МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 624.07:534.1

И. А. КИЙКО, А. Д. ЧАРУХЧЕВ

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ИЗГИБЕ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Приведена постановка задачи об определении оптимальной формы стержня прямоугольного поперечного сечения, изгибаемого в области упругопластических деформаций, из условия минимума энергии деформации при постоянстве объема материала. Доказано существование единственного решения этой задачи, на основе чего это решение выписывается в конечном виде. Показано, что оптимальная форма стержня не зависит от механических свойств материала.

Задача об оптимальной форме стержня, которая максимизирует критическую сжимающую силу, сформулирована в постановке Кармана. Получившуюся нетрадиционную задачу на собственные значения предложено решать методом последовательных приближений, фактически построено первое приближение. Исследовано асимптотическое поведение решения вблизи концов стержня.

1. Стержень прямоугольного поперечного сечения $b\times 2h(x)$, свободно опертый по торцам, изгибается под нагрузкой $q(x)$. Ставится задача подобрать такую функцию $h(x)$, чтобы при заданном объеме стержня его «жесткость» была бы максимальной. Считается при этом, что максимуму жесткости соответствует минимум энергии деформации. Материал стержня работает в области упруго-пластических деформаций (строго говоря, в области нелинейной упругости, поскольку разгрузка не рассматривается), поэтому напряжение σ связано с деформацией ε законом $\sigma=E\varepsilon(1-\omega(\varepsilon))$, где E – модуль Юнга, $\omega(\varepsilon)$ – функция Ильюшина. Соответственно этому изгибающий момент в произвольном сечении стержня имеет вид

$$M(x)=2b\int_0^h \sigma y\,dy=\frac{2}{3}bE\varkappa h^3-2bE\varkappa\int_{y_s}^h \omega(\varkappa y)y^2\,dy \qquad (1.1)$$

здесь $\varkappa$ – кривизна изогнутой оси, y_s – граница области линейных деформаций. Поскольку $q(x)$ задано, $M(x)$ – известная функция.

С учетом соотношений $\varepsilon=\varkappa y$, $\varepsilon_s=\varkappa y_s$ обозначим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}=\frac{y}{y_s}=z,\qquad \frac{\varkappa h}{\varepsilon_s}=v,\qquad \int_1^v \omega(\varepsilon_s z)z^2\,dz=\Phi(v) \qquad (1.2)$$

подставив это в (1.1), получим

$$M(x)={}^2/_3 bE\varkappa h^3-2bE\varepsilon_s{}^3\Phi(v)/\varkappa^2 \qquad (1.3)$$

Энергия деформации изгибаемого стержня с точностью до множителя равна J_1:

$$J_1=\int_0^l M(x)\varkappa(x)\,dx$$

его объем обозначим V_0, т. е. имеем

$$2b\int_0^l h(x)\,dx-V_0=0 \qquad (1.4)$$

Задача оптимизации формулируется теперь следующим образом: определить $h(x)$, чтобы функционал J_1 достигал минимума при условиях (1.3) и (1.4). Составим обобщенный функционал Лагранжа

$$J=J_1+\int_0^l\left(M-\frac{2}{3}bE\varkappa h^3+\frac{2bE\varepsilon_s^3}{\varkappa^2}\Phi(v)\right)X\,dx+\beta\left(\int_0^h h\,dx-\frac{V_0}{2b}\right) \quad (1.5)$$

здесь $X(x)$ — сопряженная переменная, β — множитель Лагранжа. Неизвестные h, $\varkappa$, X, β находятся из условия стационарности функционала J, что приводит к четырем уравнениям. Два из этих уравнений — это соотношения (1.3) и (1.4); остальные два имеют вид

$$2bE\varkappa h^2X(1-\omega(\varkappa h))=\beta \quad (1.6)$$

$$2bEh^3X({}^1/_3+2\Phi(v)/v^3-\omega(\varkappa h))=M(x) \quad (1.7)$$

при выводе этих формул учтено, что на основании (1.2) $\partial\Phi/\partial h=\omega(\varkappa h)v/h$, $\partial\Phi/\partial\varkappa=\omega(\varkappa h)v/\varkappa$.

Из (1.6), (1.7) исключим $X(x)$, получим в результате

$$\beta h/\varkappa=3M+3\omega(\beta h/\varkappa-M)-6\beta h\Phi/(v\varkappa) \quad (1.8)$$

уравнение (1.3) перепишем в виде

$$\varkappa h^3=3M/(2bE)+3\varepsilon_s^3\Phi/\varkappa^2 \quad (1.9)$$

Соотношения (1.4), (1.8), (1.9) решают задачу — из них находятся функции $h(x)$, $\varkappa(x)$ и постоянная β.

По отношению к системе (1.8), (1.9) доказывается следующее утверждение: эта система имеет, по крайней мере в некоторой окрестности точки $\varkappa h=\varepsilon_s$, единственное решение вида $\varkappa h=\alpha=\text{const}$. Для случая упругого состояния стержня доказательство элементарно. Действительно, если $\varkappa h\leqslant\varepsilon_s$, то $\omega=0$, $\Phi=0$, и из (1.8), (1.9), поделив их почленно, сразу же находим $(\varkappa h)^2=\beta/(2bE)$, чем и завершается доказательство.

В общем случае $\varkappa h>\varepsilon_s$ преобразуем сначала выражение для Φ; из (1.2) по теореме о среднем найдем

$$\Phi=\int_1^v\omega(\varepsilon_s z)z^2\,dz=\frac{1}{3}\omega(\varepsilon_s z_0)(v^3-1) \quad (1.10)$$

В силу монотонности функции $\omega(\varepsilon)$ всегда найдется такое число δ, $0<\delta<1$, что будет выполнено равенство $\omega(\varepsilon_s z_0)=\delta\omega(\varkappa h)$, поэтому из (1.10) последует $\Phi=(\delta/3)\omega(\varkappa h)(v^3-1)$. Подставив это значение Φ в выражения (1.8), (1.9), приведем их к виду

$$(\beta h/\varkappa)(1-\omega(3-2\delta+2\delta/v^3))=3M(1-\omega) \quad (1.11)$$

$$\varkappa h^3(1-\delta\omega(1-1/v^3))=3M/(2bE) \quad (1.12)$$

Обозначим $\varkappa h=u$, положим $1-\omega(u)(3-2\delta+2\delta\varepsilon_s^3/u^3)=f_1(u)$, $1-\delta\omega(u)(1-\varepsilon_s^3/u^3)=f_2(u)$ и поделим уравнения (1.11), (1.12) почленно; получим в результате:

$$(\beta/2bE)f_1(u)=u^2(1-\omega(u))f_2(u) \quad (1.13)$$

На основании известных свойств функции $\omega(u)$ можно заключить, что $f_1(u)$ при $u>\varepsilon_s$ в окрестности ε_s монотонно убывает от значения $f_1(\varepsilon_s)=1$; наоборот, выражение, стоящее в (1.13) справа, с ростом u монотонно возрастает. Отсюда следует, что функции слева и справа в (1.13) имеют в области $u>\varepsilon_s$ единственную точку пересечения $u=\varkappa h=\text{const}$, чем и завершается доказательство сделанного выше утверждения.

Из (1.11), (1.12) теперь получаем $h=A_1M\varkappa$, $\varkappa h^3=B_1M$, где A_1, B_1 —

некоторые постоянные; отсюда $h^4=A_1B_1M^2$, $\varkappa=(A_1B_1M^2)^{1/4}/A_1M$, и окончательно

$$h=AM^{1/2}, \qquad \varkappa=B/M^{1/2} \tag{1.14}$$

Параметр A сразу же находится из (1.4):

$$A=V_0/2bM_0, \quad M_0=\int_0^l (M(x))^{1/2}\,dx \tag{1.15}$$

подставив найденное значение A в (1.9), получим уравнение для определения B:

$$BA^3=3/(2bE)+3\varepsilon_s^2\Phi(AB/\varepsilon_s)/B^2 \tag{1.16}$$

Поставленная задача, таким образом, решена полностью; из уравнения (1.8) может быть определен параметр β, хотя фактической нужды в этом нет.

Интересен смысл полученного решения: оптимальное распределение высоты $h(x)$ при ограничении (1.4) не зависит от механических свойств материала; свойствами материала определяется величина прогиба, поскольку они (свойства) входят в (1.16), откуда находится B и, следовательно, кривизна $\varkappa$.

Если $\varkappa h\leqslant\varepsilon_s$, то $\omega=0$, $\Phi=0$, и мы получаем «упругое» решение $B_y=12b^2M_0^3/EV_0^3$, $\varkappa_y=B_y/M^{1/2}$; поэтому условием работы стержня в упругой области будет неравенство $\varkappa h=6bM_0^2/EV_0^2\leqslant\varepsilon_s$.

Замечание. Полученные результаты распространяются на статически неопределимые случаи изгиба, при этом, вообще говоря, оптимальное распределение $h(x)$ будет зависеть от механических свойств материала. Тем не менее, легко доказать следующее утверждение: в случаях статической неопределимости, которые приводят к однородной системе уравнений относительно прогиба и его производной (напр., заделка торцов; промежуточные опоры, в которых прогиб равен нулю, так же, как и на концах), оптимальное распределение $h(x)$ не зависит от свойств материала. Пусть балка будет n раз статически неопределима; в точках $x_1=0$, $x_2,\ldots,x_n=l$ введем n параметров λ_k, от которых будет зависеть изгибающий момент $M=M(x,\lambda_k)$, $k=1,2,\ldots,n$. Из (1.14) найдем

$$w=B\int_0^x\frac{(x-\xi)\,d\xi}{(M(\xi;\lambda_k))^{1/2}}+C_1x, \qquad w'=B\int_0^x\frac{d\xi}{(M(\xi;\lambda_k))^{1/2}}+C_1$$

поскольку $w(0)=0$. Для определения параметров λ_k и C_1 имеем систему вида

$$w(l)=B\int_0^l(l-\xi)M^{-1/2}\,d\xi+C_1l=0, \qquad w(x_k)=B\int_0^{x_k}(x_k-\xi)M^{-1/2}\,d\xi+C_1x_k=0$$

либо вида

$$w'(0)=0, \quad (C_1=0), \qquad w'(l)=B\int_0^l M^{-1/2}\,d\xi=0, \qquad w(x_k)=0$$
$$(k=2,\ldots,n-1)$$

либо аналогичного. Видно, что во всех случаях параметры λ_k не зависят от B, что и доказывает сделанное утверждение.

2. Стержень, поперечное сечение которого с переменной площадью $F(x)$ обладает двумя осями симметрии, сжимается силой P, при этом всюду в стержне напряжение превосходит предел текучести. Поставим задачу об устойчивости такого стержня в рамках оптимизации: при постоянном объеме материала стержня найти функцию $F(x)$, которая максимизировала бы сжимающую критическую силу P.

Постановка задачи устойчивости в рамках теории малых упругопластических деформаций хорошо известна и сводится к уравнениям [1]:

$$KIw''+Pw=0, \quad w(0)=w(l)=0 \tag{2.1}$$

$$K=E(1-(1-E_1/E)(I_0-y_0S_0)/I) \tag{2.2}$$

$$y_0+(1-E_1/E)(S_0-y_0F_0)/F=0 \tag{2.3}$$

Здесь K — модуль Кармана, $E_1=d\sigma/d\varepsilon$ — касательный модуль к диаграмме упрочнения в точке, где $P=\sigma F(x)$, I — момент инерции поперечного сечения; введены, кроме того, обозначения

$$F_0=\int_{y_0}^{h/2} b(y)\,dy, \qquad S_0=\int_{y_0}^{h/2} b(y)\,y\,dy, \qquad I_0=\int_{y_0}^{h/2} b(y)\,y^2\,dy$$

где $b(y)$ — ширина поперечного сечения, $h(x)$ — его высота.

Принципиальным моментом в поставленной задаче является зависимость модуля Кармана от P и $h(x)$ одновременно, и значит традиционные методы исследования не могут быть использованы. Поэтому подробнее рассмотрим задачу для стержня прямоугольного поперечного сечения $F(x)=2bh(x)$, в которой могут быть намечены пути аналитического подхода к решению.

Для модуля Кармана имеем из (2.2), (2.3):

$$K=4EE_1/(\sqrt{E}+\sqrt{E_1})^2 \tag{2.4}$$

видно, что K зависит от $h(x)$ только через E_1. Отсюда следует первый случай полного аналитического решения задачи.

1. Если материал характеризуется диаграммой с линейным упрочнением, то всюду в упругопластической области независимо от величины напряжения $E_1=d\sigma/d\varepsilon$ постоянно. Поэтому $K=K_0=\text{const}$, и из (2.1) приходим к задаче на собственные значения $h^3w''+\beta^2w=0$, $\beta^2=12P/K_0b$, к которой надо добавить соответствующие граничные условия и ограничения. Задача, как видно, тождественна таковой для упругого стержня, которая решена [2].

2. Многие материалы характерны тем, что для них диаграмма упрочнения мало отличается от линейной. В таком случае функция упрочнения может быть представлена в виде, содержащем малый параметр λ: $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)=\varepsilon_s+(\sigma-\sigma_0)/E_0-\lambda\psi_1(\sigma)$; отсюда находим

$$d\varepsilon/d\sigma=1/E_0-\lambda\psi_1'(\sigma)\equiv(1-\lambda E_0\psi(\sigma))/E_0$$

$$E_1=d\sigma/d\varepsilon=E_0/(1-\lambda E_0\psi(\sigma)) \tag{2.5}$$

Подставив это в (2.4), найдем выражение для модуля Кармана (с точностью до слагаемых, содержащих λ в первой степени)

$$K=K_0/(1-\lambda K_1(\sigma)); \quad K_0=4EE_0/(\sqrt{E}+\sqrt{E_0})^2$$

$$K_1=K_0\psi(\sigma)(1+(E_0/E)^{1/2})/4 \tag{2.6}$$

Запишем соотношения задачи максимизации силы, обусловленной оптимальным распределением высоты $h(x)$:

$$KIw''+Pw=0, \quad KI=K_0bh^3/(12(1-\lambda K_1))$$

$$w(0)=w(l)=0, \quad b\int_0^l h(x)\,dx=V_0, \quad P\to\max_h \tag{2.7}$$

Введем безразмерные переменные $\bar{x}=x/l$, $\bar{h}=hbl/V_0$, $\bar{P}=12b^2l^5P/(K_0V_0^3)$; опустив в дальнейшем изложении черточки над буквами, приведем систему (2.7) к виду:

$$h^3w''+P(1-\lambda K_1)w=0, \qquad w(0)=w(1)=0$$

$$\int_0^1 h(x)dx=1, \qquad P\to\max_h \tag{2.8}$$

при этом напряжение через новые переменные выразится следующим образом $\sigma=\gamma P/h(x)$, $\gamma=K_0V_0^2/(12b^2l^4)$.

Задачу (2.8) предлагается решать методом последовательных приближений. В нулевом приближении полагаем $K_1=0$ и приходим к случаю линейного упрочнения; соответствующее решение обозначим $h_0(x)$, P_0. Далее определяем $\sigma_0=\gamma P_0/h_0$ и функцию $f_0(x)=1-\lambda K_1(\sigma_0)$; отметим, что $h_0(x)$ и соответственно $f_0(x)$ симметричны относительно точки $x=0{,}5$, поэтому $f_0'(0{,}5)=0$.

В первом приближении из (2.8) получаем задачу

$$h_1^3w_1''+P_1f_0(x)w_1=0, \qquad w_1(0)=w_1(1)=0$$

$$\int_0^1 h_1(x)dx=1, \qquad P_1\to\max_{h_1} \tag{2.9}$$

схема построения следующих приближений очевидна, сходимость метода в каждом конкретном случае должна быть доказана. Отметим, что задача первого и всех последующих приближений эквивалентна задаче максимизации критической силы для неоднородного по длине стержня, представляющей самостоятельный интерес.

Рассмотрим задачу первого приближения. Стандартная процедура приводит, в дополнение к (2.9), к необходимому условию оптимальности:

$$f_0w_1'^2=h_1^4 \tag{2.10}$$

которое замыкает краевую задачу и делает возможным определить переменную проектирования $h_1(x)$ и критическую силу P_1.

Замкнутое аналитическое решение (2.9), (2.10) не представляется возможным; проведем поэтому исследование для случая кривой упрочнения с малой кривизной, когда $|dK_1/d\sigma|\ll 1$. В дальнейшем изложении следуем [2]. Из (2.10) найдем

$$w_1w_1'=\frac{2h_1^4}{f_0}\left(\frac{h_1'}{h_1}-\frac{\lambda\sigma_0}{4f_0}\frac{dK_1}{d\sigma_0}\frac{h_0'}{h_0}\right)$$

вследствие сделанного предположения вторым слагаемым в скобках можно с хорошей точностью пренебречь по сравнению с первым, поэтому окончательно получим

$$w_1w_1'=2h_1^3h_1'/f_0 \tag{2.11}$$

Домножим первое из (2.10) на w_1', преобразуем его с помощью (2.11) и проинтегрируем; найдем в результате $(w_1')^2=4(C-P_1h_1)$, с использованием (2.10) и (2.11) отсюда будем иметь

$$f_0(C-P_1h_1)=(h_1h_1')^2 \tag{2.12}$$

Аналогично [2] легко доказывается, что в точке $x=0{,}5$ функция h_1 имеет максимум (решение h_1 ищется в классе функций, симметричных относительно середины стержня); обозначим его $h_1(0{,}5)=h_1^*$, положим $h_1=h_1^*H_1(x)$, $P_1=p_1(h_1^*)^3$ и на основании условия $h_1'(0{,}5)=0$ определим $C=p_1(h_1^*)^4$. Из (2.12) теперь получим $(0\leqslant x\leqslant 0{,}5)$:

$$1-\left(1+\frac{H_1}{2}\right)(1-H_1)^{1/2}=\frac{3}{4}p_1^{1/2}\int_0^x (f_0(t))^{1/2}dt=\frac{3}{4}p_1^{1/2}\Phi_1(x) \tag{2.13}$$

Условие $H_1(0,5)=1$ служит для определения p_1:

$$p_1=16/(9\Phi_1^2(0,5)) \qquad (2.14)$$

после чего (2.13) может быть записано в виде

$$1-(1+H_1/2)(1-H_1)^{1/2}=\Phi_1(x)/\Phi_1(0,5)\equiv\varphi(x) \qquad (2.15)$$

при этом $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$. Введением новой переменной $u^2=1-H_1$ легко доказывается, что (2.15) имеет три действительных корня, из которых лишь один обладает нужным свойством $0\leqslant H_1\leqslant 1$.

Требование постоянства объема стержня доставляет соотношение для определения параметра h_1^*:

$$2\int_0^{1/2} H_1(x)\,dx=1 \qquad (2.16)$$

соотношениями (2.14)–(2.16) поставленная задача решается полностью.

Выясним асимптотическое поведение H_1 в окрестности точки $x=0$. В нулевом приближении $\psi_1(\sigma)=0$, поэтому $\varphi(x)=2x$, и из (2.15) имеем $H_0(x)\simeq\sqrt{8x}$ при $x\to 0$. Соответственно этому $\sigma_0=\gamma P_0/h_0\approx C_1/\sqrt{x}$, где C_1 – некоторая постоянная. Будем полагать, что с ростом σ касательный модуль стремится к некоторому предельному значению, следовательно, $\psi(\sigma)\approx\psi_0-C_2/\sigma^\alpha$, $\alpha>0$; поэтому $f_0(x)=1-\lambda K_1(\sigma_0)\approx 1-\lambda C_3K_1^*(\psi_0-C_2\sigma^{-\alpha})\equiv\equiv 1-\lambda K_2+\lambda K_3\sigma^{-\alpha}\approx 1-\lambda K_2+\lambda C_4x^{\alpha/2}$. На этом основании имеем

$$\Phi_1(x)=\int_0^x (f_0(t))^{1/2}\,dt\approx(1-\lambda K_2)x+\frac{\lambda C_4x^{1+\alpha/2}}{(1-\lambda K_2)(2\alpha+1)}$$

главную часть асимптотики определяет первое слагаемое, поэтому из (2.15) получаем $\varphi(x)\approx 2x$, $H_1(x)\approx\sqrt{8x}$, $x\to 0$. Как видно, нулевое и первое приближение «приведенной» высоты H_1 при $x\to 0$ асимптотически тождественны; асимптотические представления функций $h_0(x)$ и $h_1(x)$ будут различаться коэффициентами, поскольку будут различны их максимальные значения. Такое же заключение можно сделать, как легко видеть, относительно любого приближения.

Аналогично [2] задача может быть исследована в случае, когда задано ограничение на минимальное значение высоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 304 с.

Москва, Баку

Поступила в редакцию
1.XII.1989