МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3:534.1

Ю. Д. КАПЛУНОВ

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ КРАЕВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Рассматриваются вынужденные стационарные колебания оболочек вращения, вызванные высокочастотными краевыми нагрузками. Считается, что частота возбуждения ω лежит за пределами применимости двумерной теории оболочек. Показывается, что вне окрестностей частот среза (запирания) исходная трехмерная задача с асимптотически исчезающей погрешностью может быть сведена к плоской и антиплоской задачам теории упругости. В окрестностях частот среза дополнительно должны быть изучены краевые задачи для скалярного или векторного (в зависимости от типа частоты среза) двумерного уравнения второго порядка, описывающего медленно меняющуюся составляющую напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки. Рассмотрение ведется на основе предложенных в [1–3] асимптотических подходов к исследованию высокочастотных колебаний оболочек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую оболочку вращения малой относительной полутолщины $\eta=h/R$ ($2h$ – толщина оболочки; R – характерный радиус кривизны ее срединной поверхности). Отнесем область пространства, занимаемую оболочкой, к триортогональной системе координат (α_1, θ, α_3), где (α_1, θ) – географическая система координат на срединной поверхности (α_1 – длина дуги меридиана; $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ – угловая координата; α_3 – расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности). В дальнейшем мы часто будем относить длину дуги меридиана α_1 и поперечную координату α_3 к полутолщине оболочки. Для обезразмеренных таким образом переменных введем обозначения $x_i=\alpha_i/h$ ($i=1,3$). Иногда также будет удобно относить длину дуги меридиана α_1 к характерному радиусу кривизны оболочки R. Обозначим $\xi=\alpha_1/R$.

Для описания движения оболочки будем использовать уравнения трехмерной динамической теории упругости, запись которых в триортогональной системе координат приведена, например, в [1, 3]. Пусть лицевые поверхности оболочки свободны, а к ее краям $\alpha_1=\alpha_{1i}$ ($i=1,2$) приложены изменяющиеся во времени по закону $\exp(-i\omega t)$ нагрузки с амплитудами $g_{ki}(\theta,\alpha_3)$ ($k=1,2,3$; $i=1,2$). Тогда граничные условия на лицевых поверхностях и краях оболочки запишутся в виде

$$\sigma_{3k}(\alpha_1,0,\pm h)=0,\quad \sigma_{1k}(\alpha_{1i},\theta,\alpha_3)=g_{ki}(\theta,\alpha_3)\qquad(1.1)$$

Здесь считается, что напряжения σ_{mk} ($m=1,3$; $k=1,2,3$) и внешние нагрузки g_{ki} обезразмерены делением на $\frac{1}{2}E/(1+\nu)$ (E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона), а временной множитель $\exp(-i\omega t)$ отделен.

Остановимся на исследовании диапазона частот, в котором

$$\mu=\omega h/c_2\sim\eta^0\qquad(1.2)$$

где c_2 – скорость распространения волны сдвига в материале оболочки.

Диапазон частот (1.2) лежит за пределами области применимости двумерных теорий оболочек. В этом диапазоне оболочка совершает колебания с малым числом волн по толщине [2, 3]. В соответствии с принятой в теории колебаний оболочек терминологией [4, 5 и др.] диапазону (1.2) соответствует показатель динамичности $a=1$ $(\omega R/c_2 \sim \eta^{-a})$.

Ограничимся рассмотрением краевых нагрузок, показатели изменяемости которых по угловой координате p и по поперечной координате g_t удовлетворяют неравенствам

$$p<{}^1/_3, \quad q_t \leqslant 1 \tag{1.3}$$

означающим, что $\partial g_{ki}/\partial\theta \ll \eta^{-1/3} g_{ki}$, $R\partial g_{ki}/\partial\alpha_3 \leqslant \eta^{-1} g_{ki}$. Смысл принятых сейчас ограничений выявится позже.

В [2] показано, что в диапазоне (1.2) НДС оболочки аналогично НДС пластины может быть разделено на симметричную и антисимметричную относительно срединной поверхности составляющие. В отличие от пластины для оболочки такое разделение достигается путем внесения некоторой асимптотически малой при $\eta \to 0$ погрешности. С целью избежания повторений последующее изложение ведется применительно к колебаниям антисимметричным (в главном) относительно срединной поверхности оболочки, т. е. считается, что в (1.1) g_{3i} — четная, а g_{1i}, g_{2i} — нечетные по α_3 функции. Методика рассмотрения симметричных (в главном) колебаний полностью аналогична излагаемой ниже.

2. Разложение решения по модам динамического погранслоя вне окрестностей частот среза. В [1] показано, что к расчету разноизменяющихся колебаний оболочек вращения, для которых показатель изменяемости НДС в меридиональном направлении q превышает показатель изменяемости в направлении параллелей p, может быть применен метод меридиональных полос. Этот метод заключается в сведении задачи о колебаниях оболочки к изучению колебаний тонких искривленных полос шириной $2h$, являющихся ее меридиональными сечениями. Движение этих полос описывается уравнениями плоского и антиплоского динамического погранслоя. Асимптотически главные части уравнений динамического погранслоя совпадают с уравнениями плоской и антиплоской задач теории упругости в декартовой прямоугольной системе координат, по одной из осей которой откладывается длина дуги меридиана, а по другой — расстояние от срединной поверхности. Асимптотически второстепенные части уравнений динамического погранслоя отражают влияние геометрии оболочки и изменяемости ее НДС по параллелям.

Из результатов [1, 2] вытекает, что в диапазоне частот (1.2) вне окрестностей частот среза $\Lambda=\Lambda^{(1)}=\pi n/\beta$, $\Lambda=\Lambda^{(2)}=\pi(n-{}^1/_2)$ $(\beta=[(1-2\nu)/(2-2\nu)]^{1/2}$, $n\in\mathbb{N})$ по оболочке распространяются колебания с показателем изменяемости в меридиональном направлении $q=a=1$. Вблизи торцов оболочки локализуются квазистатические погранслои, причем вклад, вносимый в них частными решениями с показателем изменяемости $q>1$, вследствие второго неравенства (1.3), асимптотически мал. Поэтому можно использовать наиболее простой вариант уравнений динамического погранслоя для $q=a=1$. Их моды (частные решения, удовлетворяющие однородным граничным условиям на лицевых поверхностях) для плоского и антиплоского погранслоев имеют соответственно вид [2]:

$$\mathbf{V}_j=\begin{pmatrix} V_{1j} \\ V_{3j} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{A_2}}\mathbf{V}_j{}^l, \qquad \mathbf{V}_j{}^l=\begin{pmatrix} V_{1j}{}^l \\ V_{3j}{}^l \end{pmatrix}=\exp(\varphi_j x_1)\sum^{2} K_{ij}\begin{pmatrix} B_{ij}\operatorname{sh} r_{ij}x_3 \\ \operatorname{ch} r_{ij}x_3 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$V_{2j}=\frac{1}{\sqrt{A_2}}V_{2j}{}^l, \qquad V_{2j}{}^l=\exp(\varphi_j x_1)\operatorname{sh} r_{2j}x_3 \qquad (j=1, 2, 3, \ldots) \tag{2.2}$$

В (2.1) φ_j — j-й корень уравнения Рэлея — Лэмба для антисимметричной по x_3 деформации

$$r_{3j}^4 \frac{\operatorname{sh} r_{1j}}{r_{1j}} \operatorname{ch} r_{2j} + \varphi_j^2 r_{2j}^2 \operatorname{ch} r_{1j} \frac{\operatorname{sh} r_{2j}}{r_{2j}} = 0 \tag{2.3}$$

а в (2.2) φ_j — j-й корень уравнения

$$\operatorname{ch} r_{2j} = 0 \tag{2.4}$$

$$r_{1j}^2 = -\varphi_j^2 - \beta^2\mu^2, \quad r_{2j}^2 = -\varphi_j^2 - \mu^2, \quad r_{3j}^2 = -\varphi_j^2 - {}^1/_2\mu^2$$

$$B_{1j} = \frac{\varphi_j}{r_{1j}}, \quad B_{2j} = -\frac{r_{2j}}{\varphi_j}, \quad K_{1j} = \frac{r_{3j}^2 \operatorname{ch} r_{2j}}{\varphi_j^2 \operatorname{ch} r_{1j}}, \quad K_{2j} = 1$$

V_{kj} ($k=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3, \ldots$) — отнесенные к h перемещения оболочки V_k ($k=1, 2, 3$) для j-й моды, A_2 — отнесенный к R коэффициент первой квадратичной формы.

По сравнению с [2] в (2.1), (2.2) совершено пренебрежение зависимостью от изменяемости по угловой координате θ, что соответствует отбрасыванию членов порядка $O(\eta^{2-2p})$ по сравнению с единицей. В [1, 2] показано, что это приводит при построении распространяющихся ($\operatorname{Re}\varphi_j=0$) мод колебаний к погрешности $\delta=O(\eta^{1-2p})$. Условимся далее везде под погрешностью приближенных динамических теорий понимать локальную погрешность, допускаемую при построении распространяющихся мод колебаний [1, п. 2]. При этом следует иметь в виду, что указанное пренебрежение в рамках асимптотически малой погрешности δ приводит к тому, что пакет близких друг к другу резонансов, соответствующих разным числам волн по θ, заменяется одним резонансом. Вид частных решений (2.1), (2.2) показывает, что их отличие от частных решений плоской $\mathbf{V}_j^l$ и антиплоской V_{2j}^l задач теории упругости для прямоугольника состоит лишь в присутствии множителя $A_2^{-1/2}$, обусловленного искривленностью метрики. Поэтому представляется естественной мысль о применении к высокочастотным колебаниям оболочек вращения методов решения динамических задач теории упругости для прямоугольника.

Начнем со случая, когда частотный параметр μ лежит вне окрестностей частот среза $\Lambda=\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda=\Lambda^{(2)}$. Ввиду того, что вне окрестностей частот среза среди корней дисперсионных уравнений (2.3), (2.4) φ_j нет малых по модулю, в рамках погрешности δ уравнения состояния для напряжений, входящих в граничные условия на краях оболочки (1.1), можно взять в виде: для плоского погранслоя

$$\sigma_{11} = 2\left(\beta_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} + \beta_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right), \quad \sigma_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \tag{2.5}$$

$$(\beta_1 = \nu/(1-2\nu), \quad \beta_2 = (1-\nu)/(2-2\nu))$$

для антиплоского погранслоя

$$\sigma_{12} = \partial V_2/\partial x_1 \tag{2.6}$$

Последние соотношения полностью совпадают с уравнениями состояния для плоской и антиплоской задач теории упругости в декартовой системе координат.

Будем, как обычно, считать, что геометрия оболочки имеет нулевую изменяемость по меридиану, т. е. $R\partial A_2/\partial\alpha_1 \sim \eta^0 A_2$. Поэтому при подстановке (2.1) в (2.5) и (2.2) в (2.6) с погрешностью $O(\eta)$ множитель $A_2^{-1/2}$ можно считать постоянным. Отсюда непосредственно вытекает, что с погрешностью δ исходная трехмерная задача теории упругости может быть сведена к плоской и антиплоской задачам для прямоугольника с граничными условиями, зависящими от угловой координаты θ как от параметра и имеющими следующий вид: для плоской задачи

$$\sigma_{1m}(x_{1i}, \theta, x_3)=\sqrt{A_2(x_{1i})}g_m(\theta, x_3) \quad (m=1, 3;\ i=1, 2) \tag{2.7}$$

и для антиплоской задачи

$$\sigma_{12}(x_{1i}, \theta, x_3)=\sqrt{A_2(x_{1i})}g_2(\theta, x_3) \quad (i=1, 2) \tag{2.8}$$

Решения плоской и антиплоской задач представим в виде разложений по модам $\mathbf{V}_j^l$, V_{2j}^l:

$$\mathbf{V}^l=\begin{pmatrix} V_1^l \\ V_3^l \end{pmatrix}=\sum_j C_j(\theta)\mathbf{V}_j^l, \qquad V_2^l=\sum_j C_j(\theta)V_{2j}^l \tag{2.9}$$

в которых все константы параметрически зависят от θ.

В последующих рассуждениях будем считать, что решения (2.9) нам известны. При этом, не останавливаясь на подробностях, заметим только, что, если для антиплоской задачи коэффициенты разложения C_j легко находятся, то для плоской задачи их определение связано со значительными трудностями [6—9 и др.].

Перемещения оболочки восстанавливаются по левым частям (2.9) в соответствии с формулами

$$\mathbf{V}=A_2^{-1/2}\mathbf{V}^l, \quad V_2=A_2^{-1/2}V_2^l \tag{2.10}$$

Таким образом, вне окрестностей частот среза получено решение в виде разложения по модам динамического погранслоя (2.1), (2.2). В окрестностях частот среза колебания оболочки носят более сложный характер. Это связано с тем, что НДС оболочки помимо коротковолновой составляющей (с показателем изменяемости по меридиану $q=a=1$), описываемой теорией динамического погранслоя, имеет и длинноволновую составляющую (с показателем изменяемости $q<1$), которая не всегда может быть описана этой теорией. Длинноволновой (медленно меняющейся) составляющей в области применимости теории динамического погранслоя соответствуют малые по модулю корни φ_j дисперсионных уравнений (2.3), (2.4).

3. Определение невязок, остающихся в граничных условиях, при использовании разложения по модам динамического погранслоя в окрестности частот среза. Рассмотрим сначала окрестности частот $\Lambda=\Lambda^{(1)}=\pi n/\beta$ $(n\in\mathbf{N},\ n\sim\eta^0)$, которые зададим в виде

$$\Lambda-\mu\sim\eta^b \quad (b>0) \tag{3.1}$$

где b — показатель отклонения. Ограничимся рассмотрением проколотых окрестностей (3.1) $(\Lambda\neq\mu)$.

Нетрудно убедиться, что при $\Lambda=\Lambda^{(1)}$ в (3.1) малые корни имеет только соответствующее плоскому погранслою дисперсионное уравнение Рэлея — Лэмба (2.3). Представим эти корни в виде

$$\varphi_j=\eta^{1-q_s}\chi_j \quad (\chi_j\sim\eta^0,\ q_s<1) \tag{3.2}$$

где $q_s=1-{}^1/_2 b$ — показатель изменяемости длинноволновой моды колебаний в меридиональном направлении. Из уравнения (2.3) получим следующее представление

$$\chi_j^2=\eta^{2q_s-2}(T^*)^{-1}(\Lambda-\mu)+O(\eta^{2-2q_s}) \tag{3.3}$$

в котором $T^*=(2\Lambda\beta^2)^{-1}-4\Lambda^{-2}\operatorname{tg}\Lambda$, и будем для определенности считать, что корни (3.2), (3.3) имеют номера $j=j_p,\ j_p+1$.

Ввиду того, что в настоящей работе используется вариант теории погранслоя с отбрасыванием членов, содержащих дифференцирование по угловой координате θ, моды, соответствующие корням φ_j $(j=j_p,\ j_p+1)$, могут быть правильно описаны только при [1] [1)]

$$q_s > 2p \quad (b < 2-4p) \tag{3.4}$$

При этом допускается погрешность $\delta_1 = O(\eta^{q_s-2p})$, превышающая введенную в п. 2 погрешность δ.

На основании рассуждений, приведенных в [1, 2], заключаем, что область действия аппроксимации (3.3) для корней, соответствующих распространяющимся модам, ограничивается неравенством

$$q_s < {}^2/_3 \quad (b > {}^2/_3) \tag{3.5}$$

Таким образом, в рамках используемого варианта теории динамического погранслоя формула (3.3) применима в случае выполнения двойного неравенства

$$2p < q_s < {}^2/_3 \quad ({}^2/_3 < b < 2-4p) \tag{3.6}$$

которое совместно при выполнении первого неравенства (1.3). К обсуждению неравенств (3.4)—(3.6) нам еще предстоит вернуться.

Изучим теперь более подробно частные решения (2.1), отвечающие малым корням (3.3). Нетрудно установить, что для них $B_{1j} \sim \eta^{1-q_s}$, $B_{2j} \sim \sim \eta^{q_s-1}$, $K_{1j} \sim \eta^{2q_s-2}$ и, следовательно, с погрешностью $O(\eta^{1-q_s})$

$$\mathbf{v}_j^l = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\Lambda^2 \cos\Lambda \cos\beta\Lambda x_3}{2\varphi_j^2 \cos\beta\Lambda} \end{pmatrix} \exp(\varphi_j x_1) \quad (j = j_p,\ j_p + 1) \tag{3.7}$$

При $q_s \leqslant 2p$ $(b \geqslant 2-4p)$, когда теория динамического погранслоя неприменима, моды (2.1) с номерами $j = j_p$, $j_p + 1$ не дают правильного описания медленно меняющейся (длинноволновой) составляющей НДС оболочки. Однако и в этом случае, действуя формально, можно получить решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника с граничными условиями (2.7) в виде разложения по модам (первая формула (2.9)). Подставив полученное разложение в первую формулу (2.10), получим линейную комбинацию мод

$$\mathbf{V}_W = \frac{1}{\sqrt{A_2}} \sum_{m=0}^{1} C_{j_p+m}(\theta)\, \mathbf{V}_{j_p+m}^l \tag{3.8}$$

которая дает заведомо неверное описание медленно меняющейся составляющей НДС оболочки. При этом быстро меняющаяся составляющая НДС описывается суперпозицией остальных мод колебаний ($j \neq j_p$, j_p+1) верно.

Определим вид краевых нагрузок g_{ki}^W ($k = 1, 2, 3$; $i = 1, 2$), возбуждающих в оболочке длинноволновые колебания, соответствующие (3.8). Для этого подставим (3.8) в (2.5). Считая A_2 константой и учитывая (3.7), с погрешностью $\delta_2 = O(\eta^{1-q_s} + \eta^{q_s-2p})$ получаем

$$g_{1i}^W(\theta, x_3) = \frac{\beta\beta_1\Lambda^3 \cos\Lambda \sin\beta\Lambda x_3}{\sqrt{A_2(x_{1i})}\,\varphi_p^2 \cos\beta\Lambda} \sum_{m=0}^{1} C_{j_p+m}(\theta) \exp[(-1)^m \varphi_p x_{1i}] \tag{3.9}$$

$$g_{2i}^W(\theta, x_3) = g_{3i}^W(\theta, x_3) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

где φ_p — главное значение $\sqrt{\varphi_j^2}$, $\varphi_{j_p} = \varphi_p$.

Таким образом, в проколотых окрестностях (3.1) частот среза $\Lambda = \Lambda^{(1)}$ при $b \geqslant 2-4p$ после определения быстро меняющейся составляющей НДС на основе метода меридиональных полос (теории динамического погран-

[1)] Если в уравнениях динамического погранслоя сохранять члены с дифференцированием по θ, то (3.4) переходит в неравенство $q_s > p$ $(b < 2-2p)$.

слоя) в граничных условиях на краях оболочки остаются невязки (3.9). К обсуждению вопроса о снятии этих невязок мы обратимся в следующем пункте, а сейчас рассмотрим окрестности вида (3.1) частот среза $\Lambda=\Lambda^{(2)}$. В этих окрестностях малые по модулю корни типа (3.2) имеет не только уравнение Рэлея — Лэмба (2.3), но и соответствующее антиплоскому погранслою дисперсионное уравнение (2.4). Представления корней этих уравнений имеют вид

$$\chi_j^2=\eta^{2q_s-2}[(2\Lambda)^{-1}+B^*]^{-1}(\Lambda-\mu)+O(\eta^{2-2q_s}) \quad (j=j_p,\ j_p+1)$$

$$B^*=4\Lambda^{-1}\beta \operatorname{ctg} \beta\Lambda \tag{3.10}$$

$$\chi_j^2=\eta^{2q_s-2}(\Lambda^2-\mu^2) \quad (j=j_a,\ j_a+1) \tag{3.11}$$

Приведенные выше неравенства (3.4)—(3.6) непосредственно переносятся и на аппроксимацию (3.10). Формула же (3.11) в области применимости используемого варианта теории динамического погранслоя (3.4) является точной. Моды, отвечающие корням (3.2) при χ_j из (3.10), (3.11), с погрешностью $O(\eta^{1-q_s})$ можно представить в виде

$$\mathbf{V}_j^l=\begin{pmatrix}-\varphi_j^{-1}\sin\Lambda x_3\\ 0\end{pmatrix}\exp(\varphi_j x_1) \quad (j=j_p, j_p+1) \tag{3.12}$$

$$V_{2j}=\sin\Lambda x_3\exp(\varphi_j x_1) \quad (j=j_a,\ j_a+1) \tag{3.13}$$

Решая плоскую и антиплоскую задачи для прямоугольника с граничными условиями (2.7), (2.8), найдем константы C_j, стоящие в разложениях (2.9) перед модами (3.12), (3.13). При этом в антиплоской задаче константы C_j $(j=j_a,\ j_a+1)$ определяются явным образом

$$C_{j_a+m}(\theta)=(-1)^m\{[cF_{2-m}(\theta)-F_{m+1}(\theta)]\exp[(-1)^{m+1}\varphi_a x_{1(m+1)}]\}(c^2-1)^{-1} \tag{3.14}$$

$$(m=0,\ 1)$$

где φ_a — главное значение $\sqrt{\varphi_j^2}$, $\varphi_{j_a}=\varphi_a$; $c=\exp[\varphi_a(x_{12}-x_{11})]$,

$$F_i(\theta)=\frac{2\sqrt{A_2(x_{1i})}}{\varphi_a}\int_0^1 g_{2i}(\theta,x_3)\sin\Lambda x_3\,dx_3 \quad (i=1,2)$$

Подставляя затем (3.8) при $\mathbf{V}_j^l$ из (3.12) в граничные условия (2.5) и линейную комбинацию мод

$$V_{2W}=\frac{1}{\sqrt{A_2}}\sum_{m=0}^{1}C_{j_a+m}(\theta)\,V_{2(j_a+m)} \tag{3.15}$$

в граничное условие (2.6), получим с погрешностью δ_2 выражения для невязок, остающихся после применения метода меридиональных полос в граничных условиях (1.1):

$$g_{1i}(\theta,x_3)=0,\qquad g_{2i}(\theta,x_3)=\frac{\varphi_a\sin\Lambda x_3}{\sqrt{A_2(x_{1i})}}\sum_{m=0}^{1}C_{j_a+m}(\theta)(-1)^m\exp[(-1)^m\varphi_a x_{1m}]$$

$$g_{3i}(\theta,x_3)=-\frac{\Lambda^2\cos\Lambda x_3}{\varphi_p\sqrt{A_2(x_{1i})}}\sum_{m=0}^{1}C_{j_p+m}(\theta)(-1)^m\exp[(-1)^m\varphi_p x_{1m}] \tag{3.16}$$

4. Формулировка краевых задач для определения медленно меняющихся НДС в окрестностях частот среза. Начнем обсуждение опять с частот среза $\Lambda=\Lambda^{(1)}$. Рассмотрим в окрестностях (3.1) этих частот двумерное уравнение высокочастотных НДС малой изменяемости [3]. В ортогональных координатах (ξ, θ) оно имеет вид

$$\eta^2 T^* \Delta V_3^a + [T_R + (\mu - \Lambda)] V_3^a + O(\eta^{4-4q_s}) = 0 \tag{4.1}$$
$$T_R = -2h^2\Lambda^{-1}[(1-{}^1/_{16}\beta^{-2})(R_1^{-2}+R_2^{-2}) + {}^1/_8\beta^{-2}(R_1R_2)^{-1}]$$

(R_1, R_2 — главные радиусы кривизны), а функция V_3^a связана с нормальным перемещением точек оболочки формулой $V_3(\xi,\ \theta,\ x_3) = V_3^a(\xi,\ \theta) \times \times \cos\beta\Lambda x_3 + O(\eta + \eta^{2-2q_s})$. Показатель q_s имеет здесь тот же смысл, что и в п. 3. Требование асимптотической непротиворечивости уравнения (4.1) дает

$$q_s = \begin{cases} p & (b \geqslant 2-2p) \\ 1 - {}^1/_2 b & (b \leqslant 2-2p) \end{cases} \tag{4.2}$$

Область применимости (4.1) определяется неравенством (3.5) [3]. В случае выполнения неравенства (3.4) в (4.1) можно отбросить члены с производными по θ, а также член с множителем T_R, зависящим от кривизны оболочки. Проделав это, получим

$$\eta^2 T^* \left(\frac{\partial^2 V_3^a}{\partial \xi^2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} \frac{\partial V_3^a}{\partial \xi} \right) + (\mu - \Lambda) V_3^a + O(\eta^{2-2p} + \eta^{4-4q_s}) = 0 \tag{4.3}$$

Корни дисперсионного уравнения, соответствующего (4.3), определяются формулой (3.3). На основании этого делаем вывод, что интервал согласования частот между теорией высокочастотных НДС малой изменяемости и используемым вариантом теории динамического погранслоя (с отбрасыванием членов $O(\eta^{2q_s-2p})$, определяется неравенством (3.6). При этом условие существования интервала согласования выражается первым неравенством (1.3).

Проведенный в [3] асимптотический анализ показал, что в теории высокочастотных НДС малой изменяемости в окрестностях частот среза $\Lambda = \Lambda^{(1)}$ с погрешностью $O(\eta^{1-q_s})$ можно на краю оболочки пренебречь напряжениями σ_{12}, σ_{13} по сравнению с σ_{11}, а последнее представить как

$$\sigma_{11} = -2\beta\beta_1\Lambda V_3^a \sin\beta\Lambda x_3 \tag{4.4}$$

Сопоставляя (4.4) с (3.9), заключаем, что для снятия невязок g_{ki}^W в граничных условиях (1.1) следует решить уравнение (4.1) с граничными условиями при $\xi = \xi_i$ ($i=1$, 2) вида

$$V_3^a = -\frac{\Lambda^2 \cos\Lambda}{2\varphi_p^2 \sqrt{A_2(\xi_i)}} \sum_{m=0}^{1} C_{j_p+m} \exp[(-1)^m \eta^{-1} \varphi_p \xi_i] \tag{4.5}$$

В окрестностях (3.1) частот среза $\Lambda = \Lambda^{(2)}$ уравнение высокочастотных НДС малой изменяемости имеет вид [3]:

$$\eta^2((2\Lambda)^{-1}\Delta \mathbf{V}_\tau^a + B^* \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{V}_\tau^a) + [B_R + (\mu - \Lambda)]\mathbf{V}_\tau^a + O(\eta^{4-4q_s}) = 0 \tag{4.6}$$

где $\mathbf{V}_\tau^a = V_1^a \mathbf{i}_1 + V_2^a \mathbf{i}_2$ ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ — единичные орты), $B_R \mathbf{V}_\tau^a = -h^2\Lambda^{-1}\{[{}^3/_8(R_1^{-2} + R_2^{-2}) + {}^1/_4(R_1R_2)^{-1}]\mathbf{V}_\tau^a + {}^1/_2(R_1^{-1}+R_2^{-1})\quad (V_1^a R_1^{-1}\mathbf{i}_1 + V_2^a R_2^{-1}\mathbf{i}_2) + V_1^a R_1^{-2}\mathbf{i}_1 + V_2^a R_2^{-2}\mathbf{i}_2\}$.

Вектор тангенциальных перемещений оболочки $\mathbf{V}_\tau = V_1\mathbf{i}_1 + V_2\mathbf{i}_2$ восстанавливается по вектору $\mathbf{V}_\tau^a$ следующим образом $\mathbf{V}_\tau(\xi,\ \theta,\ x_3) = \mathbf{V}_\tau^a \sin\Lambda x_3 + O(\eta + \eta^{2-2q_s})$.

Область применимости уравнения (4.6) так же, как и уравнения (4.1), определяется (3.5). В силе остаются и соотношения (4.2). При выполнении неравенства (3.4) уравнение (4.6) распадается на два скалярных уравнения

$$\eta^2\left(\frac{1}{2\Lambda}+B^*\right)\left(\frac{\partial^2V_1^a}{\partial\xi^2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi}\frac{\partial V_1^a}{\partial\xi}\right)+(\mu-\Lambda)V_1^a+O(\eta^{2-2p}+\eta^{4-4q_s})=0 \tag{4.7}$$

$$\frac{\eta^2}{2\Lambda}\left(\frac{\partial^2V_2^a}{\partial\xi^2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi}\frac{\partial V_2^a}{\partial\xi}\right)+(\mu-\Lambda)V_2^a+O(\eta^{2-2p}+\eta^{4-4q_s})=0 \tag{4.8}$$

Нетрудно заметить, что корни дисперсионных уравнений, соответствующих (4.7), (4.8) совпадают с (3.8), (3.9). Отсюда можно сделать вывод, что и в этом случае интервал согласования частот между теорией высокочастотных НДС малой изменяемости и теорией динамического погранслоя определяется неравенством (3.6).

В [3] показано, что в окрестности частот $\Lambda=\Lambda^{(2)}$ на краю оболочки с погрешностью $O(\eta^{1-q_s})$ можно пренебречь напряжением σ_{11}, а напряжения σ_{12}, σ_{13} представить в виде

$$\sigma_{12}=\eta\left(\frac{\partial V_1^a}{\partial\theta}+\frac{\partial V_2^a}{\partial\xi}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi}V_2^a\right)\sin\Lambda x_3,\qquad \sigma_{13}=\Lambda V_1^a\cos\Lambda x_3 \tag{4.9}$$

Сравнивая (4.9) с (3.16), заключаем, что для снятия невязок в граничных условиях (1.1) надо решить векторное уравнение (4.6) со следующими граничными условиями при $\xi=\xi_i$ ($i=1, 2$):

$$\frac{\partial V_1^a}{\partial\theta}+\frac{\partial V_2^a}{\partial\xi}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi}V_2^a=\frac{\eta^{-1}\varphi_a}{\sqrt{A_2(\xi_i)}}\sum_{m=0}^{1}C_{j_a+m}(-1)^m\exp[(-1)^m\eta^{-1}\varphi_a\xi_i]$$

$$V_1^a=-\frac{\Lambda}{\varphi_p\sqrt{A_2(\xi_i)}}\sum_{m=0}^{1}C_{j_p+m}(-1)^m\exp[(-1)^m\eta^{-1}\varphi_p\xi_i] \tag{4.10}$$

Если к оболочке приложены только скручивающие нагрузки (в (1.1) $g_{1i}=g_{3i}=0$), то в (4.10) $C_{j_p+m}=0$, и граничные условия к (4.6) выписываются явно, т. к. C_{j_a+m} выражаются по формулам (3.14).

Таким образом НДС оболочки вращения в окрестностях частот среза представляется в виде суперпозиции быстро и медленно меняющейся составляющих. При этом быстро меняющаяся составляющая определяется разложениями по модам плоского и антиплоского динамического погранслоев (2.9), (2.10), в которых исключены моды с номерами $j=j_p+m$, $j=j_a+m$ ($m=0, 1$), а медленно меняющееся НДС описывается двумерными уравнениями (4.1), (4.6) с граничными условиями (4.5), (4.10), получаемыми из решения плоской и антиплоской задач теории упругости для прямоугольника.

В заключение отметим, что предлагаемый подход может быть распространен и на другие типы закрепления краев оболочки, причем в случае смешанных граничных условий (2.5) коэффициенты разложения по модам плоского погранслоя тоже выписываются явно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д.* Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4, С. 152–162.
2. *Каплунов Ю. Д.* Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148–160.
3. *Каплунов Ю. Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменяемости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990, № 5, С. 147–157.

4. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. *Гольденвейзер А. Л.* О вынужденных гармонических колебаниях оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 168–177.
6. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // ДАН. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
7. *Пельц С. П., Шахман В. М.* Рассеяние волны Рэлея на упругой полосе, соединенной на торце с упругой полуплоскостью // ДАН. 1987. Т. 292. № 2. С. 299–303.
8. *Пельц С. П., Шихман В. М.* Распространение волн в крестообразном соединении бесконечных упругих полос // ПММ. 1987. Т. 51. № 1. С. 54–59.
9. *Gregory R. D., Gladwell I.* The reflection of a symmetric Rayleigh – Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // J. of Elast. 1983. N. 13. P. 185–206.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.1990