместо λ появится величина λ^2, что заметно усилит сходимость их разложений Фурье. Точнее говоря, эти интегралы заменятся такими

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega(t)}{t+a\pm\lambda^2(t_0+a)}dt;\qquad \frac{1}{4\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega(t)}{t+a\pm(t_0+a)/\lambda^2}dt$$

Подмеченное свойство имеет принципиальное значение. Однако подобное улучшение сходимости еще не выправляет в желаемой степени указанный дефект. Лишь вторая итерация полученного уравнения приведет к сходным интегралам, содержащим уже λ^4, позволит прийти к вполне приемлемым по сходимости рядам Фурье; кроме того, надо думать, станет удовлетворительным убывание известных величин, входящих в новые H_ν и $H_{-\nu}$. Все вместе взятое выгодно скажется на ведущих свойствах соответствующей бесконечной системы линейных уравнений относительно функционалов α_k и α_{-k}. Нелишне заметить, что по выполнении второй итерации целесообразно выделить первое приближение по Нейману; в свою очередь, это резко усилит сходимость ряда Фурье для свободного члена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947. 250 с.
2. *Шерман Д. И.* О напряжениях в плоской весомой среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными круговыми отверстиями // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 3. С.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 703 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.II.1989