МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 531.36

В. Н. ТХАЙ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Для обратимых систем установлена теорема существования периодических движений. Построены периодические движения тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной шероховатой плоскости, близкие к перманентным вращениям вокруг вертикали и известные ранее [1] в окрестности равновесия.

1. Периодические движения обратимых систем. Рассмотрим обратимую систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t),\ \mathbf{x},\ \mathbf{X}\in\mathbf{R}^p,\ \mathbf{X}(\mathbf{M}\mathbf{x},\ -t)=-\mathbf{M}\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{M}$ — некоторая постоянная $p\times p$ — матрица, а вектор-функция $\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t)$ является 2π-периодической по $x_1,\ldots,x_k$ $(0\leqslant k\leqslant p)$ и τ — периодической по времени t (или не зависит явно от времени). Предположим, что в рассматриваемой области переменных $(\mathbf{x},\ t)$ выполнены условия существования и единственности решения.

Система (1.1) инвариантна при подстановке $t\to(-1)^s t$, $\mathbf{x}\to\mathbf{M}^s\mathbf{x}$, $s\in\mathbf{N}$, поэтому, вместе с решением $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$, обязательно имеет решение $\mathbf{x}=\mathbf{M}^s\boldsymbol{\varphi}[(-1)^s t]$. Периодичность по части фазовых переменных приводит к тому, что решениями также являются векторы

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)+2\pi\mathbf{q},\ \mathbf{x}=\mathbf{M}^s\boldsymbol{\varphi}[(-1)^s t]+2\pi\mathbf{q},\ \mathbf{x}=\mathbf{M}^s(\boldsymbol{\varphi}[(-1)^s t]+2\pi\mathbf{q})$$

где $\mathbf{q}\in\mathbf{Z}^p$, $q_{k+1}=\ldots=q_p=0$. В пространстве $\mathbf{Y}=\mathbf{T}^k\times\mathbf{R}^{p-k}$ ($\mathbf{T}^k$ — k-мерный тор по $x_1,\ldots,x_k$) все решения, отличающиеся на $2\pi\mathbf{q}$, совпадают между собой.

Рассмотрим множество $\mathbf{L}=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=a,\ \mathbf{M}^{2s-1}\mathbf{a}=\mathbf{a}+2\pi\mathbf{q};\ s\in\mathbf{N}\}$. Если для решения $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ в начальный момент времени $\boldsymbol{\varphi}(0)\in\mathbf{L}$ при некотором s, то решения $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и $\boldsymbol{\varphi}^*(t)=\mathbf{M}^{2s-1}\boldsymbol{\varphi}(-t)$ отличаются на $2\pi\mathbf{q}$. Пусть при $t=\Delta$ также $\boldsymbol{\varphi}(\Delta)\in\mathbf{L}$ при этом же s. Тогда при $t=-\Delta$ имеем

$$\boldsymbol{\varphi}(-\Delta)+2\pi\mathbf{q}=\mathbf{M}^{2s-1}\boldsymbol{\varphi}(\Delta)=\boldsymbol{\varphi}(\Delta)+2\pi\mathbf{q}^*$$

($\mathbf{q}^*$ — целочисленный вектор типа $\mathbf{q}$) и в $\mathbf{Y}$ траектория замкнулась. Если при этом $2\Delta=\tau l$, $l\in\mathbf{N}$, то движение является τl-периодическим.

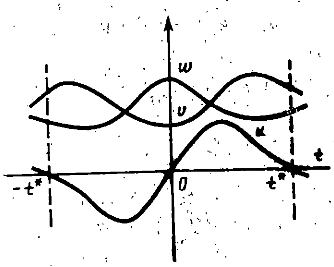
Сформулируем результат.

Теорема 1. Всякое движение $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1), на котором $\mathbf{x}(t^*)$, $\mathbf{x}(t^*+\Delta)\in\mathbf{L}$, $2\Delta=\tau l$ при некоторых s, $l\in\mathbf{N}$ и $t^*\in\mathbf{R}$ является τl-периодическим в пространстве $\mathbf{Y}$.

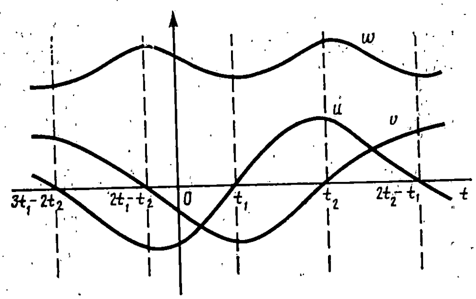
Следствие. При $k=0$, $l=1$ движение является τ-периодическим в пространстве переменных x (случай $s=1$ см. [2]).

Механические системы являются обратимыми и имеют вид [3]:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}),\ \mathbf{v}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}),\ \mathbf{w}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{W}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \\ \mathbf{U}(-\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}),\ \mathbf{V}(-\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=-\mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}), \\ \mathbf{W}(-\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=-\mathbf{W}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\end{gathered} \tag{1.2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

т. е. обладают линейным автоморфизмом M: $t\to -t$, $\mathbf{u}\to -\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\to\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\to\mathbf{w}$. Решение $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ системы (1.2) при условии $\mathbf{u}(0)=0$ задается нечетной функцией $\mathbf{u}(t)$ и четными функциями $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{w}(t)$. Из теоремы 1 следует, что при $\mathbf{u}(t^*)=0$, $t^*\neq 0$ это движение есть $2|t^*|$-периодическое (фиг. 1).

Возможен случай, когда в (1.2) есть и другие линейные автоморфизмы, не совпадающие с M. Например, могут также выполняться соотношения

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),\ \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$\mathbf{W}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),\ \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}) = -\mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$\mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}) = \mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{1.4}$$

В этом случае теорема 1 устанавливает три семейства периодических движений. Оказывается, выполнение условий (1.3) позволяет выводить и другие периодические движения.

Пусть для некоторого решения системы (1.2)–(1.3) в моменты времени t_1 и t_2 выполняются условия $\mathbf{u}(t_1)=\mathbf{v}(t_2)=0$. Если $t_1\neq t_2$, то на этом решении $\mathbf{u}(t)$ – нечетная относительно прямой $t=t_1$ и четная относительно $t=t_2$, $\mathbf{v}(t)$ – четная относительно прямой $t=t_1$ и нечетная относительно $t=t_2$, а функция $\mathbf{w}(t)$ – четная относительно обеих прямых $t=t_1$ и $t=t_2$ (фиг. 2). Следовательно, $\mathbf{u}(t_1)=\mathbf{u}(2t_2-t_1)=0$ и по теореме 1 это решение есть периодическое движение с периодом $4|t_2-t_1|$, причем $\mathbf{w}(t)$ имеет период $2|t_2-t_1|$, а функции $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ обращаются в нуль через интервалы, кратные $2|t_2-t_1|$.

Пусть теперь в системе (1.2)–(1.3) на некотором решении $\mathbf{u}(t^*)=0$, $\mathbf{v}(t^*)=0$, т. е. $t_1=t_2=t^*$. Тогда функции $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ одновременно четные и нечетные относительно прямой $t=t^*$. Это возможно только в том случае, когда $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ равны тождественно нулю. На таких движениях вектор $\mathbf{w}(t)$ меняется в соответствии с уравнением $\mathbf{w}^\cdot=\mathbf{W}(0, 0, \mathbf{w})$. Если $\mathbf{W}(0, 0, \mathbf{w})\equiv 0$, как это имеет место при выполнении (1.4), то имеем семейство установившихся движений $\mathbf{w}=\mathbf{c}$ (const).

Теорема 2. Решение системы (1.2)–(1.4) с начальными условиями $\mathbf{u}(0)=0$, $\mathbf{v}(0)=0$, $\mathbf{w}(0)=\mathbf{c}$ есть установившееся движение.

2. Периодические движения в окрестности установившегося движения. Уравнения возмущенного движения в окрестности установившегося движения $\mathbf{u}=\mathbf{v}=0$, $\mathbf{w}=\mathbf{c}$ системы (1.2)–(1.4) выводятся из (1.2) заменой $\mathbf{w}$ на $\mathbf{w}+\mathbf{c}$. Построенная таким образом система удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Следовательно, периодические движения, установленные выше теоремой 1, можно строить также в окрестности семейства установившихся движений. Это можно делать конструктивно, используя метод нормальных форм [4].

Предполагая аналитичность правых частей системы (1.2), выделим явно линейное приближение. Если принять наличие линейных автоморфизмов (1.2) и (1.3), то система запишется в виде

$$\mathbf{u}^{\cdot}=\mathbf{A}_{*}\mathbf{v}+\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}),\quad \mathbf{v}^{\cdot}=\mathbf{B}_{*}\mathbf{u}+\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$$
$$\mathbf{w}^{\cdot}=\mathbf{W}^{(1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w});\quad \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{u},0,\mathbf{w})\equiv 0,\quad \mathbf{V}^{(1)}(0,\mathbf{v},\mathbf{w})\equiv 0 \tag{2.1}$$

($\mathbf{A}_{*}$, $\mathbf{B}_{*}$ — постоянные матрицы). Пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{w}\in\mathbf{R}^m$. Характеристическое уравнение линейного приближения системы (2.1) имеет, вместе с корнем λ, корень $-\lambda$ и при $\det A_{*}B_{*}\neq 0$ имеет m нулевых и n пар $\pm\lambda_s$ ($s=1, \ldots, n$) ненулевых корней. Рассмотрим случай устойчивого установившегося движения, когда все числа λ_s чисто мнимые. Кроме того, исключим резонансный случай наличия целочисленных соотношений между числами λ_s ($s=1, \ldots, n$).

Невырожденным линейным преобразованием

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})^{T}=\mathbf{P}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})^{T} \tag{2.2}$$

(T — транспонирование) приведем систему (2.1) к виду

$$\mathbf{z}^{\cdot}=\Lambda\mathbf{z}+\mathbf{Z}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}},\mathbf{w}),\quad \bar{\mathbf{z}}^{\cdot}=-\Lambda\bar{\mathbf{z}}+\bar{\mathbf{Z}}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}},\mathbf{w})$$
$$\mathbf{w}^{\cdot}=\mathbf{W}_{*}^{(1)}(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}},\mathbf{w}),\quad \Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{2.3}$$

где $\mathbf{z}$, $\bar{\mathbf{z}}$ — комплексно-сопряженные n — векторы, а разложения нелинейных функций $\mathbf{Z}$, $\bar{\mathbf{Z}}$, $\mathbf{W}_{*}^{(1)}$ содержат только чисто мнимые коэффициенты, причем функции обращаются в нуль при $\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}=0$. Подставляя (2.2) в (2.1) и учитывая (2.3), получим следующие системы линейных уравнений для определения матрицы преобразования $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|$:

$$\begin{gathered}
-\lambda_s p_{s1}+a_{11}^{*}p_{n+1,\,s}+\ldots+a_{1n}^{*}p_{2n,\,s}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-\lambda_s p_{ns}+a_{n1}^{*}p_{n+1,\,s}+\ldots+a_{nn}^{*}p_{2n,\,s}=0\\
b_{11}^{*}p_{1s}+\ldots+b_{1n}^{*}p_{ns}-\lambda_s p_{n+1,\,s}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_{n1}^{*}p_{1s}+\ldots+b_{nn}^{*}p_{ns}-\lambda_s p_{2n,\,s}=0\quad (s=1, \ldots, 2n)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

если считать, что $\lambda_{j+n}=-\lambda_j$ ($j=1, \ldots, n$), $\mathbf{A}_{*}=\|a_{ij}^{*}\|$, $\mathbf{B}^{*}=\|b_{ij}^{*}\|$. Определители этих систем совпадают с левой частью характеристического уравнения и равны нулю; системы (2.4) имеют нетривиальные решения. Найдем из первых n уравнений вектор $\mathbf{P}_s^{*}=(p_{1s}, \ldots, p_{ns})^T$ и подставим в оставшиеся уравнения. Тогда для определения вектора $\mathbf{P}_s^{**}$ получим вещественную систему

$$(\mathbf{B}_{*}\mathbf{A}_{*}-\mathbf{E}\Lambda_2)\mathbf{P}_s^{**}=0,\quad \mathbf{P}_s^{**}=(p_{n+1,\,s}, \ldots, p_{2n,\,s})^T\quad (s=1, \ldots, n),$$
$$\Lambda_2=\operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$$

($\mathbf{E}$ — единичная матрица). Если вектор $\mathbf{P}_s^{**}$ действительный, что всегда можно достигнуть, то вектор $\mathbf{P}_s^{*}$, определяемый через $\mathbf{P}_s^{**}$ из (2.4), будет состоять из чисто мнимых элементов. Если теперь вместо λ_s взять $\lambda_{s+n}=-\lambda_s$, то уравнения для $\mathbf{P}_s^{**}$ и $\overset{**}{\mathbf{P}}_{n+1}=(p_{n+1,n+s}, \ldots, p_{2n,n+s})^T$ совпадают и можно положить $\overset{**}{\mathbf{P}}_{n+1}=\mathbf{P}_s^{**}$ ($s=1, \ldots, n$). В этом случае $\overset{*}{\mathbf{P}}_{n+s}=(p_{n+1,\,s}, \ldots, p_{2n,\,s})^T=-\mathbf{P}_s^{*}$. Таким образом матрица $\mathbf{P}$ всегда может быть определена в виде

$$\mathbf{P}=\left\|\begin{matrix} i\mathbf{Q} & -i\mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{R}\end{matrix}\right\|$$

где $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$, $\mathbf{R}=\|r_{ij}\|$ — действительные $n\times n$-матрицы. Если теперь положить $z_s=\rho_s\exp(i\theta_s)$, $\bar z_s=\rho_s\exp(-i\theta_s)$ $(s=1, \ldots, n)$, то преобразование имеет вид

$$u_j=-2(q_{j1}\rho_1\sin\theta_1+\ldots+q_{jn}\rho_n\sin\theta_n) \tag{2.5}$$
$$v_j=2(r_{j1}\rho_1\cos\theta_1+\ldots+r_{jn}\rho_n\cos\theta_n) \quad (j=1, \ldots, n)$$

Система (2.3) не меняется при замене $t\to -t$, $\mathbf{z}\to\bar{\mathbf{z}}$, $\bar{\mathbf{z}}\to\mathbf{z}$, $\mathbf{w}\to\mathbf{w}$. Этим же свойством обладает и система, полученная из (2.3) после нормализации [4], если нормализующее преобразование $z_s=\eta_s+\ldots$, $\bar z_s=\bar\eta_s+\ldots$, $w_k=\xi_k+\ldots$ $(s=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, m)$ взять с действительными коэффициентами. При отсутствии резонансов тогда имеем

$$\xi_k^{\boldsymbol\cdot}=0 \quad (k=1, \ldots, m), \quad \eta_s^{\boldsymbol\cdot}=\lambda_s\eta_s+i\Psi_s(\xi, r_1, \ldots, r_n)\eta_s$$
$$\bar\eta_s^{\boldsymbol\cdot}=-\lambda_s\bar\eta_s-i\Psi_s(\xi, r_1, \ldots, r_n)\bar\eta_s, \quad r_s=\eta_s\bar\eta_s \quad (s=1, \ldots, n)$$

где Ψ_s — формальные ряды от ξ и r с действительными коэффициентами. Согласно [4], преобразование аналитично на множестве $\mathbf{A}^0=\mathbf{U}\mathbf{A}_s^0$, $\mathbf{A}_s^0=\{\xi, \eta, \bar\eta : \xi=0,\ \eta_j=\bar\eta_j=0;\ j=1, \ldots, n;\ j\neq s\}$ $(s=1, \ldots, n)$, которое дает n семейств периодических движений, каждое из которых зависит от одного параметра c_s. На s-м семействе

$$\eta_s=c_s\exp(i\omega_s t); \quad \bar\eta_s=c_s\exp(-i\omega_s t)$$
$$\omega_s=|\lambda_s|+\Psi_s(0, 0, \ldots, 0, c_s^2, 0, \ldots, 0)$$
$$u_j=-2q_{js}\rho_s\sin\theta_s, \quad v_j=2r_{js}\rho_s\cos\theta_s \quad (j=1, \ldots, n)$$

и функции η_s, $\bar\eta_s$, z_s, $\bar z_s$, ρ_s являются периодическими периода $T=2\pi/\omega_s$, а θ_s меняется со временем монотонно. Значит, существуют два несовпадающих момента времени t_1 и t_2 такие, что $\mathbf{u}(t_1)=\mathbf{0}$, $\mathbf{v}(t_2)=\mathbf{0}$ и построенные периодические движения попадают под теорему 1. Отметим, что в первом приближении имеем

$$u_j=-2q_{js}c_s\sin\omega_s t+\ldots, \quad v_j=2r_{js}c_s\cos\omega_s t+\ldots \quad (j=1, \ldots, n)$$

3. Однородный эллипсоид на шероховатой плоскости. Пусть тяжелый однородный эллипсоид катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Для описания его движения воспользуемся уравнениями, отнесенными к подвижной жестко связанной с телом системе координат с началом в центре масс тела и осями, направленными по осям эллипсоида. Тогда [5]:

$$x^{\boldsymbol\cdot}=yr-zq+\Phi_1, \quad p^{\boldsymbol\cdot}=\Delta_p/\Delta$$
$$y^{\boldsymbol\cdot}=zp-xr+\Phi_2, \quad q^{\boldsymbol\cdot}=\Delta_q/\Delta \tag{3.1}$$
$$z^{\boldsymbol\cdot}=xq-yp+\Phi_3, \quad r^{\boldsymbol\cdot}=\Delta_r/\Delta$$

$$\Phi_1=\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}(x^2-a^2)zp+\frac{b^2-a^2}{b^2a^2}(x^2-a^2)yr+\frac{c^2-b^2}{c^2b^2}xyzp$$

$$F_1=(B-C)qr+m\Phi_1(\boldsymbol\omega, \mathbf{r}_\mu)-mp(\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}_\mu^{\boldsymbol\cdot})+mg\frac{a^2(c^2-b^2)}{\Delta_*}yz$$

$$\Delta_p=\{BC+m[B(x^2+y^2)+C(x^2+z^2)]+mx^2\mathbf{r}_\mu^2\}F_1+$$
$$+mxy(C+m\mathbf{r}_\mu^2)F_2+mxz(B+m\mathbf{r}_\mu^2)F_3$$
$$\Delta=ABC+m^2\mathbf{r}_\mu^2(Ax^2+By^2+Cz^2)+m[AB(x^2+y^2)+AC(x^2+z^2)+BC(y^2+z^2)]$$
$$\Delta_*=(x^2b^4c^4+y^2a^4c^4+z^2a^4b^4)^{1/2}, \quad x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$
$$\boldsymbol\omega=(p, q, r), \quad \mathbf{r}_\mu=(x, y, z), \quad \mathbf{r}_\mu^2=x^2+y^2+z^2$$
$$(\boldsymbol\omega, \mathbf{r}_\mu)=px+qy+rz, \quad (\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}_\mu^{\boldsymbol\cdot})=xx^{\boldsymbol\cdot}+yy^{\boldsymbol\cdot}+zz^{\boldsymbol\cdot}$$

а остальные функции получаются циклической заменой $x \to y \to z \to x$, $a \to b \to c \to a$, $A \to B \to C \to A$, $p \to q \to r \to p$, $\Phi_1 \to \Phi_2 \to \Phi_3 \to \Phi_1$, $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_1$.

Здесь ω — вектор мгновенной угловой скорости, $\mathbf{r}_\mu$ — радиус-вектор точки контакта эллипсоида с плоскостью, a, b, c — полуоси эллипсоида, A, B, C — главные центральные моменты инерции, m — масса эллипсоида, g — ускорение свободного падения.

Система уравнений движения (3.1) имеет три линейных автоморфизма $(t, x, y, z, p, q, r) \Rightarrow 1)$ $(-t, -x, y, z, -p, q, r)$, 2) $(-t, x, -y, z, p, -q, r)$, 3) $(-t, x, y, -z, p, q, -r)$ и является системой вида (1.2)—(1.4), в которой $\mathbf{u}=(x, p)^T$, $\mathbf{v}=(y, q)^T$, $\mathbf{w}=(z, r)^T$.

Рассмотрим движение эллипсоида с начальными условиями $x^0=0$, $q^0=0$, $r^0=0$, а p^0, y^0, z^0 — произвольны. Тогда в любой другой момент времени на этом движении $x=q=r=0$ и имеем качение в главной плоскости yz. Если $p^0=0$ и p еще раз обращается в нуль, то такое движение периодическое (теорема 1). Если $p^0=0$ и в любой другой момент времени $p \neq 0$, то обязательно обратится в нуль y (или z) (качение в одном направлении) и движение будет периодическое (теорема 1). Но это значит, что p снова обратится в нуль, что исключается.

Таким образом, качение эллипсоида в главной плоскости есть периодическое движение двух типов: 1) угловая скорость p может обратиться в нуль, 2) $p \neq 0$, обращаются в нуль попеременно y и z.

Применим теперь к системе (3.1) теорему 2. Немедленно получим: движения с начальными условиями: 1) x^0, p^0, $y^0=q^0=0$, $z^0=r^0=0$; 2) $x^0=p^0=0$, y^0, q^0, $z^0=r^0=0$; 3) $x^0=p^0=0$, $y^0=q^0=0$, z^0, r^0 являются установившимися. Это перманентные вращения вокруг одной из осей, совпадающей с вертикалью.

Рассмотрим какое-либо из установившихся движений, например, $x^0=0$, $p^0=0$, $y^0=0$, $q^0=0$, $z^0=-c$, $r^0=\omega(\mathrm{const})$ и построим в его окрестности периодические движения, следуя п. 2. Уравнения возмущенного движения получим из (3.1) заменой z на $z-c$ и r на $r+\omega$ и эти уравнения типа (1.2)—(1.3). Если к тому же исключить z, воспользовавшись уравнением поверхности эллипсоида, то в системе (2.1) имеем

$$\mathbf{A}_* = \left\| \begin{matrix} a^2\omega/b^2 & a^2/c \\ 5\,\dfrac{c\omega^2(b^2-a^2)+g(b^2-c^2)}{b^2(b^2+6c^2)} & \dfrac{6c^2-5a^2-b^2}{b^2+6c^2} \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathbf{B}_* = \left\| \begin{matrix} -b^2\omega/a^2 & -b^2/c^2 \\ -5\,\dfrac{c\omega^2(a^2-b^2)+g(a^2-c^2)}{a^2(a^2+6c^2)} & -\dfrac{6c^2-5b^2-a^2}{a^2+6c^2} \end{matrix} \right\|$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda(\alpha\lambda^4+\beta\lambda^2+\gamma)=0, \qquad \alpha=(a^2+6c^2)(b^2+6c^2)$$

$$\beta=[\alpha+36(c^2-a^2)(c^2-b^2)]\,\omega^2-5g[(a^2+6c^2)(c^2-b^2)+(b^2+6c^2)(c^2-a^2)]/c$$

$$\gamma=(c^2-a^2)(c^2-b^2)(6\omega^2+5g/c)^2$$

имеет один нулевой и две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_s$ $(s=1, 2)$:

$$\lambda_1=\left[\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right]^{1/2}, \quad \lambda_2=\left[\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right]^{1/2}$$

если

$$\beta^2>4\alpha\gamma \tag{3.2}$$

Последнее условие выполняется тождественно при вращении вокруг наименьшей оси и при вращении вокруг наибольшей оси, если угловая скорость достаточно велика [5]:

$$|\omega|>\sqrt{\frac{5g}{c}\,\frac{((a^2+6c^2)(c^2-b^2))^{1/2}+((b^2+6c^2)(c^2-a^2))^{1/2}}{((a^2+6c^2)(b^2+6c^2))^{1/2}-6((c^2-a^2)(c^2-b^2))^{1/2}}} \qquad (3.3)$$

Итак, рассмотрим эти случаи, предполагая дополнительно, что $k\lambda_1\neq\lambda_2$ (k — целое). Тогда для определения матрицы $\mathbf{R}$ имеем системы

$$\begin{cases}(c_{11}+\lambda_s^2)r_{1s}+c_{12}r_{2s}=0\\ c_{21}r_{1s}+(c_{22}+\lambda_s^2)r_{2s}=0 \quad (s=1,\,2)\end{cases}$$

$$c_{11}=\omega^2+5\,\frac{c\omega^2(b^2-a^2)+g(b^2-c^2)}{c(b^2+6c^2)},\quad c_{12}=\frac{b^2}{c}\,\frac{12c^2-5a^2}{b^2+6c^2}\,\omega$$

$$c_{21}=\frac{5\omega\,[c\omega^2(a^2-b^2)(a^2+6b^2)+g(a^2+b^2-2c^2)(b^2+6c^2)-g(b^2-c^2)(a^2-6b^2)]}{b^2(a^2+6c^2)(b^2+6c^2)}$$

$$c_{22}=\frac{5[c\omega^2(a^2+b^2)+g(a^2-c^2)](b^2+6c^2)+(6c^2-5a^2-b^2)(6c^2-5b^2-a^2)c\omega^2}{(a^2+6c^2)(b^2+6c^2)}$$

Определители этих систем совпадают с левой частью характеристического уравнения. Поэтому, если $c_{12}=0$, то $\lambda_s^2+c_{ss}=0$. В этом случае положим $r_{11}=1$, $r_{22}=1$. В остальных случаях r_{1s} (или r_{2s}) можно выбрать равными одной и той же постоянной. При этом всегда матрица Q находится по формулам

$$q_{1s}=\frac{1}{|\lambda_s|}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\omega r_{1s}+\frac{a^2}{c}\,r_{2s}\right)$$

$$q_{2s}=\frac{1}{|\lambda_s|}\left[5\,\frac{c\omega^2(b^2-a^2)+g(b^2-c^2)}{b^2(b^2+6c^2)}\,r_{1s}+\frac{6c^2-5a^2-b^2}{(b^2+6c^2)}\,\omega r_{2s}\right] \quad (s=1,2)$$

В результате проведенных вычислений матрица преобразования p определена в виде ($c_{12}\neq0$):

$$p_{1s}=\frac{a^2}{c\lambda_s}\left[\frac{(6c\omega^2+g)(c^2-b^2)}{c(b^2+6c^2)}-\lambda_s^2\right]$$

$$p_{2s}=\frac{1}{\lambda_s}\,\frac{\omega}{b^2+6c^2}\,[6\omega^2(b^2-c^2)+(6c^2-5a^2-b^2)\lambda_s^2]$$

$$p_{3s}=\frac{b^2\omega}{c}\,\frac{12c^2-5a^2}{b^2+6c^2}$$

$$p_{4s}=\frac{c\omega^2(6b^2+6c^2-a^2)+5g(b^2-c^2)}{c(b^2+6c^2)} \quad (s=1,2)$$

Значит, на периодических движениях

$$x=-\frac{2a^2c_s}{c|\lambda_s|}\left[\frac{(6c\omega^2+g)(c^2-b^2)}{c(b^2+6c^2)}-\lambda_s^2\right]\sin\omega_s t+\dots$$

$$p=\frac{2\omega c_s}{|\lambda_s|(b^2+6c^2)}[6\omega^2(b^2-c^2)+(6c^2-5a^2-b^2)\lambda_s^2]\sin\omega_s t+\dots$$

$$y=\frac{2b^2\omega c_s}{c}\,\frac{12c^2-5a^2}{b^2+6c^2}\cos\omega_s t+\dots$$

$$q=2\left[\frac{c\omega^2(6b^2+6c^2-a^2)+5g(b^2-c^2)}{c(b^2+6c^2)}+\lambda_s^2\right]c_s\cos\omega_s t+\dots$$

$$z=0+\ldots,\quad r=\omega+\ldots,\quad \omega_s=|\lambda_s|+\ldots\quad (s=1,2)$$

(c_s — малые постоянные). В первом приближении имеем

$$x^2/a_1^2+y^2/b_1^2=1,\quad p^2/\alpha_1^2+q^2/\beta_1^2=1$$

(a_1, b_1, α_1, β_1 — постоянные). Поэтому, на построенных периодических движениях точка контакта описывает на поверхности тела кривую, близкую к эллипсу, также как и конец вектора угловой скорости в связанной системе координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости // ПММ. 1982. Т. 46, № 4. С. 553–567.
2. *Heinbockel J. H., Struble R. A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // Journal of the Sosiety for Industrial and Applied Mathematics. 1965. V. 13. N 2. P. 425–440.
3. *Тхай В. Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
4. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
5. *Маркеев А. П.* К геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-е Перм. ун-та. 1982. С. 123–131.

Москва

Поступила в редакцию
12.VII.1990