МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3

С. В. КУЗНЕЦОВ

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕД

Необходимость решения вопросов существования и единственности регулярных решений основных краевых задач статики (равновесия) периодических анизотропных упругих сред возникает в связи с решением так называемых «ячеечных» проблем механики композитов и пористых сред. В отличие от непериодического случая [1–3], для которого вопросы существования и единственности подробно исследованы, для пространственных периодических сред эти задачи далеки от своего завершения. В серии публикаций [4–7] установлены теоремы существования и единственности решений некоторых классов линейно- и двоякопериодических пространственных задач теории упругости (фигура). В случае пространственно-периодических задач доказательство теоремы единственности получено в [8] для первоначально изотропной однородной среды.

В [9–13] доказательство существования полуслабых решений периодических задач, по существу, выводится из леммы Лакса – Мильграма о минимуме некоторого коэрцитивного функционала. Однако, установить коэрцитивность такого функционала для периодических граничных задач, заданных на негладких многообразиях (границы ячеек периодичности содержат ребра и углы), удается лишь для решений класса H_1 [2, 14], в то время как для регулярности требуется принадлежность классу C^2 в исследуемой области и классу C^1 вблизи границы.

Ниже, на основе применения периодических фундаментальных решений, получены доказательства теорем существования и единственности регулярных решений пространственно-периодических задач статики анизотропных упругих сред с анизотропией общего вида.

1. Основные соотношения. Рассматривается первоначально однородная анизотропная упругая среда, заполняющая все пространство R^3, тензор упругости которой строго эллиптичен

$$(\xi\otimes\eta)\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot(\eta\otimes\xi)>0 \qquad (1.1)$$

при любых разложимых, отличных от нуля тензорах вида $\xi\otimes\eta$, ξ, $\eta\in R^3$. Строгая эллиптичность $\mathbf{C}$ обеспечивает строгую эллиптичность матричного дифференциального оператора уравнений статики

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{u}\equiv-\operatorname{div}\mathbf{C}\cdot\cdot\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u})=0 \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений.

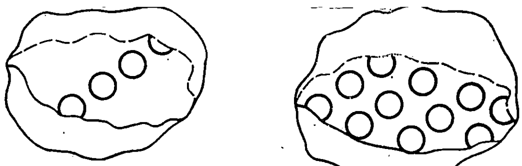
Кроме того, предполагается, что рассматриваемая среда является гиперупругой. Таким образом, тензор $\mathbf{C}$ оказывается симметричным по крайним парам индексов: $C^{ijmn}=C^{mnij}$.

Подстановка фундаментального решения $\mathbf{E}$ в уравнение (1.2) дает

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{E}(\mathbf{x})=\delta(\mathbf{x})\mathbf{I} \qquad (1.3)$$

где δ – дельта-функция Дирака, а $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица. Методы построения и свойства фундаментальных решений уравнений статики анизотропных сред рассмотрены в [15].

Пусть Q – фундаментальная область, представляющая собой трехмерный тор, а $\Omega\subset Q$ – необязательно односвязная область с гладкой границей



$\partial\Omega$ класса C^m, $m\geqslant 2$. Нетрудно видеть, что при таком выборе m граница $\partial\Omega$ представляет собой поверхность Ляпунова в Q.

На $\partial\Omega$ вводится оператор граничных условий

$$\mathbf{B}(\mathbf{v},\ \partial_x)\mathbf{u}\equiv(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{T}(\mathbf{v},\ \partial_x)\mathbf{u})\,|_{\partial\Omega}=\mathbf{g} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матричные коэффициенты, заданные на $\partial\Omega$; $\mathbf{T}$ — оператор напряжений; $\mathbf{v}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, направленный из $Q\backslash\Omega$. В этой форме оператор $\mathbf{B}$ определяет наиболее употребительные типы граничных условий в теории упругости. Например, при $\mathbf{a}=\mathbf{I}$, $\mathbf{b}=0$ — это условия краевой задачи I для перемещений; при $\mathbf{a}=0$, $\mathbf{b}=\mathbf{I}$ — условия краевой задачи II для напряжений; при $\mathbf{a}=\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$, $\mathbf{b}=\mathbf{I}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ — условия краевой задачи III для нормальной компоненты вектора перемещений и касательных напряжений; при $\mathbf{a}=\mathbf{I}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$, $\mathbf{b}=\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ — условия краевой задачи IV для нормальных к границе напряжений и касательных перемещений. В краевой задаче V рассматривается оператор $\mathbf{B}$ с отрицательно определенной матрицей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{I}$. В случае, когда граница $\partial\Omega$ несвязна, возможна постановка различных краевых условий на различных связных компонентах $\partial\Omega$, однако далее этот случай отдельно рассматриваться не будет.

Помимо граничных задач (1.4) представляют интерес гранично-контактные условия, возникающие при решении периодических задач механики композитов

$$(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)_{\partial\Omega}=\mathbf{f},\quad (\mathbf{T}_1(\mathbf{v},\ \partial_{x'})\mathbf{u}_1-\mathbf{T}_2(\mathbf{v},\ \partial_{x'})\mathbf{u}_2)_{\partial\Omega}=\mathbf{g} \tag{1.5}$$

где индексы 1, 2 относятся к дисперсным компонентам и матрице соответственно. Возможна постановка и более общих типов граничных условий, в которых учитывается проскальзывание и наличие сил трения на границе раздела компонент.

2. Теоремы единственности. Рассматриваются регулярные в $Q\backslash\Omega$ периодические решения краевых задач вида $\mathbf{u}\in C^2(Q\backslash\bar{\Omega},\ R^3)\cap C^1(Q\backslash\Omega,\ R^3)$. Причем, поскольку Q — гомеоморфно тору, каждое решение класса C^s ($s\geqslant 0$) в $Q\backslash\bar{\Omega}$ является необходимо периодическим в R^3.

Лемма 1. Единственными регулярными решениями уравнения

$$F(\mathbf{u})\equiv\int\limits_{Q\backslash Q}\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u})\,.\,.\,\mathbf{C}\,.\,.\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u})=0 \tag{2.1}$$

являются решения вида $\mathbf{u}=\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_0\in R^3$, $\mathbf{c}_0$ — const.

Доказательство. Ввиду строгой эллиптичности $\mathbf{C}$ уравнение (2.1) эквивалентно $\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u})=0$ в $Q\backslash\bar{\Omega}$. Последнее уравнение, как нетрудно видеть, имеет единственное периодическое регулярное решение вида $\mathbf{u}$ — const.

Замечание 1. В непериодическом случае регулярными решениями уравнения (2.1) в ограниченных областях являются решения вида $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{c}_0+\mathbf{W}_0\cdot\mathbf{x}$, где $\mathbf{W}_0$ — кососимметричный тензор второго ранга, характеризующий поворот. Для неограниченных областей нетривиальных регулярных решений уравнения (2.1) нет; правда при этом на регулярные решения накладываются дополнительные условия убывания на **бесконечности**: $|\mathbf{u}|=o(1)$, $|\nabla\mathbf{u}|=o(|x|^{-1})$, $|x|\to\infty$.

Теорема 1. Периодические граничные задачи I, III—V допускают не более одного регулярного решения в $Q\backslash\Omega$; периодическая задача II допускает регулярное решение, единственное с точностью до вектора аффинного смещения.

Доказательство. Применение формулы Грина к уравнению (1.2) в $Q\backslash\Omega$ дает

$$F(\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{v}, \partial_{x'})\mathbf{u}(\mathbf{x'}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x'})dx' \qquad (2.2)$$

Подстановка однородных граничных значений в (2.2) показывает, что билинейная форма F обращается в нуль для всех краевых задач I–V. Применение предыдущей леммы завершает доказательство.

Перейдем к рассмотрению гранично-контактных задач.

Теорема 2. Гранично-контактные задачи (1.5) допускают регулярные в $Q\backslash\bar{\Omega}$ и Ω решения, единственные с точностью до аффинного смещения.

Доказательство. Пусть G_1 – тензор Грина первой краевой задачи для области Ω. Композиция операторов $\mathbf{T}_1\circ\mathbf{G}_1$ дает оператор, ставящий в соответствие граничным смещениям напряжения на $\partial\Omega$, полученные предельным переходом из Ω. С учетом этих операторов, граничная задача (1.5) может быть преобразована к виду

$$((\mathbf{T}_1\circ\mathbf{G}_1-\mathbf{T}_2)\mathbf{u}_2)|_{\partial\Omega}=\mathbf{g}-\mathbf{T}_1\circ\mathbf{G}_1\mathbf{f} \qquad (2.3)$$

Оператор $\mathbf{T}_1\circ\mathbf{G}_1$, действующий в функциональных пространствах на $\partial\Omega$, имеет в качестве собственных решений решения вида $\mathbf{c}_0+\mathbf{W}_0\cdot\mathbf{x'}$, $\mathbf{x'}\in\partial\Omega$. Кроме того, этот оператор представим в виде $\mathbf{I}/2+\mathbf{S}_1$, где $\mathbf{S}_1$ – матричный сингулярный интегральный оператор, причем $-1/2\neq\mathrm{Sp}\,\mathbf{S}_1$ [16]. Поскольку оператор $\mathbf{T}_2$ в силу теоремы 1, не имеет других нетривиальных собственных решений на $\partial\Omega$, отличных от решений вида $\mathbf{c}_0$, то однородное уравнение (2.3) имеет в качестве нетривиальных решений решения вида $\mathbf{c}_0$. Очевидно, что других регулярных решений у однородного уравнения (2.3) нет.

3. Теоремы существования. Для доказательства существования регулярных решений краевых задач (1.4) и гранично-контактных задач (1.5), вводится в рассмотрение периодическое фундаментальное решение $\mathbf{E}_p'$, построение которого осуществляется с использованием формулы суммирования Пуассона [17, 18].

Методами [18] можно показать, что периодическое фундаментальное решение допускает разложение в Q вида

$$\mathbf{E}_p'=\mathbf{E}+\mathbf{G} \qquad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{G}\in C^\infty(Q, R^3\times R^3)$, а $\mathbf{E}$ – обычное непериодическое фундаментальное решение. Кроме того, $\mathbf{E}_p'$, построенное с помощью формулы суммирования Пуассона, имеет нулевое среднее значение в Q [18].

Решение краевых задач I–IV разыскивается в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = a\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y'})\mathbf{T}(\mathbf{v}, \partial_{y'})\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}, \mathbf{y'})dy' + \mathbf{b}\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_p'(\mathbf{x}, \mathbf{y'})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{y'})dy' \qquad (3.2)$$

где α, β – неизвестные векторные плотности, сосредоточенные на $\partial\Omega$.

Краевая задача V требует иных представлений для своего решения и далее не рассматривается.

Подстановка представления (3.2) в оператор (1.4) дает

$$\mathbf{B}'(\alpha, \beta)=\mathbf{a}(-\mathbf{I}/2+\mathbf{R}^t(\mathbf{v}_{y'}))\alpha+\mathbf{b}(\mathbf{I}/2+\mathbf{R}(\mathbf{v}_{x'}))\beta \qquad (3.3)$$

где $\mathbf{R}$ – матричные сингулярные интегральные операторы, получаемые сужением потенциала двойного слоя и производных от потенциала простого слоя на $\partial\Omega$ при подходе по некасательным направлениям из $Q\backslash\bar{\Omega}$ к $\partial\Omega$.

Далее на $\partial\Omega$ вводятся соболевские функциональные пространства $H_s(\partial\Omega, R^3)$, $s>2$. Причем для корректного определения этих пространств необходимо потребовать, чтобы $\partial\Omega$ было многообразием класса $C^{[s/2],\alpha}$, где $\alpha>0$, а $[\ldots]$ обозначает целую часть. Выбор индекса $s>2$ в определении H_s диктуется необходимостью рассмотрения регулярных решений краевых задач (1.4), (1.5). Теоремы вложения показывают, что при $s>2$ $C^1(\partial\Omega, R^3)\subset H_s(\partial\Omega, R^3)$.

Принимая во внимание граничные свойства потенциалов, порожденных фундаментальным решением $\mathbf{E}$, а также разложение (3.1), видим, что по своим спектральным свойствам сингулярные операторы $\mathbf{R}$ на $\partial\Omega$ аналогичны сингулярным операторам $\mathbf{S}_1$, поскольку отличаются от $\mathbf{S}_1$ на вполне непрерывный оператор. Отсюда вытекает, что спектр $\mathbf{R}$ действителен, дискретен и имеет нуль своей единственной возможной предельной точкой. Здесь спектром называется множество тех λ, при которых оператор $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{R}$ необратим в классе непрерывных эндоморфизмов, действующих в H_s.

Лемма 2. Условие $\lambda\in\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}$ влечет $\lambda\in(-1/2, 1/2]$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}$, $\lambda\neq0$ и $\psi_\lambda\in\mathbf{E}_\lambda$, $\psi_\lambda\neq0$, где $\mathbf{E}_\lambda$ – соответствующее спектральное подпространство в H_s. Для потенциалов, порожденных плотностью ψ_λ, из (3.3) следует

$$\begin{gathered}((\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+-(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_-)\ (\psi_\lambda)=2\lambda\psi_\lambda\\ ((\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+-(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_-)\ (\psi_\lambda)=\psi_\lambda\end{gathered}\tag{3.4}$$

где нижние индексы $+$, $-$ обозначают некасательные пределы к $\partial\Omega$ из $Q\backslash\overline{\Omega}$ и Ω соответственно, а через $\mathbf{V}$ обозначен интегральный оператор потенциала простого слоя.

Исключая из (3.4) ψ_λ, получим

$$(1-2\lambda)\ (\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+(\psi_\lambda)=-(1+2\lambda)\ (\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_-(\psi_\lambda)\tag{3.5}$$

Использование очевидного равенства $\mathbf{V}_+(\psi_\lambda)=\mathbf{V}_-(\psi_\lambda)$ совместно с (3.5) дает

$$(1-2\lambda)\int\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+(\psi_\lambda)\cdot\mathbf{V}_+(\psi_\lambda)\,dx'=-(1+2\lambda)\int\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_-(\psi_\lambda)\cdot\mathbf{V}_-(\psi_-)\,dx'\tag{3.6}$$

Принимая во внимание (2.1), из (3.5) получим

$$\lambda={}^1\!/_2(F_{Q\backslash\Omega}(\mathbf{V})-F_\Omega(\mathbf{V}))/(F_{Q\backslash\Omega}(\mathbf{V})+F_\Omega(\mathbf{V}))\tag{3.7}$$

где индексы обозначают интегрирование по соответствующим областям.

Поскольку тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, формы $F_{Q\backslash\Omega}$ и F_Ω, оказываются неотрицательно определенными. Следовательно $|\lambda|\leqslant1/2$, если только $\lambda\in\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}$.

Покажем, что $1/2\in\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}$. Пусть $\mathbf{u}=\mathbf{c}_0$ ($\mathbf{c}_0$ – const) – векторное поле перемещений в $Q\backslash\Omega$. Формула Сомильяны для $Q\backslash\Omega$ имеет вид

$$\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{t}_0(\mathbf{y}')\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\,dy'-\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{u}_0(\mathbf{y}')\mathbf{T}\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\,dy'=\mathbf{u}(\mathbf{x})-\mathbf{u}_{cp}\tag{3.8}$$

Отличие формулы (3.8) от непериодического случая заключается в том, что периодические фундаментальные решения $\mathbf{E}_p'$ порождают в правой части (3.8) дополнительное слагаемое $-\mathbf{u}_{cp}$ [17]. Поскольку тензорное поле напряжений равно нулю всюду в $Q\backslash\Omega$, то векторное поле $\mathbf{t}_0$ на $\partial\Omega$ также равно нулю. Учитывая граничные значения потенциала двойного слоя, из (3.8) немедленно следует, что $(\mathbf{I}/2-\mathbf{R})\mathbf{u}_0=0$, т. е. $1/2\in\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}$.

Остается доказать, что $-1/2\notin\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}$. Предположим, что $\psi_{-1/2}$ соответствующий собственный элемент, отличный от нуля. Потенциал простого слоя, порожденный $\psi_{-1/2}$, представляет собой регулярное решение в $Q\backslash\overline{\Omega}$ и Ω, кроме того, по условию $(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+(\psi_{-1/2})=0$, поскольку $(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+=\mathbf{I}/2+\mathbf{R}$. Теорема единственности для второй краевой задачи в $Q\backslash\overline{\Omega}$ показывает, поле $\mathbf{V}(\psi_{-1/2})$ постоянно в $Q\backslash\overline{\Omega}$. Используя непрерывность потенциала простого слоя, видим, что сужение $\mathbf{V}(\psi_{-1/2})$ на $\partial\Omega$ также постоянно. Применение теоремы единственности для первой краевой задачи в Ω обеспечивает постоянство векторного поля $\mathbf{V}(\psi_{-1/2})$ и в Ω. Отсюда получаем: $(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_-(\psi_{-1/2})=0$, или $\psi_{-1/2}\in\mathbf{E}_{1/2}$, но пересечение пространств $\mathbf{E}_{-1/2}\cap\mathbf{E}_{1/2}$ равно нулю. Полученное противоречие завершает доказательство этой леммы.

Следствие. $\dim \mathbf{E}_{1/2}=3$.

Доказательство. В ходе доказательства леммы 2 фактически было получено, что $\dim \mathbf{E}_{1/2}\geqslant 3$, поскольку $\mathbf{E}_{1/2}$ содержит в себе все постоянные на $\partial\Omega$ векторные поля. В то же время $\dim \mathbf{E}_{1/2}\leqslant 6$, что вытекает из применения соответствующих теорем для непериодического случая [3]. Но, как легко видеть, жесткие повороты контура $\partial\Omega$ $\mathbf{W}_0\cdot\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'\in\partial\Omega$ в периодических задачах не являются собственными решениями оператора $\mathbf{W}_+$.

Замечания. 2. Несмотря на существование нетривиальных решений краевой задачи II для области $Q\setminus\bar\Omega$, соответствующая точка $\lambda=-1/2$ граничного оператора $(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+=\mathbf{I}/2+\mathbf{R}$ не принадлежит спектру оператора $\mathbf{R}$ в фактор-пространстве $H_s(\partial\Omega,\ R^3)/R^3$. Необходимость рассмотрения фактор-пространства объясняется тем обстоятельством, что векторные поля $\mathbf{t}_0$ с отличным от нуля средним значением на поверхности $\partial\Omega$ приводят к несамоуравновешенным решениям в исследуемых областях. Таким образом, решение второй краевой задачи в виде $\mathbf{V}(\psi)$ допускает не более одного регулярного решения, поскольку автоматически исключает аффинные смещения.

3. Используя теорему единственности и сопряженность операторов $\mathbf{W}_+$, $(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_-$ и $\mathbf{W}_-$, $(\mathbf{T}\circ\mathbf{V})_+$, можно показать, что потенциал двойного слоя $\mathbf{W}(\psi)$, порожденный постоянной на $\partial\Omega$ плотностью ψ, также должен быть исключен из рассмотрения за счет перехода к фактор-пространству $H_s(\partial\Omega,\ R^3)/R^3$. Далее остается заметить, что по тем же соображениям постоянные плотности также следует исключить из рассмотрения граничных задач III, IV.

Введем обозначение $\bar H_s(\partial\Omega,\ R^3)$ для подпространства в $H_s(\partial\Omega,\ R^3)$, порожденного вектор-функциями с нулевым средним значением на $\partial\Omega$. Принимая во внимание тот факт, что точка $\lambda=1/2$ является простым полюсом резольвенты для $\mathbf{R}$, и учитывая предыдущие замечания, имеем следующие теоремы.

Теорема 3. Краевые задачи I—IV однозначно разрешимы в $Q\setminus\bar\Omega$ в функциональных классах $\bar H_s(\partial\Omega,\ R^3)$, $s>2$.

Теорема 4. Гранично-контактная задача (1.5) однозначно разрешима в $\bar H_s(\partial\Omega, R^3)$, $s>2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Knops R. J., Payne L. E.* Uniqueness Theorems in Linear Elasticity. Berlin: Springer, 1971. 130 p.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
3. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/Под ред. Купрадзе В. Д. М.: Наука, 1976. 662 с.
4. *Howell K. B.* Uniqueness in linear elastostatics for problems involving unbounded bodies // J. Elast. 1980. V. 10. № 4. P. 407–427.
5. *Howell K. B.* Periodic and slightly periodic boundary value problems in elastostatics on bodies unbounded in several directions // Intern. J. Eng. Sci. 1982. V. 20. N 3. P. 455–481.
6. *Howell K. B.* The asymptotic behavior of doubly periodic strain states // J. Elast. 1986. V. 16. N 1. P. 43–61.
7. *Howell K. B.* Periodic elastic states: Nontrivial body forces and exponentially decreasing asymptotic behavior // J. Elast. 1987. V. 18. № 2. P. 101–123.
8. *Кузнецов С. В.* О решении некоторых периодических задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 39–43.
9. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North – Holland, 1978. 700 p.
10. *Sanchez-Palencia E.* Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications // C. R. Acad. Sci. Ser. A. 1970. V. 271. № 22. P. 1129–1132.
11. *Sanchez-Palencia E.* Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogenes // C. R. Acad. Sci. Ser. A. 1970. V. 272. № 21. P. 1410–1411.
12. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А.* О существовании и асимптотическом поведении решений системы теории упругости в бесконечной области // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. Вып. 4. С. 157–158.

13. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Панасенко Г. П.* Асимптотическое разложение решений системы теории упругости в перфорированных областях // Мат. сб. 1983. Т. 120. № 1. С. 22–41.
14. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 538 с.
15. *Кузнецов С. В.* Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных упругих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.
16. *Кузнецов С. В.* Пространственные задачи о трещинах в анизотропных упругих средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 35–38.
17. *Hasimoto H.* On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their applications to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt. 2. P. 317–328.
18. *Wainger St.* Special trigonometric series in *K*-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. 1965. N. 59. 102 p.

Москва

Поступила в редакцию
15.I.1990