МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 531.38

© 1991 г.

Ю. Г. МАРКОВ

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

При решении ряда прикладных задач механики встречаются трудности, связанные с тем, что переменные, служащие для описания движения тела с неподвижной точкой, вырождаются. Например, гироскоп с неконтактным подвесом, находящийся в однородном поле сил тяжести на подвижном основании; длинный тонкий стержень в центральном гравитационном поле и т. д. В [1] приводится одна форма уравнений движения для динамически симметричного твердого тела, которая позволяет обойти трудности, связанные с вырождением локальных координат типа углов Эйлера в окрестности особых точек. Применение уравнений в невырождающихся переменных позволяет осуществить полное исследование системы. В качестве примера рассмотрен волчок Лагранжа на подвижном основании и уравнения движения получены в инвариантной векторной форме. В данной статье проводится некоторое обобщение задачи из [1] на случай системы упругое-твердое тело.

1. Постановка задачи. Тяжелое динамически симметричное тело, состоящее из упругой и твердой частей, вращается вокруг точки подвеса O, принадлежащей твердой части системы, в однородном поле силы тяжести. Точка O совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости. Пусть твердая часть тела занимает область $V_1 \in E^3$, а осесимметричная упругая часть (ось симметрии совпадает с осью динамической симметрии системы) в естественном недеформированном состоянии — область $V_2 \in E^3$. Области V_1 и V_2 имеют общую границу Γ и перемещения точек упругой части равны нулю на Γ. Деформации упругой части, которая считается однородной и изотропной, описываются квадратичным функционалом линейной теории упругости относительно вектора перемещений $\mathbf{u}$. Центр масс системы — точка C совпадает с точкой O подвеса, когда упругая часть недеформирована.

Для описания упругих деформаций введем в точке O подвижный трехгранник $Ox_1x_2x_3$ жестко связанный с твердой частью, так что оси Ox_i ($i=1, 2, 3$) направлены по главным центральным осям инерции системы в недеформированном состоянии, а ось Ox_3 является осью симметрии упругой части. Проекции вектора $\mathbf{u}$ на ось Ox_i обозначим u_i ($i=1, 2, 3$). Далее введем систему координат $Oxyz$, которая не вращается относительно инерциального пространства, но вместе с точкой подвеса совершает колебания в горизонтальной плоскости xy. Переменные, описывающие положение системы как целого, таковы [1]: (x, y, z) — компоненты единичного вектора $\mathbf{e}$, направленного по оси симметрии, γ — угол, определяющий положение системы вокруг этой оси.

Заметим, что при движении системы упругая часть ее деформируется под действием поля сил тяжести $\mathbf{g}$ и сил инерции переносного движения $\mathbf{a}$ — перемещения системы как целого. Элементарные силы, действующие на частицу тела массой $\rho^{\vee} dx$ ($dx = dx_1dx_2dx_3$) имеют вид: $\mathbf{f}_1 = \rho^{\vee} g \mathbf{e}_3 dx$, $\mathbf{f}_2 = \rho^{\vee} a \mathbf{e}_a dx$, $\rho^{\vee} = \rho_1 + \rho_2$, где a — величина, характеризующая интенсивность вибрации; ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотность твердой и упругой частей тела. Введенные единичные векторы $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}$ определяют соответственно направление вертикали, направление ускорения точки подвеса и положение орта оси симметрии системы в системе координат $Oxyz$:

$$\mathbf{e}_3=(0, 0, 1), \quad \mathbf{e}_a=(\cos\omega_0 t, -\sin\omega_0 t, 0), \quad \mathbf{e}=(x, y, z)$$

где ω_0 — частота вибрации.

Для кинетического момента $\mathbf{K}$ системы относительно точки O получим выражение

$$\mathbf{K}=A\mathbf{\Omega}+C\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}+J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}+\mathbf{K}_u, \quad \mathbf{\Omega}=\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}$$

$$\mathbf{K}_u=\int\limits_{V_2}\rho_2[\mathbf{r}\times\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}]dx$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{\Omega}+\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}$ — абсолютная угловая скорость трехгранника $Ox_1x_2x_3$; $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}$ — абсолютная производная вектора $\mathbf{e}$; A, C — экваториальный и осевой моменты инерции системы в недеформированном состоянии; $J_1[\mathbf{u}]$ — линейная по $\mathbf{u}$ компонента тензора инерции упругой части. Уравнение движения системы как целого имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=A\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+C\gamma^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\mathbf{e}+C\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}+\frac{d}{dt}(J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}+\mathbf{K}_u)=\mathbf{M}+\mathbf{L} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{M}=\int\limits_{V}(\mathbf{r}+\mathbf{u})\sim g\mathbf{e}_3\tilde{\rho}\,dx=\int\limits_{V_2}\rho_2[\mathbf{u}\times g\mathbf{e}_3]dx$$

$$\mathbf{L}=\int\limits_{V}(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times g\mathbf{e}_a\tilde{\rho}\,dx=\int\limits_{V_2}\rho_2[\mathbf{u}\times a\mathbf{e}_a]dx \tag{1.2}$$

$$V=V_1+V_2, \quad \mathbf{r}=(x_1, x_2, x_3)$$

В формулах (1.2) учтено, что центр масс совпадает с точкой подвеса в недеформированном состоянии системы. При деформациях центр масс смещен относительно точки O, поэтому $\mathbf{M}\neq0$, $\mathbf{L}\neq0$. В невозмущенном движении (при $\mathbf{u}=0$) находим

$$A\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+C\gamma^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\mathbf{e}+C\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}=0 \tag{1.3}$$

Учитывая, что $\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\perp\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}\perp\mathbf{e}$, получаем $A\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+C\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}=0$, $\gamma^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=0$. Интегрируя, имеем

$$A\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}+H\mathbf{e}=\mathbf{K}_0=\text{const}, \quad H=C\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=\text{const} \tag{1.4}$$

Домножая обе части (1.4) векторно слева на $\mathbf{e}$, найдем

$$\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}=A^{-1}\mathbf{K}_0\times\mathbf{e} \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{K}_0$ — кинетический момент относительно точки O абсолютно твердого тела.

Таким образом, в качестве невозмущенного движения может быть взята либо регулярная прецессия оси симметрии вокруг $\mathbf{K}_0$, либо перманентное вращение вокруг экваториальной оси или оси симметрии системы. Если происходит вращение вокруг оси симметрии, то $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}=0$ и тогда $\boldsymbol{\omega}=\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}$. В двух других случаях $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}\neq0$. Для упрощения дальнейших выкладок примем в качестве невозмущенного движения перманентное вращение системы вокруг оси Ox_3. Векторное уравнение (1.1) следует дополнить уравнением, описывающим деформации упругой части. В невозмущенном движении вектор $\mathbf{e}$ неподвижен в системе координат $Oxyz$. При $\mathbf{u}\neq0$ уравнение (1.1) позволяет рассматривать эволюцию $\mathbf{e}$.

Уравнение колебаний для упругой осесимметричной части следует из вариационного принципа Даламбера — Лагранжа

$$\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}+$$
$$+\rho_2^{-1}(\nabla E[\mathbf{u}]+\nabla D[\mathbf{u}^{\cdot}])-g\mathbf{e}_3-a\mathbf{e}_a=0 \tag{1.6}$$

Здесь для оценки влияния диссипативных сил в материале использована простейшая модель линейной вязкоупругости, когда $D[\mathbf{u}^{\cdot}]=\chi BE[\mathbf{u}^{\cdot}]$, $\chi\ll 1$ — безразмерная малая величина, b — положительная константа.

2. Определение деформаций в случае квазистатических движений. Перейдем к квазистатической постановке задачи. Пусть характерное время T_0 движения системы как целого относительно точки O с угловой скоростью $\omega=|\boldsymbol{\omega}|$ существенно превосходит период T свободных колебаний упругой части без демпфирования на наинизшей собственной частоте ν. Тогда величина $\varepsilon=\omega/\nu\ll 1$ является безразмерным малым параметром задачи. Пусть также характерное время T_1 затухания свободных колебаний упругой части на собственной частоте ν удовлетворяет условию $T\ll T_1\ll T_0$. Введенные предположения можно записать в безразмерном виде: $\varepsilon\ll\varkappa\ll 1$, $\varkappa=\chi b\nu$. Эти соотношения позволяют уравнение упругих деформаций (1.6) с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$ представить в виде

$$[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}]+[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]]+\rho_2^{-1}(\nabla E[\mathbf{u}]+\nabla D[\mathbf{u}^{\cdot}])-g\mathbf{e}_3-a\mathbf{e}_a=0 \tag{2.1}$$

Предполагается [1, 2], что решение уравнения (2.1), описывающего вынужденные квазистатические колебания, может быть найдено в виде

$$u(r,t)=\sum_{k,m=0}^{\infty}[q_{km}(t)\mathbf{V}_{km}(\mathbf{r})+p_{km}(t)\mathbf{W}_{km}(\mathbf{r})] \tag{2.2}$$

где $q_{km}(t)$, $p_{km}(t)$ — нормальные координаты, а $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ — ортогональные собственные формы свободных колебаний упругого тела, соответствующие собственной частоте ν_{km} и удовлетворяющие условиям ортонормированности

$$(\mathbf{V}_{km},\mathbf{V}_{ln})=\int_{V_2}\mathbf{V}_{km}\mathbf{V}_{ln}\,dx=\delta_{(km)(ln)}$$

$$(\mathbf{W}_{km},\mathbf{W}_{ln})=\delta_{(km)(ln)},\quad (\mathbf{V}_{km},\mathbf{W}_{ln})=0$$

$$\delta_{(km)(ln)}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad k=m,\quad l=n\\ 0 & \text{если}\quad k\neq m\quad \text{или}\quad l\neq n\end{cases}$$

Подставляя разложение (2.2) в уравнение (2.1) и умножая его скалярно на $\mathbf{V}_{km}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{W}_{km}(\mathbf{r})$, получим

$$\begin{aligned}&\nu_{km}^2q_{km}^2+\chi b\nu_{km}^2q_{km}^{\cdot}+(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]+[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}]-g\mathbf{e}_3-a\mathbf{e}_a,\ \mathbf{V}_{km})=0,\\ &\nu_{km}^2p_{km}^2+\chi b\nu_{km}^2p_{km}^{\cdot}+(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]+[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}]-g\mathbf{e}_3-a\mathbf{e}_a,\ \mathbf{W}_{km})=0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Решение уравнений (2.3) должно быть найдено при условии, что $\boldsymbol{\omega}$ соответствует невозмущенному движению (1.5), когда $\mathbf{e}^{\cdot}=0$. Поэтому в (2.3) полагаем $\boldsymbol{\omega}=\gamma^{\cdot}\mathbf{e}$. Тогда

$$([\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}],\mathbf{V}_{km})=([\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}],\mathbf{W}_{km})=0$$

$$(\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}],\mathbf{V}_{km}]=-\gamma^{\cdot 2}\sum_{i=1}^{2}b_{kmii},\quad (\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}],\mathbf{W}_{km})=-\gamma^{\cdot 2}\sum_{i=1}^{2}c_{kmii}$$

$$b_{kmij}=\int\limits_{V_2} V_{kmi}x_j\,dx,\quad c_{kmij}=\int\limits_{V_2} W_{kmi}x_j\,dx,\quad (i,j=1,2,3)$$

V_{kmi} и W_{kmi} — соответственно проекции форм $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ на ось x_i.

Заметим, что в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), причем $x_1=\rho\cos\varphi$, $x_2=\rho\sin\varphi$, $x_3=z$, $dx=\rho d\rho d\varphi dz$ ортогональные базисные собственные формы, соответствующие некоторому k, будут [2]:

$$\mathbf{V}_{km}(\rho,z,\varphi)=(U_{km}(\rho,z)\sin k\varphi,\ V_{km}(\rho,z)\cos k\varphi,\ W_{km}(\rho,z)\sin k\varphi),$$
$$\mathbf{W}_{km}(\rho,z,\varphi)=(U_{km}(\rho,z)\cos k\varphi,\ -V_{km}(\rho,z)\sin k\varphi,\ W_{km}(\rho,z)\cos k\varphi).$$

Получим проекции векторов $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ на оси трехгранника $Ox_1x_2x_3$ и определим коэффициенты разложения центробежных сил инерции. Вычисления показывают, что отличным от нуля будет лишь выражение

$$(\omega\times[\omega\times\mathbf{r}],\mathbf{W}_{0m})=-2\gamma^{\cdot 2}c_{0m11},\quad c_{0m11}=\pi\int\limits_{V_{2*}}\rho^2U_{0m}d\rho\,dz$$

$$d_{kmi}=\int\limits_{V_2} V_{kmi}dx,\quad e_{kmi}=\int\limits_{V_2} W_{kmi}dx$$

в которых не равны нулю следующие коэффициенты

$$d_{1m2}=e_{1m1}=\pi\int\limits_{V_{2*}}(U_{1m}+V_{1m})\rho\,d\rho\,dz,\quad e_{0m3}=2\pi\int\limits_{V_{2*}}W_{0m}\rho\,d\rho\,dz$$

Здесь $V_2{}^*$ — является сечением области V_2 плоскостью, проходящей через ось симметрии x_3: $(\mathbf{e}_3,\mathbf{W}_{0m})=\gamma_3e_{0m3}$, $(\mathbf{e}_3,\mathbf{V}_{1m})=\gamma_2d_{1m2}$, $(\mathbf{e}_3,\mathbf{W}_{1m})=$ $=\gamma_1d_{1m2}$.

Используя приведенные выражения уравнения для нормальных координат запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\nu_{0m}^2p_{0m}+\nu_{0m}^2\chi b p_{0m}^{\cdot}=2\gamma^{\cdot 2}c_{0m11}+(g\gamma_3+a\beta_3)e_{0m3}\\
&\nu_{1m}^2q_{1m}+\nu_{1m}^2\chi b q_{1m}^{\cdot}=(g\gamma_2+a\beta_2)d_{1m2}\\
&\nu_{1m}^2p_{1m}+\nu_{1m}^2\chi b p_{1m}^{\cdot}=(g\gamma_1+a\beta_1)d_{1m2}
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{e}_3=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ и $\mathbf{e}_a=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ — проекции векторов $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_a$ на оси системы координат $Ox_1x_2x_3$. Решение уравнений (2.4) можно искать в виде ряда по степеням χ. Ограничиваясь двумя первыми членами и учитывая, что в невозмущенном движении $\gamma^{\cdot\cdot}=\gamma^{\cdot}=0$, имеем

$$\begin{aligned}
&p_{0m}=\nu_{0m}^{-2}\{2\gamma^{\cdot 2}c_{0m11}+e_{0m3}[g\gamma_3+a(\beta_3-\chi b\beta_3^{\cdot})]\}\\
&q_{1m}=\nu_{1m}^{-2}d_{1m2}[g(\gamma_2-\chi b\gamma_2^{\cdot})+a(\beta_2-\chi b\beta_2^{\cdot})]\\
&p_{1m}=\nu_{1m}^{-2}d_{1m2}[g(\gamma_1-\chi b\gamma_1^{\cdot})+a(\beta_1-\chi b\beta_1^{\cdot})]
\end{aligned}\tag{2.5}$$

3. Эволюция осевого вращения. Вектор перемещения

$$\mathbf{u}=\sum_{m=0}^{\infty}[p_{0m}\mathbf{W}_{0m}+q_{1m}\mathbf{V}_{1m}+p_{1m}\mathbf{W}_{1m}]$$

с нормальными координатами из (2.5) подставим в выражение (1.2). После интегрирования по области V_2 в связанной системе координат $Ox_1x_2x_3$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}=(M_1,M_2,M_3)=\rho_2g\{&d_{1m2}q_{1m}\gamma_3-e_{0m3}p_{0m}\gamma_2\times\\
&\times e_{0m3}p_{0m}\gamma_1-d_{1m2}p_{1m}\gamma_3,\ d_{1m2}(p_{1m}\gamma_2-q_{1m}\gamma_1)\}
\end{aligned}$$

Аналогично получим выражения для $\mathbf{L}$ заменой $\gamma_i \to \beta_i$, $i=1, 2, 3$; $g \to a$. В системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$, не совершающей быстрое осевое вращение, получим

$$\mathbf{M}'=\Gamma_3(\gamma)\mathbf{M},\quad \mathbf{L}'=\Gamma_3(\gamma)\mathbf{L},\quad \Gamma_3(\gamma)=\begin{Vmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{M}'=\rho_2 g\begin{cases}\gamma_3 d_{1m2}(q_{1m}\cos\gamma+p_{1m}\sin\gamma)-e_{0m3}p_{0m}\gamma_2'\\ \gamma_3 d_{1m2}(q_{1m}\sin\gamma-p_{1m}\cos\gamma)+e_{0m3}p_{0m}\gamma_1', M_3\end{cases}\tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{e}_3'=(\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3')$ — координаты вектора $\mathbf{e}_3$ в осях $Ox_1'x_2'x_3'$, причем

$$\gamma_1'=\gamma_1\cos\gamma-\gamma_2\sin\gamma,\quad \gamma_2'=\gamma_1\sin\gamma+\gamma_2\cos\gamma,\quad \gamma_3'=\gamma_3\tag{3.2}$$

Выражения для $\mathbf{L}'$ получаются из (3.1) заменой $g\to a$, $\gamma_i'\to\beta_i'$. Подставим $\mathbf{u}$ в левую часть уравнения (1.1):

$$\frac{d}{dt}(J_1[\mathbf{u}]\omega)=\frac{d^\vee}{dt}(J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\omega}\times J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}$$

где $d^\vee/dt$ — локальная производная в жестко связанных осях. Далее

$$J_1[\mathbf{u}]=\|J_{ij}[\mathbf{u}]\|,\quad (i, j=1, 2, 3)$$

$$J_{11}=2\int_{V_2}(x_2u_2+x_3u_3)\rho_2\,dx,\quad J_{22}=2\int_{V_2}(x_1u_1+x_3u_3)\rho_2\,dx$$

$$J_{33}=2\int_{V_2}(x_1u_1+x_2u_2)\rho_2\,dx,\quad J_{ij}=J_{ji}=-\int_{V_2}(x_iu_j+x_ju_i)\rho_2\,dx,\quad i\neq j$$

Учитывая, что в невозмущенном движении $\boldsymbol{\omega}=\gamma^\cdot\mathbf{e}$, найдем в проекциях на оси системы координат $Ox_1x_2x_3$:

$$J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}=\gamma^\cdot(J_{13}, J_{23}, J_{33}),\quad \boldsymbol{\omega}\times J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}=\gamma^{\cdot 2}(-J_{23}, J_{13}, 0)\tag{3.3}$$

Так как $\gamma_i^{\cdot\cdot}=0$, $\beta_i^{\cdot\cdot}\sim\omega_0$, то из (3.2) и аналогичного ему выражения для β_i', следует

$$\gamma_1^\cdot=\gamma^\cdot\gamma_2,\quad \gamma_2^\cdot=-\gamma^\cdot\gamma_1,\quad \beta_1^\cdot=\gamma^\cdot\beta_2+O(\varepsilon),\quad \beta_2^\cdot=-\gamma^\cdot\beta_1+O(\varepsilon)$$

Здесь предполагается, что частота вибрации ω_0 мала по сравнению с частотой собственного вращения: $\omega_0/\gamma^\cdot\sim\varepsilon$. С погрешностью порядка $O(\varepsilon)$ будет

$$\begin{gathered}J_{33}=4\rho_2[2\gamma^{\cdot 2}\lambda_1+(g\gamma_3+a\beta_3)\lambda_2],\quad J_{33}^\cdot=0\\ J_{13}=-\rho_2\lambda_3[g(\gamma_1-\chi b\gamma^\cdot\gamma_2)+a(\beta_1-\chi b\gamma^\cdot\beta_2)],\quad J_{13}^\cdot=\gamma^\cdot J_{23}\\ J_{23}=-\rho_2\lambda_3[g(\gamma_2+\chi b\gamma^\cdot\gamma_1)+a(\beta_2+\chi b\gamma^\cdot\beta_1)],\quad J_{23}^\cdot=-\gamma^\cdot J_{13}\end{gathered}\tag{3.4}$$

$$\lambda_1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{0m11}^2}{\nu_{0m}^2},\quad \lambda_2=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{0m11}e_{0m3}}{\nu_{0m}^2},\quad \lambda_3=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_{1m2}(b_{1m23}+b_{1m32})}{\nu_{1m}^2}$$

Из формул (3.3) и (3.4) следует, что $d(J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega})/dt=0$ и уравнение возмущенного движения (1.1) распадается на два уравнения

$$\begin{gathered}H^\cdot=M_3+L_3\\ A\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\cdot\cdot}+H\mathbf{e}^\cdot=(M_1'+L_1')\mathbf{e}_{x_1}'+(M_2'+L_2')\mathbf{e}_{x_2}'\end{gathered}\tag{3.5}$$

Для отсчета угла γ введем вспомогательный трехгранник $x_1'x_2'x_3'$ следующим образом: ось x_1' принадлежит плоскости векторов $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}$, а ось x_2' дополняет систему координат до правой. Орты по осям x_2' и x_1' соответственно будут

$$\mathbf{e}_{x_1}'=\mathbf{e}_{x_2}'\times\mathbf{e}=(1-\gamma_3^2)^{-1/2}[\mathbf{e}\times\mathbf{e}_3]\times\mathbf{e}$$

$$\mathbf{e}_{x_2}'=(1-\gamma_3^2)^{-1/2}[\mathbf{e}\times\mathbf{e}_3],\quad \mathbf{e}_{x_3}'=\mathbf{e}.$$

Пусть вектор $\mathbf{e}$ в системе координат $Oxyz$ имеет проекции $\mathbf{e}=(x, y, z)$, тогда в этих же осях $\mathbf{e}_{x_1}'=(1-z^2)^{-1/2}(-xz, -yz, 1-z^2)$, $\mathbf{e}_{x_2}'=(1-z^2)^{-1/2}\times \times(y, -x, 0)$.

Матрица перехода от осей $Oxyz$ к осям $Ox_1'x_2'x_3'$ такова

$$B=\begin{Vmatrix} -xz(1-z^2)^{-1/2} & -yz(1-z^2)^{-1/2} & (1-z^2)^{1/2} \\ y(1-z^2)^{-1/2} & -x(1-z^2)^{-1/2} & 0 \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

Заметим, что в такой системе координат $\gamma_2'=0$, $\gamma_1'=(1-\gamma_3^2)^{1/2}$. Так как векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_a$ ортогональны, то $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_a)=0$ или $\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2=-\gamma_3\beta_3$. Первое уравнение в (3.5), после некоторых преобразований, запишется в виде

$$H'=-kH[g^2(1-\gamma_3^2)+a^2(1-\beta_3^2)-2ag\gamma_3\beta_3]$$

$$k=\rho_2\chi bc^{-1}\mu_1>0,\quad \mu_1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_{1m2}}{\nu_{1m}^2}>0$$

Проекции $\mathbf{e}_a$ на оси трехгранника $Ox_1'x_2'x_3'$ таковы

$$\mathbf{e}_a=B(\cos\tau, -\sin\tau, 0)=(\beta_1', \beta_2', \beta_3')=\left\{-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}(x\cos\tau-\right.$$

$$\left.-y\sin\tau), \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(y\cos\tau+x\sin\tau),\quad x\cos\tau-y\sin\tau\right\},\quad \tau=\omega_0 t$$

Правая часть второго уравнения (3.5) имеет громоздкий вид, что затрудняет дальнейший анализ

$$M_1'=\rho_2 g\mu_1\gamma_3[\chi b\gamma_1'g\gamma^{\cdot}+a(\beta_2'+\chi b\beta_1'\gamma^{\cdot})]$$

$$M_2'=\rho_2 g\{-\mu_1\gamma_3[g\gamma_1'-a(-\beta_1'+\chi b\beta_2'\gamma^{\cdot})]+\gamma_1'[2\gamma^{\cdot 2}\mu_3+\mu_2(g\gamma_3+a\beta_3)]\}$$

$$L_1'=\rho_2 a\{\mu_1\beta_3[\chi bg\gamma_1'\gamma^{\cdot}+a(\beta_2'+\chi b\beta_1'\gamma^{\cdot})]-\beta_2'[2\gamma'^2\mu_3+\mu_2(g\gamma_3+a\beta_3)]\}$$

$$L_2'=\rho_2 a\{-\mu_1\beta_3[g\gamma_1'-a(-\beta_1'+\chi b\beta_2'\gamma^{\cdot})]+\beta_1'[2\gamma^{\cdot 2}\mu_3+\mu_2(g\gamma_3+a\beta_3)]\}$$

$$\mu_2=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e_{0m5}^2}{\nu_{0m}^2}>0,\quad \mu_3=\lambda_2$$

Учитывая, что переменные x, y, z являются медленными (они постоянны в невозмущенном движении), усредним следующие выражения по переменной τ на периоде от 0 до 2π:

$$\langle\beta_1'\beta_3\rangle_\tau=-z(1-z^2)^{1/2}/2,\quad \langle\beta_3^2\rangle_\tau=(1-z^2)/2$$

$$\langle M_1'\rangle_\tau=Ckg^2z\sqrt{1-z^2}\gamma^{\cdot},\quad \langle M_2'\rangle_\tau=\rho_2 g\sqrt{1-z^2}[gz(\mu_2-\mu_1)+2\mu_3\gamma^{\cdot 2}]$$

$$\langle L_1'\rangle_\tau=-{}^1/_2Cka^2z\sqrt{1-z^2}\gamma^{\cdot},\quad \langle L_2'\rangle_\tau={}^1/_2\rho_2(\mu_1-\mu_2)a^2z\sqrt{1-z^2}$$

Отметим, что в невозмущенном движении $e^{\cdot}=0$, а в возмущенном $e^{\cdot}$ порядка $O(\varepsilon^2)$. Тогда $e^{\cdot\cdot}$ в возмущенном движении порядка $O(\varepsilon^4)$ и с принятой точностью этот член можно отбросить. В итоге приближенное уравнение, описывающее эволюцию вектора $\mathbf{e}$, примет вид

$$\mathbf{e}^{\cdot}=kz\sqrt{1-z^2}(g^2-{}^1/_2a^2)\mathbf{e}_{x_1}'+\rho_2H^{-1}\sqrt{1-z^2}\times$$
$$\times[z(\mu_2-\mu_1)(g^2-{}^1/_2a^2)+2g\gamma'^2\mu_3]\mathbf{e}_{x_2}'$$

В проекциях на оси поступательно движущейся системы координат найдем

$$\begin{aligned} x^{\cdot}&=-kz^2x(g^2-{}^1/_2a^2)+\rho_2H^{-1}y[z(\mu_2-\mu_1)(g^2-{}^1/_2a^2)+2g\gamma^{\cdot 2}\mu_3]\\ y^{\cdot}&=-kz^2y(g^2-{}^1/_2a^2)-\rho_2H^{-1}x[z(\mu_2-\mu_1)(g^2-{}^1/_2a^2)+2g\gamma^{\cdot 2}\mu_3]\\ z^{\cdot}&=kz(1-z^2)(g^2-{}^1/_2a^2)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Уравнение, описывающее вращение вокруг оси симметрии, после усреднения будет $H^{\cdot}=-kH[g^2(1-z^2)+{}^1/_2a^2(1+z^2)]$.

Отсюда видно, что происходит монотонное замедление вращения системы. Из первого и второго уравнений (3.6) имеем

$$(R^2)^{\cdot}=-2k(g^2-{}^1/_2a^2)z^2R^2,\quad R^2=1-z^2 \tag{3.7}$$

Из третьего уравнения в системе (3.6) и (3.7) следует, что след оси симметрии на единичной сфере с центром в точке O является спиралью. При $g^2<a^2/2$ (вибрация большой интенсивности) вектор $\mathbf{e}$ из вертикального положения прецессирует по раскручивающейся спирали в горизонтальную плоскость, стремясь к предельному углу прецессии, а при $g^2>a^2/2$ (вибрация малой интенсивности) вектор $\mathbf{e}$ монотонно восстанавливается по вертикали вверх или вниз в зависимости от того: было в начальный момент $z(0)>0$ или $z(0)<0$. Отметим, что под действием центробежных сил инерции происходят осесимметричные деформации упругой части, вследствие чего центр масс системы смещен на величину $\Delta\mathbf{r}$ относительно точки O, причем в системе координат $Ox_1x_2x_3$ будет

$$\Delta\mathbf{r}=M^{-1}\int_{V_2}\rho_2\mathbf{u}\,dx=(0,0,\Delta r),\quad \Delta r=2\rho_2M^{-1}\gamma^{\cdot 2}\mu_3,\quad M=\int_V\rho\,dx$$

Осесимметричные деформации стационарны и не сопровождаются рассеиванием энергии в материале. Пусть l — характерный размер системы и $g\sim a\ll l\gamma^{\cdot 2}$. Из (3.6) получим в нулевом приближении

$$x^{\cdot}=b_0y,\quad y^{\cdot}=-b_0x,\quad b_0=\Delta rMgH^{-1} \tag{3.8}$$

Характерное время изменения угла наклона оси симметрии к вертикали намного больше периода ее прецессии $T\sim b_0^{-1}$. Кривые, определяемые (3.8) на единичной сфере, являются замкнутыми — параллелями сферы.

4. О волчке со смещенным центром масс. Пусть в недеформированном состоянии системы ее центр масс расположен на оси симметрии на малом расстоянии l_0 от точки подвеса O, причем $l_0l^{-1}=\varepsilon_1^{1/2}$ где $\varepsilon_1\ll 1$ — малая безразмерная величина. Положим для определенности, что $\varepsilon_1\sim\varepsilon^2$. При наличии сил вязкого трения уравнение движения аналогично (1.1) с той разницей, что в центре масс приложена диссипативная сила $\mathbf{F}=-\xi\mathbf{e}^{\cdot}$, создающая момент относительно точки O:

$$\mathbf{N}=-\xi(l_0\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{\cdot}+\Delta\mathbf{r}\times\mathbf{e}^{\cdot}),\quad \Delta\mathbf{r}=M^{-1}\int_{V_2}\rho_2\mathbf{u}\,dx$$

а выражения для $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ преобразуются к виду

$$\mathbf{M}=Mg(l_0\mathbf{e}+\Delta\mathbf{r})\times\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{L}=Ma(l_0\mathbf{e}+\Delta\mathbf{r})\times\mathbf{e}_a$$

Считая величину H достаточно большой, будем предполагать, что выполняются следующие условия

$$Al_0Mg/H^2 \sim \omega_0/\dot{\gamma} \sim \varepsilon_1^2, \quad a/g \sim l_0\xi/H \sim \varepsilon_1^{2-\delta}, \quad 0<\delta<1 \qquad (4.1)$$

Соотношения эквивалентности (4.1) означают большую величину кинетической энергии собственного вращения и малую величину потенциала переносных сил инерции в сравнении с потенциалом сил тяжести. Из них также следует, что частота прецессии l_0Mg/H одного порядка с частотой вибрации ω_0. Полагая в формулах (2.5) $a=0$, определим смещение центра масс при деформациях с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$ в связанной системе координат

$$\Delta\mathbf{r}=(\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3)=M^{-1}\rho_2[\mu_1 g(\gamma_1-\chi b\gamma_2\dot{\gamma},$$
$$\gamma_2+\chi b\gamma_1\dot{\gamma}, 0)+(0, 0, 2\dot{\gamma}^2\mu_3+f\gamma_3\mu_2)]$$

где μ_i ($i=1, 2, 3$) введены выше. В дальнейшем, учитывая (4.1), величину $\Delta\mathbf{r}$ сохраним только в выражении для

$$\mathbf{M}=l_0Mg[\mathbf{e}\times\mathbf{e}_3]+M_1'\mathbf{e}_{x_1}'+M_2'\mathbf{e}_{x_2}'+M_3\mathbf{e}$$
$$M_1'=kg^2Hz(1-z^2)^{1/2}, \quad M_2'\cong Mg\Delta r_3(1-z^2)^{1/2}$$
$$M_3=Mg(\Delta r_1\gamma_2-\Delta r_2\gamma_1)=-kg^2H(1-z^2)$$

Аналогично случаю рассмотренному ранее векторное уравнение движения системы распадается на два. Первое уравнение $\dot{H}=M_3$ описывает монотонное замедление вращения. Второе уравнение, описывающее эволюцию вектора e, получим в системе координат $Ouvw$, вращающейся вместе с вектором перегрузки $\mathbf{e}_a$ [1]:

$$u'=\Delta v-uw-nkg^2uw^2$$
$$v'=-\Delta u+\mu w-vw-nkg^2vw^2$$
$$w'=-\mu v+v^2+u^2+nkg^2w(1-w^2) \qquad (4.2)$$
$$\Delta=\left[\frac{(l_0+\Delta r_3)Mg}{H}-\omega_0\right]n, \quad n=\frac{H^2}{l_0^2\xi Mg}, \quad \mu=\frac{al_0M}{H}, \quad n=\frac{aH}{gl_0\xi}$$

В (4.2) штрихом обозначено дифференцирование по времени $t'=$ $=t/n$. Рассмотрим влияние диссипации энергии при деформациях на эволюцию вращения системы, например, в случае $\Delta=0$ (резонанс) при $\mu<1$. Так как $nkg^2\ll1$, то на первом этапе полагаем $\mu=\text{const}$ и ось симметрии движется по интегральным кривым, найденным в [1] для твердой системы, в устойчивый узел с координатами $u=0$, $v=\mu$, $w=$ $=(1-\mu^2)^{1/2}$. После этого след вектора e движется по окружности большого круга в точку $u=v=0$, $w=1$, так как значение μ монотонно убывает, согласно второму уравнению в (4.2): $\mu'=-nkg^2\mu(1-\mu^2)$. Заметим, что последнее уравнение следует также из уравнения $\dot{H}=M_3$.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева за постановку и обсуждение задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
2. *Вильке В. Г.* Об относительном движении осесимметричного упругого тела // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1988. № 3. С. 25–30.

Москва

Поступила в редакцию 12.II.1990