МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3:534.1

Д. Д. ЗАХАРОВ, И. В. СИМОНОВ

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ДИСКОВИДНОЙ ТРЕЩИНОЙ ОТРЫВА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Строится решение задачи об осесимметричных колебаниях безграничной двухслойной пластины с межфазной трещиной, асимптотически точное в низкочастотной области и при малом отношении толщины пластины к радиусу трещины [1]. Асимптотический подход позволяет получить опорные результаты для соответствующей трехмерной задачи и провести подробный параметрический анализ. Исследуется энергия системы и мощность излучения на бесконечность, амплитудно-частотные характеристики максимальных перемещений, напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений. Возможная смена типов разрушения анализируется на основе критерия разрушения, идейно близкого к критериям Эрдогана-Си [2, 3]. При варьировании параметров слоев обнаруживается эффект расщепления квазирезонансов и новая форма колебаний, характерная для несимметричной структуры (она напоминает синхронное движение впаянных в слои жестких шайб). Найдено уравнение поверхности в пространстве параметров, на которой колебания локализуются, появляется действительный спектр, резонансы становятся неограниченными.

1. Рассматривается упругая пластина, составленная из двух идеально сцепленных бесконечных слоев с дисковидной трещиной на границе раздела сред; ρ_j — плотность слоев; $H_j (j=1, 2)$, $H_3=H_1+H_2$ — толщины; E_j, ν_j — модули Юнга и коэффициенты Пуассона.

Будем предполагать, что величина $\varepsilon=H_3/2L\ll 1$, где L минимальный характерный размер рисунка деформации в направлении вдоль слоев и прочие малые (большие) параметры отсутствуют. На характерное время процесса наложим дополнительное ограничение $t_0 \sim L/\varepsilon c_1$, $c_1=\sqrt{E_1/\rho_1}$. Тогда от исходных трехмерных динамических уравнений теории упругости можно перейти к приближенным двумерным осредненным уравнениям [1]. При этом существует такая система отсчета (связанная с приведенной средней линией), что в первых приближениях разделяются динамическая задача о нормальном нагружении и квазистатическая задача о тангенциальном нагружении с точностью $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях. Для случая нормального нагружения это уравнения классической теории изгиба Кирхгофа — Лява с осредненными коэффициентами.

Введем безразмерную (нормированную на $L=R$, R — радиус трещины) цилиндрическую систему координат z, r, θ. Положение границы раздела слоев и положение лицевой поверхности j-го слоя зафиксируем координатами

$$z_1=(\varkappa h_2^2-h_1^2)/2(\varkappa h_2+h_1), \qquad h_j=H_j/R$$
$$z_{j+1}=z_1+(-1)^{j+1}h_j, \qquad \varkappa=E_2(1-\nu_1^2)/E_1(1-\nu_2^2) \tag{1.1}$$

На берегах трещины зададим нормальную нагрузку интенсивности q (временной множитель $e^{i\omega t}$ опускаем), вне трещины поставим условие полного контакта слоев.

Области, занимаемые однородными дисками над и под трещиной обозначим $\Omega_{1,2}$, область $\Omega_3=\{z_3\leqslant z\leqslant z_2,\ r\geqslant 1,\ 0\leqslant\theta<2\pi\}$ — дополнение до всей пластины.

Приходим к следующим задачам в асимптотической постановке для нормированных на R вертикальных прогибов w_j в областях Ω_j $(j=1,\ 2,\ 3)$:

$$(\Delta-k_j^2)(\Delta+k_j^2)w_j=a_j,\quad \Delta=\partial^2/\partial r^2+(1/r)\partial/\partial r \tag{1.2}$$

$$k_j=(\rho_jH_j\omega^2R^4/D_j)^{1/4},\qquad D_j=E_jH_j^3/12(1-\nu_j^2)\quad (j=1,\ 2)$$

$$D_3=2\{D_1(2z_2+z_1)/h_1-D_2(2z_3+z_1)/h_2\}$$

$$\rho_3=(\rho_1H_1+\rho_2H_2)/H_3$$

$$a_j=(-1)^{j+1}qR^3/D_j\quad (j=1,\ 2),\qquad a_3=0$$

Условие полного контакта слоев в области Ω_3 учтено при выводе асимптотических уравнений. На бесконечности поставим дополнительное условие излучения:

$$p[w_3]\geqslant 0 \tag{1.3}$$

где p — средний за период колебаний поток мощности через круговую цилиндрическую поверхность с осью z.

Требованию непрерывности перемещений и напряжений на общей границе областей $\Omega_{1,2}$ и Ω_3 удовлетворяем интегрально, рассматривая обычные условия непрерывности прогибов, углов наклона, изгибающих моментов и перерезывающих сил при $r=1$ $(j=1,\ 2,\ 3)$:

$$\begin{gathered} w_1=w_2=w_3,\qquad \psi_1=\psi_2=\psi_3,\qquad \psi_j=-\partial w_j/\partial r\\ M_1+M_2=M_3,\quad M_j=-\frac{D_j}{R}\left[\Delta w_j-\frac{1-\nu_j}{r}\frac{\partial w_j}{\partial r}\right]\\ \nu_3=\frac{2}{D_3}\left[\left(2+3\frac{z_1}{h_1}\right)\nu_1D_1+\left(2-3\frac{z_1}{h_2}\right)\nu_2D_2\right]\\ Q_1+Q_2=Q_3,\quad Q_j=\frac{D_j}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w_j) \end{gathered}\tag{1.4}$$

Общие интегралы уравнений (1.2) с учетом условия излучения (1.3) принимают вид

$$w_1=(AJ_0(k_1r)+BI_0(k_1r)-1)b_1$$

$$w_2=(cJ_0(k_2r)+DI_0(k_2r))b_1+b_2$$

$$w_3=(EH_0^{(2)}(k_3r)+FK_0(k_3r))b_1,\qquad b_j=q/(\rho_jH_jR\omega^2)$$

где $A,\ B,\ldots,\ F$ — комплексные константы, определяемые из системы (1.4); J_0, I_0 — обычные и модифицированные функции Бесселя; $H_0^{(2)}$, K_0 — функции Ханкеля второго рода и Макдональда нулевых порядков.

Поскольку в однородных дисках $\Omega_{1,2}$ напряжения σ_r, σ_θ изменяются линейно по толщине и антисимметричны относительно собственных средних линий, достаточно исследовать их на границе раздела слоев. Соответствующие выражения даются классической теорией изгиба. Напряжение σ_{rz} имеет на единицу меньший порядок и не равно нулю на границе раздела лишь при $r\geqslant 1$. В области Ω_3 напряжения имеют вид:

$$\sigma_{rj}=-\frac{E_jz}{1-\nu_j^2}\left(\Delta-\frac{v_j}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)w_3,\quad \sigma_{rzj}=\frac{E_j(z^2-z_{j+1}^2)}{2(1-\nu_j^2)}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w_3)$$

$$\sigma_{\theta j}=-\frac{E_jz}{1-\nu_j^2}\left(\nu_j\Delta+\frac{v_j}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)w_3,\quad v_j=1-\nu_j$$

2. Полная механическая энергия пластины оказывается бесконечной, т. к. решение не принадлежит энергетическому классу L_2. Однако имеет смысл рассмотреть энергию областей $\Omega_{1,2}$. Осредняя по периоду колебаний и интегрируя по областям, получаем следующую формулу для суммарной энергии:

$$e_{12}=\frac{3(1-\nu_1^2)}{k_1^4}(1+\alpha^{-1})^2(e_1+e_2)\frac{q^2R^3}{E_1h_3^3}$$

$$\alpha=h_1/h_2,\quad \gamma=\rho_1/\rho_2 \tag{2.1}$$

$$e_1=|A|^2(J_{01}^2+J_{11}^2)+|B|^2(I_{01}^2-I_{11}^2)+1/2-\mathrm{Re}(AJ_{11}+BI_{11})/k_1-$$
$$-v_1|AJ_{11}-BI_{11}|/k_1^2$$

$$e_2=\gamma\alpha^{-1}\{|C|^2(J_{02}^2+J_{12}^2)+|D|^2(I_{02}^2-I_{12}^2)+(\alpha\gamma^{-1})^2/2+$$
$$+\alpha\,\mathrm{Re}(CJ_{12}+DI_{12})/\gamma k_2-v_2|CJ_{12}-DI_{12}|^2/k_2^2$$

$$J_{ij}=J_i(k_j),\qquad I_{ij}=I_i(k_j)$$

Осредненная по периоду колебаний мощность, излучаемая на бесконечность, выражается простым равенством:

$$p[w_3]=\frac{4|E|^2}{k_1^2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2\delta C_1\frac{(qR)^2}{E_1h_3^2},\qquad \delta=\left\{\frac{12(1-\nu_1^2)}{\alpha^3}\left(\frac{\alpha+\gamma}{\varkappa(\varkappa_1+\varkappa_2)}\right)^{3/2}\right\}^{1/2}$$

$$\varkappa_1=\alpha^2(\alpha^3+\varkappa(3+4\alpha))/\varkappa(\varkappa+\alpha),\qquad \varkappa_2=(\varkappa+\alpha(4+3\alpha))/(\varkappa+\alpha)$$

3. Асимптотическая теория дает регулярные выражения для напряжений, тогда как в полной постановке наличие трещины приводит к появлению особенности порядка $\rho^{-1/2}$ (ρ — расстояние до контура трещины). Для определения коэффициентов интенсивности напряжений используем метод, изложенный в [4, 5]. Исходное допущение состоит в том, что развитие трещины расслаивания в окрестности контура определяется изгибающими моментами и нормальными и касательными усилиями на контуре в областях Ω_j. Допущение выполняется тем точнее, чем меньше ε. Для трещины нормального отрыва применение теории инвариантных Г-интегралов [5] приводит к выражению:

$$2\Gamma(t)=D_1\xi_1^2+D_2\xi_2^2-D_3\xi_3^2 \tag{3.1}$$

где ξ_j — кривизна пластинки в зоне Ω_j на контуре трещины.

С другой стороны, рассмотрение задачи о составной полуплоскости с трещиной на границе раздела[1] дает другое выражение для Г:

$$\Gamma(t)={}^1/_2\,\mathrm{ch}^{-2}\pi\alpha SK_*^2(t),\quad S=((1-\nu_1^2)E_2+(1-\nu_2^2)E_1)/E_1E_2 \tag{3.2}$$

$$\alpha_1=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{(1+\nu_2)E_1+(3-\nu_1)E_2}{(3-\nu_2)E_1+(1+\nu_1)E_2}$$

Величина $K_*(t)$ является эффективным коэффициентом интенсивности напряжений отрыва,

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{rz}(t)=(2\pi\rho)^{-1/2}K_*(t)\,\sin(\alpha_1\ln\rho-a)+O(1),\quad a=\mathrm{Const}$$
$$\mathrm{Re}\,\sigma_z(t)=(2\pi\rho)^{-1/2}K_*(t)\,\cos(\alpha_1\ln\rho-a)+O(1),\quad \rho\to+0$$

---

[1] *Симонов И. В.* Распространение трещин по границе раздела упругих сред: Дис. д-ра физ.-мат. наук. 01.02.04. М., 1986. 316 с.

Сопоставляя (3.1) и (3.2), определяем амплитуду этого коэффициента интенсивности

$$K=4\left\{\left|\frac{\partial^2u_1}{\partial r^2}\right|^2+\frac{\varkappa}{\alpha}\left|\frac{\partial^2u_2}{\partial r^2}\right|^2-\frac{\varkappa(\varkappa_1+\varkappa_2)}{\alpha^3}\left|\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}\right|^2\right\}^{1/2}\frac{\eta qR^{1/2}}{k_1^4h_1^{1/2}}$$

$$\eta=\left\{\frac{3(1-\nu_1^2)^2(1+\varkappa^{-1})}{(1+\nu_1+(1+\nu_2)(3-4\nu_2)e)((1+\nu_2)e+(1+\nu_1)(3-4\nu_1))}\right\}^{1/2} \quad (3.3)$$

$$u_j=w_j/b_1,\ e=E_1/E_2$$

4. Аналогичным образом можно рассмотреть задачу статики в асимптотической постановке, а затем ввести коэффициенты динамичности основных величин. При постоянной нормальной нагрузке интенсивности q на берегах трещины выражения для прогибов и эффективного коэффициента интенсивности напряжений отрыва принимают следующий простой вид

$$w_j=a_j(r^2-1)^2/64\ (j=1,\ 2),\ w_3=0$$

$$K_*={}^1/_2(1+\alpha^3/\varkappa)\eta qR^{1/2}h_1^{-3/2}$$

5. При исследовании колебаний описанной упругой системы интересна эволюция максимумов прогибов, коэффициентов интенсивности напряжений и асимптотически наиболее значимых напряжений σ_r, σ_θ, а также энергетических характеристик p, e_{12}, e_1/e_2, $2\pi p/\omega e_{12}$ (2.2), (2.3) при варьировании параметров k_1, α, e, γ, ν_1, ν_2. Анализировались безразмерные амплитудно-частотные характеристики, зависимости волновых чисел квазирезонансов от наиболее существенного параметра α и формы колебаний (амплитуды и фазы). Нормировка производилась на соответствующие степени величин q, q/E_1, R и h_3; строились также коэффициенты динамичности.

Проследим основные особенности колебаний пластины с отслоением в области частот, включающей несколько первых квазирезонансов, фиксируя упругие параметры и меняя величину α.

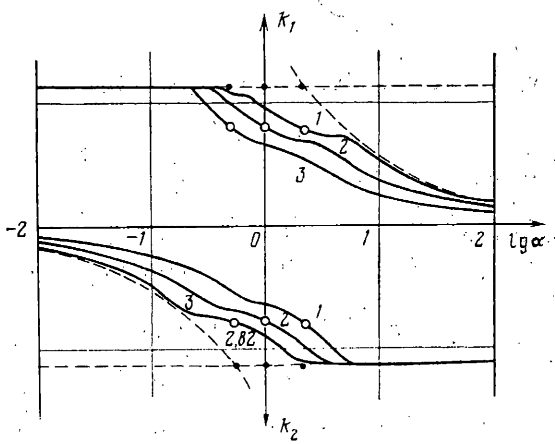
При малых α (верхний слой очень тонкий) колеблется преимущественно диск Ω_1 над трещиной, а диск Ω_2 возбуждается слабо. Имеет место аналогия с моделью защемленной по контуру пластины Ω_1.

Для сопоставления на фиг. 1 ($\gamma=1$; $e_j=0{,}25$; 1; 4; $j=1,\ 2,\ 3$) показаны пунктиром первые резонансные волновые числа в такой модели [6]: $k_1\approx3{,}2$, $k_2/k_1=\alpha^{1/2}(\gamma/\varkappa)^{1/4}$.

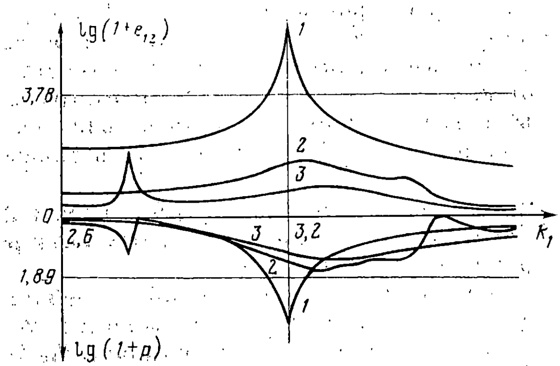
Всюду на графиках $\nu_1=\nu_2=0{,}25$. Амплитудно-частотные характеристики на квазирезонансе $k_1\approx3{,}2$ имеют ярко выраженные локальные максимумы. Математически эти максимумы обусловлены поведением комплексного определителя системы (1.4):

$$\Delta=\Delta_1+i\Delta_2 \quad (5.1)$$

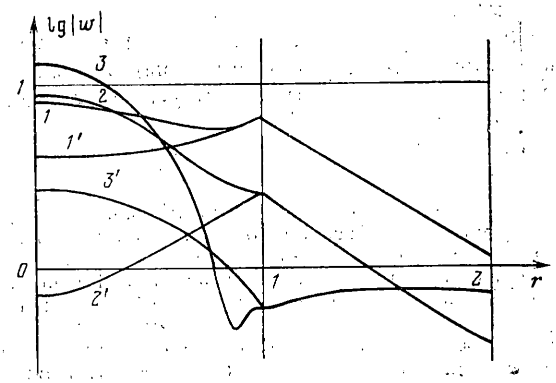
При малых α квазирезонансы отвечает корням уравнения $\Delta_2=0$. По мере увеличения α растет излучаемая на бесконечность энергия и отклонение первого квазирезонансного волнового числа от значения $\approx3{,}2$, а начиная с некоторого значения $\alpha=\alpha_*(e,\ \gamma,\ \nu_1,\ \nu_2)$ появляются качественные различия. Численный счет обнаруживает кратный корень мнимой части определителя (5.1). Поверхность $\alpha=\alpha_*$ неявно задается системой уравнений $\Delta_2=0$, $d\Delta_2/dk_1=0$. Затем значительное влияние на резонансные свойства оказывает и действительная часть определителя Δ_1. При $\alpha>\alpha_*$ первый квазирезонанс расщепляется на два ($k_1{}^*$ и $k_1{}^{**}$). Нижнее волновое число $k_1{}^*$ резко уменьшается с увеличением α, тогда как верхнее число $k_1{}^{**}$ остается относительно близким к значению 3,2. Добротности и амплитуды обоих резонансов существенно отличаются (фиг. 2: $\gamma=1$; $e=0{,}25$; $\alpha_j=0{,}1$; 0,4; 0,8), а нижний квазирезонанс постепенно вырождается с ростом α. Объяснение этому следующее; в окрестности точки $\alpha=\alpha_*$ благодаря упругим связям в движение вовлекается «толстый» диск. На частоте, соответствующей $k_1=k_1{}^*$ происходит перестройка формы колебаний от первоначальной «шапочки» к новой форме с практически синфазными дви-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

жениями дисков $\Omega_{1,2}$ и близкими амплитудами, слабо зависящими от радиуса r (фиг. 3, 4: $\gamma=1$; $e=0{,}25$; $\alpha=0{,}8$; $k_{1j}=k_1^*$, k_{1a}, k_1^{**}; индекс со штрихом соответствует диску Ω). Существенно возбуждается прикраевая область $r\approx1$. Моделью такого движения служат синфазные колебания двух жестких шайб, впаянных в слои пластины вместо дисков $\Omega_{1,2}$ и обладающих теми же массами.

На ветви $k_1=k_1^{**}$ в движение также вовлекаются два диска, но их амплитуды растут с увеличением α, а разность фаз стремится к π. Форма прогибов остается близкой к шапочке.

Квазирезонансная зона при возникновении расщепления довольно широкая, максимумы на характеристиках сильно «размыты». В окрестности $k_1=k_1^{**}$ добротность остается меньшей, чем при $k_1=k_1^*$, где она постепенно увеличивается.

Нижний квазирезонанс исчезает полностью при пересечении параметром α поверхности $\alpha=\alpha_0(e, \gamma, \nu_1, \nu_2)$. Для однородной пластины это случай симметрично расположенной трещины $\alpha_0\equiv1$. Если слои разнородные, то поверхность задается уравнением тождественности волновых свойств дисков $\Omega_{1,2}$:

$$k_1=k_2\Rightarrow$$
$$\alpha_0=(\varkappa/\gamma)^{1/2}\Leftrightarrow(H_1/H_2)^2=E_2\rho_1(1-\nu_1^2)/E_1\rho_2(1-\nu_2^2) \tag{5.2}$$

Колебания локализуются ($p\equiv0$), появляется действительный спектр – счетное множество частот, совпадающих со спектром колебаний защемленного диска Ω_1 или Ω_2. Резонансы становятся неограниченными, в области Ω_3 движение отсутствует. Можно доказать, что на поверхности (5.2) коэффициенты динамичности всех величин инвариантны и решение системы (1.4) строится из двух решений задач о колебаниях защемленных дисков $\Omega_{1,2}$ (выполняются равенства $M_1=-M_2$, $Q_1=-Q_2$).

Затем, при увеличении α ($\alpha>\alpha_0$) качественная картина повторяется с точностью до перемены мест слоев 1 и 2.

Обратимся к анализу энергетических и других характеристик колебаний системы. При малых α энергия e_{12} дисков $\Omega_{1,2}$, мощность излучения на бесконечность p, отношение энергий e_1/e_2 и амплитуда эффективного коэффициента интенсивности напряжений K (и ее коэффициент динамичности K_D), как и другие характеристики, имеют ярко выраженный локальный максимум при $k_1\approx3{,}2$ (фиг. 2, 5, 6). Отношение средней излученной за период энергии к суммарной энергии дисков $2\pi p/\omega e_{12}$ при этом слабомонотонно возрастает по экспоненциальному закону с ростом k_1. Для больших α ($\alpha\approx\alpha_*$) на всех характеристиках появляются сильно размытые локальные максимумы вблизи частоты расщепления. Отметим появление точки $k_1=k_{1a}$ ($k_{1a}\approx3{,}6$ для кривой *1* фиг. 2), в которой прекращается излучение на бесконечность, а энергия дисков e_{12} имеет резкий спад за счет снижения амплитуды колебаний более активного диска Ω_1. Это аналог явления антирезонанса. При увеличении α в интервале $\alpha_*<\alpha<\alpha_0$ точка антирезонанса смещается влево и $k_1^*<k_{1a}<k_1^{**}$ (фиг. 2, 5). Другие характеристики ($\max w_j$, K, ...) также имеют локальные минимумы вблизи этой точки. Аналогичное явление гашения колебаний численный счет обнаруживает и между следующими квазирезонансами (фиг. 2 и фиг. 7: $e=\gamma=1$; $\alpha_j=0{,}1$; 0,2; 0,4).

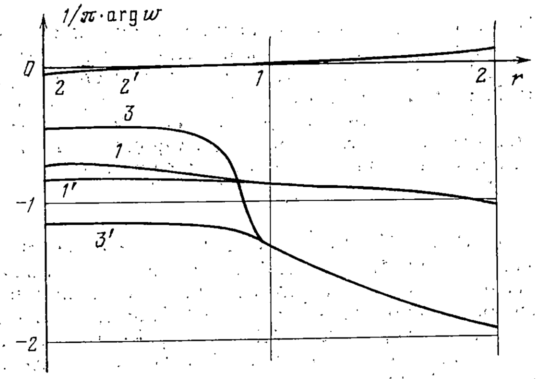
Резкие максимумы на графиках излучаемой мощности p и энергии e_{12} естественны для формы «жесткие шайбы» ($k_1=k_1^*$). На первый взгляд кажется необычным подскок амплитуды коэффициента интенсивности K (и параметра K_D). В случае $E_2=4E_1$ (фиг. 6) эти величины в несколько раз больше, чем на верхнем квазирезонансе $k_1=k_1^{**}$. По графикам форм и фаз прогибов (кривые *1* и *1'*, *3* и *3'* фиг. 3, 4) видно, что в обоих случаях трещина раскрыта слабо, но пластина сильно изогнута вблизи фронта трещины при $k_1=k_1^*$. Именно за счет изгиба следует отнести этот эффект.

Анализ результатов показывает, что упругая система обладает наибольшей чувствительностью к параметру α. В сравнении с задачей об однородной пластине с трещиной варьирование параметров e или γ приводит к существенным изменениям соответствующих характеристик, к заметному смещению точек $\alpha=\alpha_*$, α_0 согласно (5.2). Соотношения между максимумами на характеристиках при $k_1=k_1^*$ и $k_1=k_1^{**}$ также меняются, но всегда наблюдается локальный максимум энергии и мощности излучения в окрестности $\alpha\approx\alpha_*$, $k_1=k_1^*$. Зависимости волновых чисел k_1^*2 (α) первого квазирезонанса при соотношениях плотностей $\gamma_j=4$; 1; 0,25 показаны на фиг. 8.

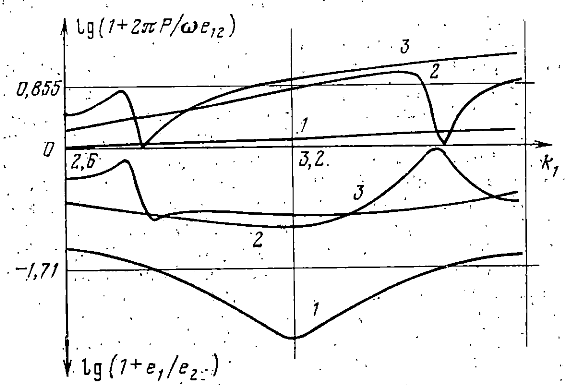
Изменение коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 относительно слабо влияет на характеристики.

Таким образом, качественная картина с описанными явлениями сохраняется в широком диапазоне значений параметров.

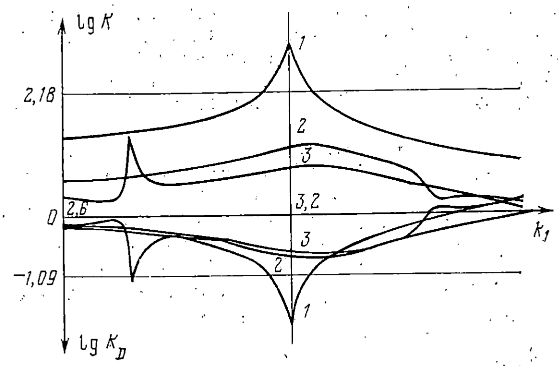
Конечно, эффекты расщепления с появлением промежуточных точек антирезонансов и неограниченных резонансов имеют место не только на первых частотах. Чем выше номер резонанса m, тем меньше значение α_m^*, при котором на некоторой частоте впервые реализуется расщепление. Для пояснения снова рассмотрим коле-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

бания двух защемленных по контуру пластин $\Omega_{1,2}$. На фиг. 9 представлены графики $k_j(\alpha)$ резонансных волновых чисел обоих дисков. Точки пересечения сплошных и пунктирных линий образуют набор $\{\alpha_{mn}\}$ и соответствуют одновременной реализации m-го резонанса Ω_1 и n-го резонанса Ω_2 при $k_1=k_m^r$ или $k_2=k_n^r$. При больших значениях индексов $k_m^r=\pi m+\beta_m$, $\beta_m\to 0$ $(m\to\infty)$ и для величины α_{mn} получаем [6]:

$$\alpha_{mn}=(k_n^r/k_m^r)^2(\varkappa/\gamma)^{1/2}\approx(n/m)^2(\varkappa/\gamma)^{1/2}$$

Резонансы в такой системе неограниченные и график суммарной энергии e_{12} имеет вертикальные асимптоты в узлах криволинейной сетки фиг. 9. При увеличении параметра α происходит миграция резонансов из бесконечности в область низких частот. Однако в силу независимости колебаний Ω_1 и Ω_2 расщеплений это не вызывает. В узлах сетки происходят частичные наложения резонансов, пока при достижении значения $\alpha=\alpha_0$ не произойдет их полного совпадения.

При малых α между задачами о колебаниях пластины с трещиной и защемленного диска Ω_1 существует аналогия (дисперсионные уравнения асимптотически близки). Но чем больше индекс m, тем меньше значение α, при котором в окрестности $k_1\approx k_m^r$ эта аналогия нарушается из-за возбуждения второго слоя. Упругие связи и наличие излучения искажают криволинейную сетку (фиг. 1, фиг. 9). Квазирезонанс расплывается и происходит расщепление с последующей миграцией одного из новой пары квазирезонансов в область низких частот (с ростом α, $\alpha>\alpha_m{}^*$) и порождением новых расщеплений.

Аналогия восстанавливается полностью при $\alpha=\alpha_0$: весь спектр становится действительным, а резонансы неограниченными.

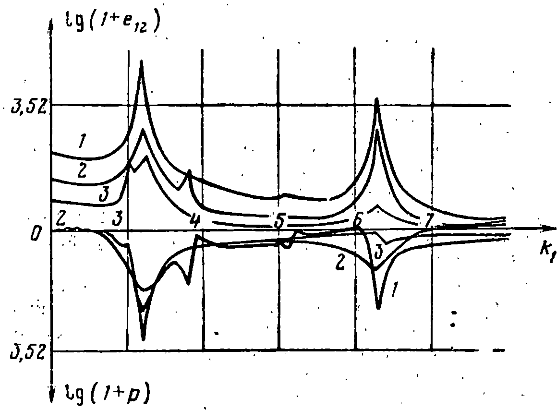
6. Подобно статике наводороженных приповерхностных трещин в металлах [7] можно ожидать, что при некоторых уровнях динамической нагрузки начинается усталостное или быстрое (мгновенное) разрушение либо за счет роста трещины, либо за счет изгибных напряжений в центре пластины с образованием поперечной трещины в дисках Ω_1 или Ω_2. Для анализа начала разрушения необходимо сформулировать дополнительное условие — критерий разрушения. В качестве такового возьмем двухпараметрический критерий разрушения, в идейном отношении близкий к критериям Эрдогана-Си [2, 3].

Будем считать, что разрушение начинается в центре пластины, когда одно из напряжений σ_{rj} достигает критического уровня σ_j^c для данного материала. При анализе роста трещины для простоты полагаем, что соответствующего критического уровня σ^c должна достигать величина эффективного напряжения $\sigma=(\sigma_z^2+\sigma_{rz}^2)^{1/2}$ на расстоянии $\rho=\rho_c$ от контура трещины на ее продолжении (ρ_c — параметр микроструктуры материала порядка размера зерна для металлов). Чтобы сделать вывод о том, где разрушение произойдет раньше, остается сравнить σ_{rj}/σ с соответствующими константами. Для этого естественно ввести вспомогательные функции (нижний индекс означает нормирование):

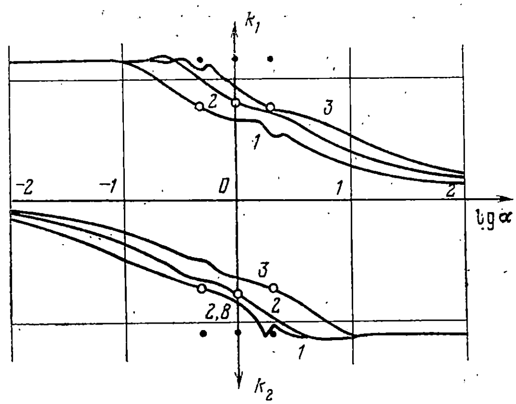
$$f_j(\alpha,\ e,\ \gamma,\ \nu_1,\ \nu_2,\ k_1)=K_0^2(1+\alpha)/2\pi|\sigma_{rj}{}^0|^2 \qquad (6.1)$$

В итоге приходим к сравнению f_j со значениями $N_j=\rho_c(\sigma^c/\sigma_j^c)^2/H_3$. При $f_j>N_j$ и $\sigma=\sigma^c$ разрушение будет происходить по имеющейся трещине, при $f_j<N_j$ и $|\sigma_{rj}|=\sigma_j^c$ начнет разрушаться центр пластины в области Ω_j. Константы ρ_c, σ_j^c, σ^c должны быть определены в каждом конкретном случае. Вид функций f_j в зависимости от волнового числа k_1 показан на фиг. 10 для случая α_j=01; 0,4; 0,8; e=0,25; γ=1.

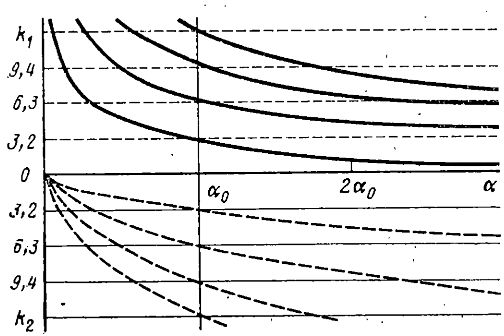
Сформулируем основные выводы. Асимптотическая теория позволила провести достаточно подробный параметрический анализ задачи, что затруднительно сделать в трехмерной постановке (для нее результаты могут рассматриваться как тестовые). Обнаружены расщепления квазирезонансов и сочетания параметров, при которых резонансы становятся неограниченными (5.2). При некоторых условиях колебания элементов слоев над и под трещиной напоминают синфазное движение впаянных в пластину жестких шайб, что не прогнозировалось заранее. Возрастание коэффициента интенсивности напряжений при этом объясняется сильным изгибом пластины.



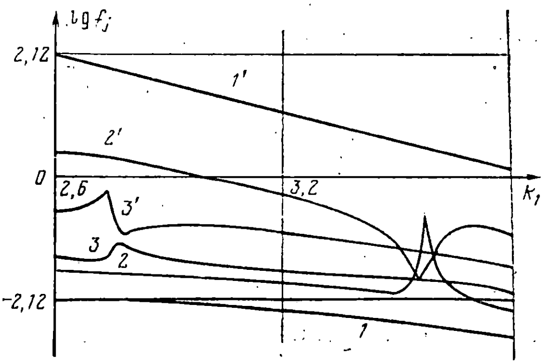
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Комплекс программ расчета может быть использован в задачах оптимизации слоистых композитов. Ресурс надежности и возможную смену типа разрушения в каждом конкретном случае можно оценить из анализа амплитудно-частотных характеристик максимальных напряжений, эффективного коэффициента интенсивности напряжений (3.3) и вспомогательных функций f_j (6.1).

Хотя учет взаимодействия берегов трещины не проводился, результаты справедливы при наличии соответствующего статического фона (например, при действии внутреннего давления в процессе наводораживания [7]), либо начального малого раскрытия трещины (тонкая щель).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симонов И. В.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонких двухслойных упругих пластинок. // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 976–982.
2. *Эрдоган Ф., Си Дж.* О распространении трещины в пластинах при плоском нагружении и поперечном сдвиге. // Теор. основы инж. расчетов. 1963. Сер. Д. Т. 85. № 4. С. 49–59.
3. *Sih G. C.* Strain-energy density factor applied to mixed mode crack problems. // Intern. Fract. Mech. 1974. V. 30. N 3. P. 305–321.
4. *Черепанов F. П.* Механика разрушения многослойных оболочек. Теория трещин расслаивания. // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 832–845.
5. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука. 1983. 296 с.
6. Вибрации в технике./Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение. 1978. Т. 1. 352 с.
7. *Гольдштейн Р. В., Морозова Т. М., Павловский Б. Р.* Модель возникновения структур разрушения в сталях при наводораживании. // Изв. АН. СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 131–138.

Москва

Поступила в редакцию
16.XI.1989