

УДК 531.55 : 521.1

© 1991 г.

Г. М. ЛОХОВ, С. И. ПОДЗОРОВ

**О ПОСТРОЕНИИ КОМБИНИРОВАННОГО БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩЕГО
МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ
В АТМОСФЕРЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ**

В [1-3] были опущены некоторые особенности построения и реализации комбинированного быстродействующего метода исследования плоского движения в атмосфере твердых тел вокруг центра масс, обусловленные наличием возмущений и использованием новых асимптотических приближений. Представляемая статья устраняет этот пробел.

1. Постановка задачи. Модель возмущающих воздействий. Уравнения плоского продольного движения твердого тела, при котором движение центра масс и относительное движение осуществляются в одной и той же вертикальной плоскости, имеют следующий вид [1-3]:

$$\begin{aligned} r^* &= V \sin \theta, \quad \varphi^* = -(V/r) \cos \theta \\ V^* &= -(\mu/r^2) \cos \theta - (\rho V^2/(2m)) S [c_x(\alpha) + c_{ch} \cos \alpha] + (F_p)_t/m \\ \theta^* &= (V/r - \mu/(r^2 V)) \cos \theta + (\rho V/(2m)) S [c_y(\alpha) - c_{ch} \sin \alpha] + (F_p)_n/m \\ \theta^{**} + \rho V/(2J_z) S l^2 m_{\alpha}(\alpha) \theta^* + \rho V^2/(2J_z) S l m_z(\alpha) &= M_p/J_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $(F_p)_t$, $(F_p)_n$ — проекции возмущающей силы соответственно на вектор скорости и перпендикуляр к нему, $\alpha = \pi/2 + \theta - \theta - \varphi$, c_{ch} — высотная поправка, M_p — возмущающий момент — предполагается перпендикулярным к плоскости траектории.

Система уравнений движения (1.1) удобна для применения к ней регулярных асимптотических методов. К тому же, плоское движение является достаточно показательным для исследования влияния возмущений при целенаправленном изменении траекторий тел в атмосфере. Поэтому исследованию системы уравнений (1.1) уделяется значительное внимание [4-7].

В качестве модели возмущения примем упрощенную модель прямоугольного возмущающего момента силы. Начало действия возмущающего момента совпадает с моментом прохождения угла атаки через ноль, а период его действия кратен периоду относительного движения. На отрезке времени от начала действия возмущающего импульса до начала действия следующего

$$M_p/J_z = M^* \Theta(t-t^*), \quad F_p = 0 \quad (1.2)$$

где M^* — постоянная амплитуда возмущающего момента; t^* — его длительность — считается достаточно малой: в несколько раз меньше периода относительного движения, но одного с ним порядка; функция $\Theta(x)$ определяется как $\Theta(x) = 1$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x \geq 0$. Выбор данной схемы действия возмущений был сделан по критерию наиболее сильного влияния на относительное движение тела. Аналитически можно показать, что в

действительности наибольшее влияние будет достигаться при совпадении с моментом прохождения угла атаки через ноль не начала, а середины отрезка времени действия возмущения. Однако ввиду малости t^* по сравнению с периодом относительного движения принятая схема действия возмущений будет близка к оптимальной. В то же время она удобнее для численных исследований.

Описанная схема возмущающего воздействия представляет собой упрощенную модель некоторого реального физического механизма действия возмущений на твердое тело в атмосфере, инициирующих его относительное движение, которое, в свою очередь, приводит к изменению траектории центра масс тела. Подробное описание данного физического механизма выходит за рамки настоящей статьи.

Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то обстоятельство, что движение твердого тела; в общем случае, распадается на несколько участков, определяемых характером относительного движения: участок действия возмущения, участок вращательного движения, участок колебательного движения и переходной участок, где вращательное движение сменяется колебательным [1-2]. При этом под неоднократным действием возмущений вида (1.2) тип относительного движения может несколько раз переходить от одного из перечисленных выше к другому.

В большинстве практически важных случаев относительное движение на участках вращения и колебаний является быстрым, т. е. его характерное время (период) много меньше характерного времени движения центра масс на всем участке постоянства типа относительного движения. Это обстоятельство затрудняет непосредственное численное интегрирование системы (1.1), так как шаг интегрирования определяется минимальной постоянной времени решения, а длина интервала интегрирования, как правило, — максимальной. Поэтому число шагов интегрирования оказывается чрезмерно большим, что приводит к значительным затратам машинного времени и увеличению погрешности из-за накопления ошибок округления.

С другой стороны, наличие существенно различных масштабов времени позволяет использовать асимптотические методы разделения движений. Однако вид асимптотических приближений определяется характером поведения быстрой составляющей решения, которое на разных участках интервала интегрирования различно. Кроме того, на переходном участке асимптотические приближения неприменимы [7], и необходимо численно интегрировать систему уравнений (1.1). Наконец, структура расположения различных участков движения определяется начальными условиями, параметрами возмущения и тому подобным, т. е. заранее неизвестна. Поэтому комбинированный алгоритм исследования плоского движения должен включать в себя различные асимптотики, блоки автоматического выбора расчетных формул, методы пересчета параметров движения из одних представлений в другие и так далее.

Такой алгоритм был построен в [1-3, 8]. В настоящей работе излагаются особенности построения этого алгоритма, связанные с обобщением асимптотических приближений на случай задания аэродинамических характеристик произвольными табличными функциями своих аргументов — угла атаки и параметров набегающего потока. Кроме того, описывается построение асимптотических приближений на участках действия возмущений.

2. Асимптотическое приближение в случае быстрых вращений. За начало отсчета времени примем момент начала действия одного из возмущений. Будем считать, что в этот момент относительное движение уже является быстрым вращением с угловой скоростью $\dot{\vartheta}(t=0) = \omega_0$ (если только движение в начальный момент происходит в верхних слоях атмосферы). Большая величина ω_0 может быть обеспечена, например, действием предыдущих импульсов возмущающего момента.

Примем, что аэродинамические характеристики зависят только от угла атаки, и известны их бесконечные разложения в ряды Фурье. Разумеется, на практике известно лишь конечное число коэффициентов этих рядов, но число сохраняемых в них членов определяется только практическими соображениями.

Введем новую переменную z соотношением

$$\dot{\vartheta} = \omega_0 + \int_0^t M^* \Theta(\xi - t^*) d\xi + z \quad (2.1)$$

Поскольку вращение тела предполагается быстрым, в качестве малого параметра ε примем, как и в [2, 4], величину $1/\omega_0$. Сделав замену независимой переменной $\tau = t/\varepsilon$, считая $M^* \geq 0$, $\omega_0 > 0$, и обозначив $\tau^* = t^*/\varepsilon$, приведем (2.1) к следующему виду:

$$d\theta/d\tau = 1 + \varepsilon^2 M^* [(\tau - \tau^*)\Theta(\tau - \tau^*) + \tau^*] + \varepsilon z \quad (2.2)$$

Конкретизируем предположение о большом возмущающем моменте, потребовав, чтобы $M = \varepsilon^2 M^* = O(1)$. Это условие выполняется, если величина M^* мало меняется от возмущения к возмущению, т. е. остается одного и того же порядка.

Используя (2.2), преобразуем (1.1) к стандартному виду. При этом демпфирующий момент представим в виде [5]:

$$(\rho V^2/2J_z) S l^2 m_{z0} d\theta/dt = \varepsilon \rho V m_\omega d\theta/dt \quad (2.3)$$

При сделанных предположениях система уравнений (1.1) примет стандартный вид ($dr/d\tau, d\varphi/d\tau, dV/d\tau, d\theta/d\tau = O(\varepsilon)$):

$$dz/d\tau = -\varepsilon (\rho V^2/2J_z) S l m_z(\alpha) - \varepsilon \rho V m_\omega(\alpha) \{1 + M [(\tau - \tau^*)\Theta(\tau - \tau^*) + \tau^*]\} - \varepsilon^2 \rho V m_\omega(\alpha) z$$

Величина θ , а вместе с ней и α , определяется интегрированием (2.2).

Физический смысл условия (2.3), как следует из анализа уравнения для $dz/d\tau$, состоит в требовании, чтобы демпфирующий и аэродинамический моменты были одного порядка. На участке быстрых вращений это означает, что число Струхала $St = O(1)$. Как правило, условие $St = O(1)$ выполняется в реальных задачах с достаточным запасом [7].

Выпишем окончательные формулы второго асимптотического приближения для системы уравнений (1.1) с учетом (1.2) в случае быстрых вращений

$$V = V_* - \varepsilon \frac{\rho V_*^2 S / (2m)}{1 + M\tau^*} C_x(\alpha)$$

$$\theta = \theta_* - \varepsilon \frac{\rho V_* S / (2m)}{1 + M\tau^*} \left[C_y(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} C_{yn}/n \right] \quad (2.4)$$

$$z = z_* - \varepsilon \frac{\rho V_*^2 S l / (2J_z)}{1 + M\tau^*} \left[M_z(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} M_{zn}/n \right] - \varepsilon \frac{\rho V_*^2 S l^2}{2J_z} M_\omega(\alpha)$$

где C_{xn}, C_{yn}, M_{zn} — коэффициенты разложения в ряды Фурье соответственно c_x, c_y, m_z ; $m_{\omega 0}$ — нулевой коэффициент в разложении $m_\omega(\alpha)$ в ряд Фурье

$$C_x(\alpha) = \int_0^\alpha (c_x(\xi) - C_{x0}) d\xi, \quad C_y(\alpha) = \int_0^\alpha c_y(\xi) d\xi$$

$$M_z(\alpha) = \int_0^\alpha m_z(\xi) d\xi, \quad M_\omega(\alpha) = \int_0^\alpha (m_\omega(\xi) - m_{\omega 0}) d\xi$$

Величины V_*, θ_*, z_* , а также r и φ определяются из решения следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dr/d\tau &= \varepsilon V_* \sin \theta_*, & d\varphi/d\tau &= -\varepsilon (V_*/r) \cos \theta_* \\ dV_*/d\tau &= -\varepsilon (\mu/r^2) \sin \theta_* - \varepsilon (\rho V_*^2/2m) S C_{x0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\theta_*}{d\tau} = \varepsilon \left(\frac{V_*}{r} - \frac{\mu}{r^2 V_*} \right) \cos \theta_* - \varepsilon^2 \frac{\rho^2 V_*^2 S^2}{8m^2 (1+M\tau^*)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{yn} \frac{C_{xn}}{n} + C_{vn}^2 \right)$$

$$dz_*/d\tau = -\varepsilon (\rho V_*^2 / 2J_z) S l^2 m_{00} (1+M\tau^*) - \varepsilon^2 (\rho V_*^2 / 2J_z) S l^2 m_{00} z_* +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\rho^2 V_*^3 S^2 l}{8m^2 J_z (1+M\tau^*)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2C_{xn}}{n} M_{zn} - M_{zn} C_{yn} \right)$$

Величина Φ находится квадратурой

$$\Phi = \theta_0 + \tau (1+M\tau^*) - \frac{M(\tau^*)^2}{2} + M(\tau - \tau^*) \frac{\Theta(\tau - \tau^*)}{2} + \varepsilon \int z_*(t) dt \quad (2.6)$$

Формулы (2.4)–(2.6) применимы на отрезке времени от начала действия импульса возмущения до начала действия следующего импульса. В момент начала действия следующего возмущения необходимо найти Φ и $d\Phi/d\tau$ по формулам (2.2) и (2.6); вычислить величины V , θ , z по известным значениям V_* , θ_* , z_* ; определив новое значение ε (для чего следует старое его значение разделить на $d\Phi/d\tau$), найти соответствующие ему величины V_* , θ_* , z_* и вновь применить формулы (2.4)–(2.6) на участке действия следующего возмущения.

В рассматриваемой постановке задача осложнена тем, что момент начала действия следующего возмущения должен совпадать с моментом прохождения α через 0, который заранее неизвестен. Разумеется, можно интегрировать систему уравнений (2.5) с малым шагом по времени, вычисляя на каждом шаге величину α и отслеживая момент прохождения его через $2\pi n$, т. к. движение по углу атаки является вращательным. Однако, смысл применения асимптотических приближений заключается именно в возможности существенного увеличения шага интегрирования. Поэтому для определения момента прохождения α через $2\pi n$, который обозначим τ_l , использовалась итерационная процедура, представляющая собой фактически метод касательных для решения уравнения $\alpha(\tau) = 2\pi n$. Начальное приближение для τ_l (τ_l^0) вычисляется при $\varepsilon = 0$. Затем дифференциальные уравнения (2.5) интегрируются на отрезке времени $[0, \tau_l^0]$, и определяются величины θ , Φ , $d\Phi/d\tau$ и α . На отрезке $[0, \tau_l]$ длины $O(1)$ асимптотические приближения должны давать значение быстрой переменной α с точностью $O(\varepsilon^2)$. Поэтому при выполнении условия

$$|\alpha - 2\pi n| \leq A\varepsilon^2 \quad (2.7)$$

где A — некоторая константа порядка 1, за τ_l принимается τ_l^0 . В противном случае, вычисляется поправка $\Delta\tau = (\alpha - 2\pi n) / (d\Phi/d\tau)$ с пренебрежением разницей между $d\Phi/d\tau$ и $d\alpha/d\tau$, и уравнения (2.5) интегрируются на отрезке $[\tau_l^0, \tau_l^0 + \Delta\tau]$. Процесс повторяется до выполнения условия (2.7). Сходимость его гарантируется вследствие близости τ_l^0 к τ_l , т. к. отбрасывание членов порядка ε приводит к ошибке того же порядка, в т. ч.

После окончания действия возмущений относительное движение представляет собой быстрое вращение, и его можно исследовать с помощью формул (2.4)–(2.6), положив в них $\tau^* = 0$. По мере спуска в плотные слои атмосферы вращение замедляется из-за роста аэродинамической жесткости, определяемой статическим аэродинамическим моментом, и из-за демпфирования, что выражается в росте величины $|z|$. Вращение считается быстрым, пока выполняется условие $|\varepsilon z| \ll 1$ или $|z| \ll \omega_0$, где ω_0 — угловая скорость вращения в момент окончания последнего возмущения.

При нарушении этого условия считается, что участок быстрых вращений закончился, и начался переходный участок от вращательного движения к колебательному, на котором асимптотические приближения неприменимы, и необходимо численно интегрировать исходную систему уравнений (1.1) [1, 2]. Интегрирование ведется до момента перехода относительного движения в быстрые колебания. Подробно алгоритм отслеживания типа относительного движения и выбора соответствующих расчетных формул изложены в [1–3, 8]. При переходе относительного движения в быстрые колебания вновь используются асимптотические приближения, но иного вида, чем в случае быстрых вращений.

3. Асимптотическое приближение быстрых колебаний. Колебательный характер относительного движения означает, что суммарный момент, действующий на тело $M_z = M_p - \rho V^2 S l / (2J_z) m_z(\alpha)$, является возвращающим и большим. Существует такой балансировочный угол атаки α_0 , что $\text{sign } M_z = -\text{sign}(\alpha - \alpha_0)$. Для больших по модулю значений $\alpha \in [-\pi, \pi]$ статический аэродинамический момент M_c в плотных слоях атмосферы велик благодаря большому скоростному напору, поэтому для реальных задач $|M_p| < |M_c|$.

Введем малый параметр ε соотношением [4]: $M_z = Q(\varphi, r, V, \theta, \alpha) / \varepsilon^2 = -Q(x, \alpha) / \varepsilon^2$, $Q = O(1)$.

Физический смысл этого соотношения состоит в следующем. Угловая частота колебаний тела, имеющая порядок $O((\partial M_z / \partial \alpha)^{1/2})$, должна быть настолько большой, чтобы параметры движения центра масс за период колебаний изменялись мало. Отсутствие явной зависимости от времени означает, что построенные далее асимптотические приближения применимы либо на участке действия возмущения, либо на участке между возмущениями по отдельности. Требуется также стационарность возмущающего момента на всем интервале его действия и, в отличие от случая быстрых вращений, — не налагается никаких ограничений на его зависимость от угла атаки. Важно лишь, чтобы относительное движение сохраняло характер быстрых колебаний.

Сделав стандартную замену независимой переменной $\tau = t/\varepsilon$, приведем систему уравнений (1.1) к следующему виду:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \frac{dV}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = O(\varepsilon); \quad \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = Q(\varphi, r, V, \theta, \alpha) - \varepsilon \frac{\rho V}{2J_z} m_{z0}^*(\alpha) \frac{d\alpha}{d\tau} - \varepsilon^2 F$$

$$m_{z0}^* = m_{z0} + J_z / (m l^2) \partial c_y^* / \partial \alpha, \quad c_y^* = c_y - c_{y\alpha} \sin \alpha, \quad F = O(1)$$

Окончательные формулы второго асимптотического приближения быстрых колебаний имеют вид

$$d\varphi/d\tau = -\varepsilon (V_*/r) \cos \theta_*, \quad dr/d\tau = \varepsilon V_* \sin \theta_*$$

$$dV_*/d\tau = -\varepsilon (\mu/r^2) \sin \theta_* - \varepsilon (\rho V_*^2 / (2m)) S \langle c_x \rangle$$

$$d\theta_*/d\tau = \varepsilon (V_*/r - \mu / (r^2 V_*)) \cos \theta_* + \varepsilon (\rho V_* / (2m)) S \langle c_y \rangle \quad (3.1)$$

$$\frac{dc_*}{d\tau} = -\varepsilon \int_{c_1}^{c_2} ((l m_{z0}^*(\alpha) / J_z + c_x(\alpha) / m) \rho V_* S / 2 + (\beta V_* + \mu / (r V_*^2))) \times$$

$$\times \left(\int_{\alpha}^{c_2} Q(x, q) dq \right)^{1/2} d\alpha / (T_0 m_z(c_*)), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = 2\pi / T_0, \quad \beta = -\frac{d\rho}{dr} / \rho$$

Величины T_0 , $\langle c_x \rangle$, $\langle c_y \rangle$ вычисляются по формулам [9]:

$$T_0 = 2^{1/2} \int_{c_1}^{c_2} \left(\int_{\alpha}^{c_2} Q(x, q) dq \right)^{-1/2} d\alpha, \quad \langle c_{x,y} \rangle = T_0^{-1} \int_{c_1}^{c_2} c_{x,y}(\alpha) \left(\int_{\alpha}^{c_2} Q(x, q) dq \right)^{-1/2} d\alpha \quad (3.2)$$

а величина c_1 определяется из решения трансцендентного уравнения

$$\int_{c_1}^{c_2} Q(x, q) dq = 0$$

Поправки второго приближения для V и θ вычисляются по формулам

$$u_v = -\frac{\rho V_*^2}{4\pi m} ST_0 \int_0^\psi [c_x(\alpha(\psi)) - \langle c_x \rangle] d\psi, \quad (3.3)$$

$$u_\theta = -\frac{\rho V_*^2}{4\pi m} ST_0 \int_0^\psi [c_y(\alpha(\psi)) - \langle c_y \rangle] d\psi$$

а функция $\alpha(\psi)$ определяется из решения порождающего уравнения

$$d^2\alpha/d\psi^2 + (T_0/4\pi^2) Q(x, \alpha) = 0, \quad x = \text{const}. \quad (3.4)$$

За начало отсчета фазы ($\psi=0$) принят момент первого прохождения $\alpha(\psi)$ через максимум.

Изложим алгоритм применения построенного второго асимптотического приближения быстрых колебаний на участке между возмущениями. В начальный момент времени известны параметры движения центра масс $\varphi_0, r_0, V_0, \theta_0$ и параметры относительного движения $\alpha_0, d\alpha_0/d\tau$. Начальное значение c определяется из уравнения

$$\left(\frac{d\alpha_0}{d\tau}\right)^2 = 2 \int_{\alpha_0}^c Q(x_0, \alpha) d\alpha$$

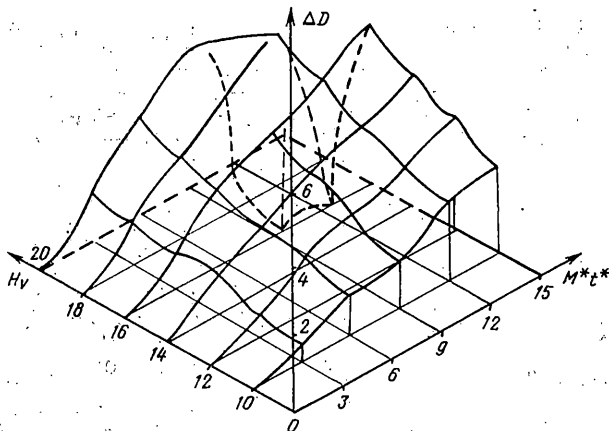
Затем вычисляются значения c_1 , по формулам (3.2) $T_0, \langle c_x \rangle, \langle c_y \rangle$ и начальные значения V_{*0}, θ_{*0} по формулам

$$V_{*0} = V_0 - \varepsilon u_v(x_0, \varphi_0), \quad \theta_{*0} = \theta_0 - \varepsilon u_\theta(x_0, \varphi_0) \quad (3.5)$$

Поправки $u_v(x_0, \varphi_0), u_\theta(x_0, \varphi_0)$ определяются численным интегрированием уравнения (3.4) с начальными условиями $\alpha = \alpha_0, d\alpha/d\psi = (T_0/2\pi) \times d\alpha/d\tau$ до момента прохождения α через максимум, соответствующий $\psi=0$. Нарботка фазы $\Delta\psi$ за это время и дает значение $\psi_0 = -\Delta\psi$. Функция $\alpha(\psi)$, вычисленная на отрезке $[\psi_0, 0]$, и значение ψ_0 подставляются в (3.3) и (3.5) для определения поправок u_v, u_θ и вычисления V_{*0}, θ_{*0} . При этом сеточная функция $\alpha(\psi)$ не запоминается, а получается в результате совместного интегрирования (3.4) и уравнений, полученных дифференцированием (3.3) по ψ при $x = \text{const}$. В итоге работы изложенного алгоритма находят начальные значения $V_{*0}, \theta_{*0}, \psi_0$ и уравнения (3.1) можно проинтегрировать на интервале времени $[0, \tau_I]$, где $\tau_I = (3\pi/2 - \psi_0)/(T_0/2\pi)$, T_0 — вычислено в начальный момент времени. Для принятого выбора отсчета фазы ее величина $3\pi/2$ соответствует моменту $\alpha=0$, когда начинается действие очередного возмущающего импульса. После интегрирования известны значения $V_*, \theta_*, c, r, \varphi$ и значение фазы, которое будет отличаться от $3\pi/2$, т. к. величина T_0 зависит от x . Соответственно и значение α не будет в точности равно нулю. Поправки u_v, u_θ определяются аналогично предыдущему случаю, а значения $\alpha, d\alpha/d\tau$ — из соотношений [9]:

$$\int \left(2 \int Q(x, y) dy \right)^{-1/2} dq = T_0 \left| \frac{\psi}{2\pi} - \left[\frac{\psi}{2\pi} \right] - \frac{1}{2} \right|$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \left(2 \int Q(x, y) dy \right)^{-1/2} dq \operatorname{sign} \left(\frac{\psi}{2\pi} - \left[\frac{\psi}{2\pi} \right] - \frac{1}{2} \right)$$



Вычислительный процесс завершен, если данное приближение дает значение $\alpha=0$ с погрешностью не хуже $O(\varepsilon^2)$, т. к. интервал интегрирования по τ имеет длину $O(1)$. В противном случае вычисленные значения параметров движения тела принимаются за начальные, и процесс повторяется.

Сходимость процесса проверялась на примере линейной системы уравнений, моделирующей основные свойства реального движения в атмосфере: возрастание аэродинамической жесткости и демпфирование. Для этой системы вычислительный процесс сходился за две итерации.

После окончания действия всех возмущений асимптотические формулы используются до момента, когда величина s становится порядка ε . Тогда считается, что колебания затухли, и далее исследуется невозмущенное движение твердого тела в атмосфере на пассивном участке траектории до момента его падения на поверхность планеты.

При расчетах по формулам п. 3 необходимо вычислять интегралы в (3.1) и собственные интегралы (3.2). Если вид зависимости Q от x произвольный, то эти интегралы необходимо брать численно при каждом вычислении правых частей (3.1). В случае $Q(x, \alpha) = Q_1(x) m_z(\alpha)$ множитель, характеризующий зависимость Q от x , выносится за знак интеграла. Тогда интегралы оказываются функциями только параметра s , т. к. s_1 однозначно определяется величиной s . Для экономии машинного времени можно заранее составить таблицы этих функций по известным аэродинамическим характеристикам. При задании зависимости $m_z = m_z(\alpha, M)$, где M — число Маха, можно поступить аналогично, составив таблицу с двумя входами.

Численное нахождение интегралов типа (3.2) несколько осложнено наличием особенности при $\alpha = s$. Поэтому в окрестности особой точки интегралы вычислялись аналитически путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора. Число членов разложения и размер окрестности выбирались такими, чтобы вносимая при этом погрешность имела порядок $O(\varepsilon^2)$.

Таким образом, осуществлено построение асимптотических приближений второго порядка для случаев, когда движение твердых тел вокруг центра масс представляет собой быстрые вращения или колебания, и при наличии возмущений. В [5] на основании результатов тестовых расчетов был сделан вывод о том, что для получения достаточной точности результатов при исследовании системы уравнений (1.1) асимптотическими методами необходимо использовать второе приближение, т. е. сохранять в разложениях члены порядка ε^2 . Второе асимптотическое приближение в данной задаче оказалось наиболее пригодным для исследования, так как оно хорошо учитывает взаимодействие относительного движения и движения центра масс и в отличие от третьего приближения, полученного в [8], не очень громоздко. Применение более высоких асимптотических приближений не только затруднительно из-за их громоздкости [8], но и бывает нецелесообразно ввиду свойств асимптотических рядов: такие ряды являются расходящимися и добавление новых членов может увеличить ошибку [10].

Построенные асимптотические приближения используются в комбинированном быстродействующем алгоритме расчета плоского движения твердых тел в атмосфере при действии возмущений, реализованном в виде пакета прикладных программ WARNED [1]. Структурная схема алгоритма подробно изложена в [1-3, 8]. Применение алгоритма позволяет примерно на порядок сократить время счета по сравнению со сквозным численным интегрированием системы уравнений (1.1). Время счета в итоге определяется той долей расчетного участка, на которой ведется непосредственное численное интегрирование системы (1.1), т. е. суммарной длительностью переходных участков.

Ниже приведены результаты расчетов, иллюстрирующие точность и быстродействие построенного алгоритма: а) величины рассеяния точки падения тела по дальности ΔD (в долях самой дальности) в результате действия возмущений в функции высоты их начала H_V ; б) величины относительной погрешности вычисления рассеяния по дальности $\delta\Delta D$ в сравнении с эталонным решением, полученным интегрированием системы (1.1) на всей траектории спуска; в) относительная экономия машинного времени R при использовании пакета WARNED

H_V	80	65	50	35	20	10	7
ΔD	-0,023	-0,021	-0,026	-0,026	0,002	0,006	0,004
$\delta\Delta D$	12	10	8	8	25	15	12
R	8	8	9	9	9,5	10	10

В целом алгоритм обеспечивает точность примерно 10–15%, и лишь при $H_V = 20$ км она ухудшается до 25%, что обусловлено малостью абсолютной величины рассеяния в этом случае (механизм влияния относительного движения на величину рассеяния описан в [3]).

Типичный пример результатов расчетов с использованием пакета WARNED приведен на фигуре. Здесь изображен трехмерный график функции $\Delta D(H_V, M^*t^*)$, где ΔD и H_V измеряются в км, M^*t^* — в c^{-1} . Расчеты потребовали около 7 минут машинного времени ЭВМ БЭСМ-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лохов Г. М., Подзоров С. И. Численное исследование движения твердых тел в атмосфере. // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987, Т. 27. № 2. С. 272–285.
2. Лохов Г. М., Подзоров С. И. К исследованию относительного движения твердого тела в атмосфере при действии возмущений. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 3–11.
3. Лохов Г. М., Подзоров С. И. Асимптотический расчет движения твердого тела в атмосфере при действии возмущающего момента. // Учен. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 2. С. 65–69.
4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. Егущенко Ю. Г. Асимптотический расчет влияния относительного движения спутника на движение его центра масс. // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 2. С. 262–273.
6. Асланов В. С., Тимбай Н. А., Бойко В. В. Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты. // Космич. исследования. 1984. Т. 19. Вып. 5. С. 680–687.
7. Кузман Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 347 с.
8. Лохов Г. М., Подзоров С. И., Сидоренко В. В. К исследованию влияния возмущений на траекторию движения твердого тела в атмосфере. М.: 1986. 24 с. (Ин-т прикл. математики, им. М. В. Келдыша АН СССР. Препринт № 70.)
9. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
10. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1989