МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3:534.1

В. И. СЕДЕНКО

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С МАЛОЙ ИНЕРЦИЕЙ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Доказана теорема единственности обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений Маргера – Власова, существование обобщенных решений которой доказано в [1]. Для определенности рассматривается задача с краевыми условиями жесткого защемления оболочки. Основным инструментом доказательства теоремы единственности служат оценки типа неравенств вложения с константами, обладающими взаимосвязью вполне определенной формы. Используется, что все нелинейные члены всех уравнений имеют дивергентный вид. Новая по сравнению с [1] информация об обобщенных решениях не используется. Частным случаем полученного результата является теорема единственности обобщенных решений начально-краевых задач для уравнений колебаний пластины, существование которых доказано в [2].

1. Начально-краевая задача. Предположим, что оболочка проектируется на плоскую ограниченную область Ω с границей Γ класса $\Lambda_2(m,\ 0)$. Рассмотрим систему уравнений

$$\rho h w_{tt}+D\nabla^4 w=Z+(N_1 w_{x_1})_{x_1}+(N_{12}w_{x_1})_{x_2}+ +(N_2 w_{x_2})_{x_2}+(N_{12}w_{x_2})_{x_1}-N_1k_1-N_2k_2 \tag{1.1}$$

$$N_1=Eh(1-\mu^2)^{-1}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2),\ N_2=Eh(1-\mu^2)^{-1}(\varepsilon_2+ +\mu\varepsilon_1),\ N_{12}=Eh2^{-1}(1+\mu)^{-1}\varepsilon_{12} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_1=u_{x_1}+kw+2^{-1}w_{x_1}{}^2,\ \varepsilon_2=v_{x_2}+k_2w+2^{-1}w_{x_2}{}^2$$

$$\varepsilon_{12}=u_{x_2}+v_{x_1}+w_{x_1}w_{x_2} \tag{1.3}$$

$$\Delta u+(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_1}=-2(1-\mu)^{-1}[(k_1w)_{x_1}+w_{x_1}w_{x_1x_1}+ +\mu(k_2w)_{x_1}+\mu w_{x_1x_2}]-w_{x_2}w_{x_1x_2}-w_{x_1}w_{x_2x_2}-X \tag{1.4}$$

$$\Delta v+(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_2}=-2(1-\mu)^{-1}[(k_2w)_{x_2}+w_{x_2}w_{x_2x_2}+ +\mu(k_1w)_{x_2}+\mu w_{x_1}w_{x_1x_2}]-w_{x_1}w_{x_1x_2}-w_{x_2}w_{x_1x_2}-Y,\quad \theta=u_{x_1}+v_{x_2} \tag{1.5}$$

с краевыми и начальными условиями

$$w|_\Gamma=\partial w/\partial n|_\Gamma=0 \tag{1.6}$$

$$u|_\Gamma=v|_\Gamma=0 \tag{1.7}$$

$$w(x,\ 0)=w_0(x),\ x\in\Omega \tag{1.8}$$

$$w_t(x,\ 0)=w_1(x),\ x\in\Omega \tag{1.9}$$

В уравнениях (1.1)–(1.9) u, v – продольные перемещения точек срединной поверхности оболочки, w – поперечное перемещение точек срединной поверхности оболочки, D – изгибная жесткость оболочки, E, μ – упругие постоянные, h — высота оболочки, N_1, N_2, N_{12} — продольные усилия в оболочке, ε_1, ε_2, ε_{12} — характеристики деформации срединной поверхности оболочки, k_1, k_2 — кривизны оболочки, которые считаем непрерывно дифференцируемыми в Ω, X, Y, Z — составляющие внешних сил, действующих на оболочку. Предполагается, что далее массовая плотность и линейные размеры измеряются в таких единицах, что имеют место соотношения $\rho h=1$, $2\rho E^{-1}(1+\mu)=1$, где ρ — массовая плотность оболочки. Относительно начально-краевой задачи (1.1)—(1.9) см. [1, с. 759—761].

2. Обобщенные решения начально-краевой задачи (1.1) — (1.9). Теорема существования. Напомним определения гильбертовых пространств $\overset{\circ}{H}{}_2^{l}(\Omega)$ и $H_2^l(\Omega)$ функций на Ω. $\overset{\circ}{H}{}_2^{l}(\Omega)$ является пополнением множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций по норме, порожденной скалярным произведением $(w_1, w_2)_{\overset{\circ}{H}{}_2^{l}(\Omega)}=(w_1, w_2)_{L_2(\Omega)}+(\nabla^l w_1, \nabla^l w_2)_{L_2(\Omega)}$; $H_2^l(\Omega)$ является пополнением множества бесконечно дифференцируемых на Ω функций по норме, порожденной скалярным произведением $(w_1, w_2)_{H_2^l(\Omega)}=(w_1, w_2)_{L_2(\Omega)}+(\nabla^l w_1, \nabla^l w_2)_{L_2(\Omega)}$. Пусть $Q=\Omega\times\times[0, T]$. Гильбертово пространство $B_2^{2,1}(Q)$ — это пополнение множества бесконечно дифференцируемых на Q функций, финитных в Ω при каждом фиксированном t, по норме, порожденной скалярным произведением

$$(w_1, w_2)_{B_2^{2,1}(Q)}=\int_0^T[(w_{1t}, w_{2t})_{L_2(\Omega)}+(w_1, w_2)_{\overset{\circ}{H}{}_2^{2}(\Omega)}]\,dt$$

Через $\overset{\circ}{B}{}_2^{2,1}(Q)$ обозначим замыкание в $B_2^{2,1}(Q)$ множества бесконечно дифференцируемых на Q функций w, финитных в Ω при каждом фиксированном t, и таких, что $w(x_1, x_2, t)\equiv 0$, если $T-\delta\leqslant t\leqslant T$, где δ — некоторое определенное для каждой функции число.

Обобщенным решением начально-краевой задачи (1.1)—(1.9) называется функция $w\in B_2^{2,1}(Q)$, удовлетворяющая интегральному соотношению

$$\int_0^T\int_\Omega[-w_t w_t'+D\nabla^2 w\nabla^2 w'+(N_1k_1+N_2k_2)w'+(N_1w_{x_1}+N_{12}w_{x_2})w_{x_1}'+$$
$$+(N_{12}w_{x_1}+N_2w_{x_2})w_{x_2}'-Zw']\,dx\,dt-\int_\Omega w_1 w'\,dx=0 \qquad (2.1)$$

для любой $w'\in\overset{\circ}{B}{}_2^{2,1}(Q)$ и начальному условию

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega (w-w_0)^2\,dx\,|_t=0 \qquad (2.2)$$

N_1, N_2, N_{12} в (2.1) выражаются через w, u, v по формулам (1.2), (1.3), а u, v выражаются через w для каждого $t\in[0, T]$ по формулам (1.4), (1.5) с учетом (1.7), см. [1, с. 774—775].

В [1] доказана следующая

Теорема 2.1. Пусть пологая оболочка занимает в плане ограниченную область Ω с границей Γ класса $\Lambda_2(m, \lambda)$. Пусть $w_0(x)\in\overset{\circ}{H}{}_2^{2}(\Omega)$, $w_1(x)\in L_2(\Omega)$, X, Y, $Z\in L_2(Q)$. Тогда начально-краевая задача (1.1)—(1.9) имеет по меньшей мере одно обобщенное решение w в смысле (2.1), (2.2), которое удовлетворяет следующей оценке

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in[0,T]}(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}+\|w\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{2}(\Omega)})\leqslant C$$

где C зависит лишь от начальных данных, массовых сил и величины T.

3. Теорема единственности обобщенного решения.

Теорема 3.1 (единственности). Пусть $w(x, t)$ — обобщенное решение начально-краевой задачи (1.1)—(1.9) в смысле (2.1)—(2.2), причем область Ω такова, что $\partial\Omega=\Gamma\in\Lambda_3(m, \lambda)$, и

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in[0,T]} (\|w_t\|_{L_2(\Omega)}+\|w\|_{H_2(\Omega)})\leqslant C \tag{3.1}$$

Тогда это обобщенное решение единственно.

Вся оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 3.1. Получим оценки норм некоторых линейных операторов, определенных с использованием разложений в ряд по собственным функциям оператора Δ. Здесь мы изложим некоторые сведения, которые понадобятся для вывода интегрального неравенства, следствием которого будет теорема единственности.

Пусть ψ_j, λ_j — собственные функции и собственные числа задачи $\Delta^2\psi=\lambda\psi$, $\psi|_{\partial\Omega}=0$, $\partial\psi/\partial n|_{\partial\Omega}=0$. Для каждой функции $h\in H_2^{\circ 2}(\Omega)$ имеет место единственное разложение в ряд в $H_2^{\circ 2}(\Omega)$ $h=\Sigma a_j\psi_j$ $(j=1, \ldots, \infty)$, см. [3]. Введем обозначения

$$M_\Omega^k=\left\{h: \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2k}a_j^2<\infty\right\}, \quad M_\Omega=\bigcap_{k=1}^{\infty} M_\Omega^k$$

$$S_\Omega^\sigma: M_\Omega\to L_2(\Omega),\ S_\Omega^\sigma h=\Sigma\lambda_j^\sigma a_j\psi_j\ (j=1, \ldots, \infty),\ \sigma\in R$$

В дальнейшем используется тот факт, что операторы

$$S_\Omega^{-1/4}\partial/\partial x_j: M_\Omega\to L_2(\Omega) \quad (j=1, 2)$$

$$\partial/\partial x_j\, S_\Omega^{-1/4}: M_\Omega\to L_2(\Omega) \quad (j=1, 2)$$

продолжаются до ограниченных операторов из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, см. [4]. Отсюда следует также

$$\|h_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\chi\|S_\Omega^{1/4}h\|_{L_2(\Omega)} \quad (i=1, 2) \tag{3.2}$$

где χ не зависит от h. Установим подготовительное интегральное неравенство. Пусть w^1, w^2 — два обобщенных решения начально-краевой задачи (1.1)—(1.9) с одинаковыми данными. Тогда $w^0=w^1-w^2$, $u^0=u^1-u^2$, $v^0=v^1-v^2$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega [-w_t^0w'+D\nabla^2w^0\nabla^2w'+((N_1^1-N_1^2)k_1+(N_2^1-N_2^2)k_2)w'+\\ +((N_1^1-N_1^2)w_{x_1}^1+N_1^2w_{x_1}^0+(N_{12}^1-N_{12}^2)w_{x_2}^1+N_{12}^2w_{x_2}^0)w_{x_1}'+\\ +((N_{12}^1-N_{12}^2)w_{x_1}^1+N_{12}^2w_{x_1}^0+(N_2^1-N_2^2)w_{x_1}^1+N_2^2w_{x_2}^0)w_{x_2}']\,dx\,dt=0\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta u^0+(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_1}^0=-2(1-\mu)^{-1}[(k_1w^0)_{x_1}+w_{x_1}^0\overset{1}{w}_{x_1x_1}+w_{x_1}^2\overset{0}{w}_{x_1x_1}+\\ +\mu(k_2w^0)_{x_1}+\mu w_{x_2}^0\overset{1}{w}_{x_1x_1}+\mu w_{x_2}^2\overset{0}{w}_{x_1x_2}]-w_{x_2}^1\overset{0}{w}_{x_1x_2}-\\ -w_{x_2}^0\overset{2}{w}_{x_1x_2}-w_{x_1}^0\overset{1}{w}_{x_2x_2}-w_{x_1}^2\overset{0}{w}_{x_2x_2}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\Delta v^0+(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_2}^0=-2(1-\mu)^{-1}[(k_2w^0)_{x_2}+w_{x_2}^0\overset{1}{w}_{x_2x_2}+w_{x_2}^2\overset{0}{w}_{x_2x_2}+\\ +\mu(k_1w^0)_{x_2}+\mu w_{x_1}^0\overset{1}{w}_{x_1x_2}+\mu w_{x_1}^2\overset{0}{w}_{x_1x_2}]-w_{x_1}^1\overset{0}{w}_{x_1x_2}-\\ -\overset{2}{w}_{x_1x_2}w_{x_1}^0-w_{x_2}^0\overset{1}{w}_{x_1x_1}-w_{x_2}^2\overset{0}{w}_{x_1x_1}\end{aligned} \tag{3.5}$$

которые, очевидным образом, следуют из (2.1), (1.4), (1.5).

Поскольку $w^i(x, t)\in H_2^{\circ 2}(\Omega)$ для почти всех $t\in[0, T]$, $i=1, 2$, имеем

$$w^i(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^i(t)\psi_j(x) \quad (i=0, 1, 2)$$

$$\alpha_j^0(t)=\alpha_j^1(t)-\alpha_j^2(t) \quad (j=1, 2, \dots)$$

Предложение 3.2. Для всех $j=1, 2, \dots, \alpha_j^0(t)$ обладает на $[0, T]$ второй обобщенной производной, причем для почти всех $t\in[0, T]$ имеет место уравнение

$$\alpha_j^{0\cdot\cdot}(t)+D\lambda_j\alpha_j^0(t)=f_j(t) \tag{3.6}$$

с начальными условиями

$$\alpha_j(0)=\alpha_j^{\cdot}(0)=0 \tag{3.7}$$

$$f_j(t)=-\int_\Omega[((N_1^1-N_1^2)k_1+(N_2^1-N_2^2)k_2)\psi_j+((N_1^1-N_1^2)w_{x_1}^1+$$
$$+N_1^2w_{x_1}^0+(N_{12}^1-N_{12}^2)w_{x_2}^1+N_{12}^2w_{x_2}^0)\psi_{jx_1}+(N_{12}^1-N_{12}^2)w_{x_1}^1+$$
$$+N_{12}^2w_{x_1}^0+(N_2^1-N_2^2)w_{x_2}^1+N_2^2w_{x_2}^0)\psi_{jx_2}]\,|_{t=t}\,dx \tag{3.8}$$

Доказательство. Поскольку $\psi_j(x)\in H_2^{\circ 2}(\Omega)$, то в (3.3) мы можем положить $w'(x, t)=\psi_j(x)\theta(t)$, где $\theta(t)$ — финитна и непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Тем самым мы и получим, согласно определению обобщенной производной, (3.6) и (3.8). Предложение доказано.

Лемма 3.3. Для всех $t\in[0, T]$ имеет место неравенство

$$\|(S_\Omega^{-1/4}w^0(x,t))_t\|^2_{L_2(\Omega)}+D\chi^{-1}\|w^0(x,t)\|^2_{H_2^{\circ 1}(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^t M(\tau)\|(S_\Omega^{-1/4}w^0(x,\tau))_t\|_{L_2(\Omega)}\,d\tau \tag{3.9}$$

$$M(t)=2\chi\sum_{r=1}^{2}(\max_{x\in\Omega}|k_r(x)|\ \|N_r^1(x,t)-N_r^2(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|(N_r^1(x,t)-N_r^2(x,t))w_{x_2}^1(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\|N_r^2(x,t)w_{x_2}^0(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|(N_{12}^1(x,t)-N_{12}^2(x,t))w_{x_2}^1(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\|N_{12}^2(x,t)w_{x_2}^0(x,t)\|_{L_2(\Omega)}) \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть P_Ω^k: $L_2(\Omega)\to m_\Omega^k$ — ортогональная в $L_2(\Omega)$ проекция, где $m_\Omega^k=\{h$: $h=\Sigma a_j\psi_j\}$ $(j=1, \dots, k)$. Используя (3.6)—(3.8), получаем

$$\|(P_\Omega^kS_\Omega^{-1/4}w^0(x,t))_t\|^2_{L_2(\Omega)}+D\|P_\Omega^kS_\Omega^{-1/4}w^0(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}=$$
$$=2\int_0^T\int_\Omega\Big[\sum_{r=1}^{2}((N_r^1(x,\tau)-N_r^2(x,\tau))k_r(x)P_\Omega^kS_\Omega^{-1/2}w_t^0(x,\tau)+$$
$$+(N_1^1(x,\tau)-N_1^2(x,\tau))w_{x_1}^1(x,\tau)+N_1^2(x,\tau)w_{x_1}^0(x,\tau)+$$
$$+(N_{12}^1(x,\tau)-N_{12}^2(x,\tau))w_{x_2}^1(x,\tau)+N_{12}^2(x,\tau)w_{x_2}^0(x,\tau)P_\Omega^kS_\Omega^{-1/2}w^0_{tx_1}(x,\tau)+$$
$$+((N_{12}^1(x,\tau)-N_{12}^2(x,\tau))w_{x_1}^1(x,\tau)+N_{12}^2(x,\tau)w_{x_1}^0(x,\tau)+(N_2^1(x,\tau)-$$
$$-N_2^2(x,\tau)w_{x_2}^1(x,\tau)+N_{12}^1(x,\tau)w_{x_2}^0(x,\tau)P_\Omega^kS_\Omega^{-1/2}w_{tx_2}(x,\tau)]\,dx\,d\tau \tag{3.11}$$

Теперь перейдем в (3.11) к пределу при $k\to+\infty$ с учетом (3.1). Для левой части (3.11) используется лишь (3.2). Правая часть (3.11) оценивается с учетом замечания об ограниченности операторов $S_\Omega^{-1/4}\partial/\partial x_i$, $i=1, 2$, в $L_2(\Omega)$, после чего с использованием неравенства Коши — Буняковского получаем (3.9), (3.10). Лемма доказана. Построим операторы сглаживания. Без ограничения будем считать, что $\Omega\subset K=\{x : x=(x_1, x_2),\ 0<x_1<2\pi,\ 0<x_2<2\pi\}$. Тогда, для $h\in \overset{\circ}{H}{}_2^{2}(\Omega)$, поскольку $\overset{\circ}{H}{}_2^{2}(\Omega)\subset H_2^2$, где H_2^2 пополнение множества тригонометрических полиномов двух переменных по норме $\|g\|_{H_2^2}=\|g\|_{L_2(K)}+\Sigma\|g_{x_px_q}\|_{L_2(K)}$ $(p, q=1, 2)$, имеем

$$h(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{inx},\quad \|h\|^2_{\overset{\circ}{H}{}_2^{2}(\Omega)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^4|a_n|^2$$

Для $N\in Z^+$ положим

$$(T_Nh)(x)=\sum_{n_1=-N}^{N}\sum_{n_2=-N}^{N}a_ne^{inx},\quad (R_Nh)(x)=h(x)-(T_Nh)(x)$$

Очевидно, что

$$\|T_Nh\|^2_{H_2^j}+\|R_Nh\|^2_{H_2^j}=\|h\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{j}(\Omega)}\quad (j=0, 1, 2) \tag{3.12}$$

$$\|R_Nh\|_{L_2(\Omega)}\leqslant N^{-1}\|h\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)} \tag{3.13}$$

Далее важную роль играет следующая

Лемма 3.4. Для $h\in\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)$ и $N\in Z^+$, $N\geqslant 2$

$$\max_{x\in\Omega}|(T_Nh)(x)|\leqslant B(\ln N)^{1/2}\|h\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)} \tag{3.14}$$

где B не зависит от h и N.

Доказательство. Имеем для $h(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{inx}$:

$$\max_{x\in K}|(T_Nh)(x)|\leqslant\sum_{n_1=-N}^{N}\sum_{n_2=-N}^{N}|a_n|=|a_0|+\sum_{\substack{n_1=-N\\|n|\neq 0}}^{N}\sum_{n_2=-N}^{N}|n|\,|a_n|\,|n|^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant|a_0|+\Bigl(\sum_{\substack{n_1=-N\\|n|\neq 0}}^{N}\sum_{n_2=-N}^{N}|n|^2|a_n|^2\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{\substack{n_1=-N\\|n|\neq 0}}^{N}\sum_{n_2=-N}^{N}|n|^{-2}\Bigr)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant|a_0|+C\|(T_Nh)(x)\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)}(\ln N)^{1/2}$$

Кроме того, учтем, что $|a_0|=|\int_K h\,dx|\leqslant 2\pi\|h\|_{L_2(\Omega)}\leqslant 2\pi\|h\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)}$. Тем самым получаем (3.14). Лемма доказана.

Установим некоторые результаты о решениях краевой задачи вида (1.4), (1.5), (1.7). Рассмотрим однородную краевую задачу для эллиптической системы уравнений

$$\Delta u+(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_1}=f_1 \tag{3.15}$$

$$\Delta v+(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_2}=f_2 \tag{3.16}$$

$$u|_\Gamma=v|_\Gamma=0 \tag{3.17}$$

Здесь будем считать, что $\Gamma\in\Lambda_3(m,\lambda)$.

Замечание 3.5. Обобщенное решение u, v задачи (3.15)–(3.17), удовлетворяющее интегральному соотношению

$$\int_\Omega [(-\Delta u-(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_1})u_0+(-\Delta v-(1+\mu)(1-\mu)^{-1}\theta_{x_2})v_0+$$
$$+f_1u_0+f_2v_0]\,dx=0 \tag{3.18}$$

для любых u_0, $v_0\in \overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)$, существует и имеет следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{2}(\|u_{x_i}\|_{L_q(\Omega)}+\|v_{x_i}\|_{L_q(\Omega)})\leqslant C(\|f_1\|_{L_p(\Omega)}+\|f_2\|_{L_p(\Omega)})$$
$$q<2p(2-p)^{-1} \tag{3.19}$$

где C не зависит от u, v, см. [1], с. 765–766.

Замечание 3.6. Пусть в (3.18) $f_i=g_{1x_1}^{\,i}+g_{2x_2}^{\,i}$, $i=1, 2$. Тогда

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)}+\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)}\leqslant C\sum_{p,q=1}^{2}\|g_q^{\,p}\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.20}$$

где C не зависит от u, v, см. [1, с. 772–773], (2.56)–(2.59).

Далее нам также придется использовать следующий результат

Замечание 3.7. Пусть f_1, $f_2\in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное решение (3.15)–(3.17) $u, v\in \overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)\cap H_2^2(\Omega)$, причем выполняется оценка

$$\sum_{p,q=1}^{2}(\|u_{x_px_q}\|_{L_2(\Omega)}+\|v_{x_px_q}\|_{L_2(\Omega)})\leqslant C(\|f_1\|_{L_2(\Omega)}+\|f_2\|_{L_2(\Omega)}) \tag{3.21}$$

где C не зависит от u, v, см. [5].

Предпоследним этапом в доказательстве теоремы единственности является оценка $M(t)$.

Лемма 3.7. Существуют также константы μ_1 и μ_2, зависящие лишь от данных начально-краевой задачи (1.1)–(1.9), что для $N\in Z^+$, $N\geqslant 2$, и любого $t\in[0, T]$ выполняется неравенство

$$M(t)\leqslant \mu_1 \ln N\|w^0(x, t)\|_{\overset{\circ}{H}{}_2^{1}(\Omega)}+\mu_2N^{-1/6} \tag{3.22}$$

Доказательство. Сперва отметим следующую оценку

$$M(t)\leqslant\mu'(\|w^0(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{2}(\|u_{x_j}^0(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\|v_{x_j}^0(x,t)\|_{L_2(\Omega)})+$$
$$+\sum_{p,q,r=1}^{2}\|w_{x_q}^{p}(x,t)w_{x_r}^{0}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{p,q=1}^{2}(\|w^0(x,t)w_{x_q}^{p}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|w^p(x,t)w_{x_q}^{0}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{p,q,r,s,h=1}^{2}\|w_{x_h}^{0}(x,t)w_{x_q}^{p}(x,t)w_{x_s}^{r}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\sum_{p,q,r=1}^{2}(\|u_{x_q}^{p}(x,t)w_{x_r}^{0}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\|u_{x_q}^{p}(x,t)w_{x_r}^{0}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|u_{x_p}^{0}(x,t)w_{x_r}^{q}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}+\|v_{x_p}^{0}(x,t)w_{x_r}^{q}(x,t)\|_{L_2(\Omega)}) \tag{3.23}$$

которая очевидным образом следует из (3.9), (3.10), (1.2), (1.3). Здесь μ' зависит лишь от данных задачи и от области. Теперь оценим величины в правой части (3.23).

Предложение 3.8. Имеют место оценки

$$\|zw_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu_1^1 \ln N \|w_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2^1 N^{-1/6} \quad (j=1,2) \tag{3.24}$$

где $z=1$, w_{xq}^p, $p,q=1,2$, $w_{xq}^p w_{xs}^r$, $p,q,r,s=1,2$, $N\in Z^+$, $N\geqslant 2$, μ_1^1, μ_2^1 — константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)—(1.9) и от области.

Доказательство. Достаточно рассмотреть наиболее сложный случай $z=w_{xq}^p w_{xs}^r$. Имеем

$$\|w_{x_j}^0 w_{x_q}^p w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)} = \|w_{x_j}^0 (T_N w_{x_q}^p + R_N w_{x_q}^p)(T_N w_{x_s}^r + R_N w_{x_s}^r)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \|w_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p T_N w_{x_s}^r i\|_{L_2(\Omega)} + \|w_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p R_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ \|w_{x_j}^0 R_N w_{x_q}^p T_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)} + \|w_{x_j}^0 R_N w_{x_q}^p R_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)}$$

Теперь, учитывая (3.14), получаем

$$\|w_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p T_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|T_N w_{x_q}^p\|_{L_\infty(\Omega)} \|T_N w_{x_s}^r\|_{L_\infty(\Omega)} \|w_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant B^2 \ln N \|w^p\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|w^r\|_{H_1^{\circ 2}(\Omega)} \|w^0\|_{H_2^{\circ 1}(\Omega)}$$

Далее, используя неравенства Гёльдера, теоремы вложения и (3.13), имеем

$$\|w_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p R_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|w_{x_j}^0\|_{L_6(\Omega)} \|T_N w_{x_q}^p\|_{L_6(\Omega)} \|R_N w_{x_s}^r\|_{L_6(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \|w^0\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|T_N w_{x_q}^p\|_{L_6(\Omega)} \|R_N w_{x_s}^r\|_{L_6(K)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \|w^0\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|w^p\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|R_N w_{x_s}^r\|_{L_2(K)}^{1/6} \|R_N w_{x_s}^r\|_{L_{10}(K)}^{5/6} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \|w^0\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|w^p\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|w^r\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} N^{-1/6} \leqslant C_4 N^{-1/6} (\|w^1\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} + \|w^2\|_{N_2^{\circ 2}(\Omega)})^3$$

Аналогично оценивается $\|w_{x_j}^0 R_N w_{x_q}^p T_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|w_{x_j}^0 R_N w_{x_q}^p R_N w_{x_s}^r\|_{L_2(\Omega)}$. Предложение доказано.

Предложение 3.9. Имеют место оценки

$$\|u_{x_j}^0 w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{x_j}^0 w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu_1^2 \ln N \|w_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2^2 N^{-1/6} \quad (j,p,q=1,2) \tag{3.25}$$

для любого $N\in Z^+$, $N\geqslant 2$, где μ_1^2, μ_2^2 — константы, зависящие от данных задачи (1.1)—(1.9) и от области.

Доказательство. Имеем $\|u_{x_j}^0 w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} + \|u_{x_j}^0 R_N w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)}$. Теперь, учитывая (3.14), получаем

$$\|u_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|T_N w_{x_q}^p\|_{L_\infty(\Omega)} \|u_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant B (\ln N)^{1/2} \|w^p\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} \|u_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.26}$$

Используя (3.4), (3.20), получаем

$$\|u_{x_j}^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1 \Big(\|w^0\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{j,p,q=1}^{2} \|w_{x_j}^0 w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \Big(\|w^0\|_{H_2^{\circ 1}(\Omega)} + \sum_{j,p,q=1}^{2} (\|w_{x_j}^0 T_N w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)} + \|w_{x_j}^0 R_N w_{x_q}^p\|_{L_2(\Omega)}) \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_3 (\ln N)^{1/2} \|w^0\|_{H_2^{\circ 1}(\Omega)} (\|w^1\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)} + \|w^2\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)}) + C_4 N^{-1/4} (\|w^1\|_{H_1^{\circ 2}(\Omega)} +$$
$$+ \|w^2\|_{H_2^{\circ 2}(\Omega)}) \tag{3.27}$$

Здесь мы оценивали также, как в доказательстве предложения 3.8. Далее, учитывая (3.4), (3.19), (3.12), (3.13), имеем

$$\| u^0_{x_j} R_N w^p_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| u^0_{x_j} \|_{L_3(\Omega)} \| R_N w^p_{x_q} \|_{L_6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left(\sum_{r,s=1}^{2} \| w^r_{x_s} \|_{L_{4/3}(\Omega)} + \sum_{m,n,l,r,s=1}^{2} \| w^m_{x_n x_l} w^r_{x_s} \|_{L_{4/3}(\Omega)} \right) \| R_N w^p_{x_q} \|_{L_6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 N^{-1/6} \| w^p \|_{\overset{\circ}{H}{}^2_2(\Omega)} \left(\sum_{r,s=1}^{2} \| w^r_{x_s} \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{m,n,l,r,s=1}^{2} \| w^m_{x_n x_l} \|_{L_2(\Omega)} \| w^r_{x_s} \|_{L_4(\Omega)} \right) \tag{3.28}$$

Рассуждения аналогичные доказательству предложения 3.8; (3.26)—(3.28) дают (3.25). Предложение доказано.

Предложение 3.10. Имеют место оценки

$$\| w^0_{x_j} u^p_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} + \| w^0_{x_j} v^p_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu_1^3 \ln N \| w^0_{x_j} \|_{L_2(\Omega)} + \mu_2^3 N^{-1/6} \quad (j, p, q = 1, 2) \tag{3.29}$$

для любого $N \in Z^+$, $N \geqslant 2$, где μ_1^3, μ_2^3 — константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)—(1.9) и от области.

Доказательство. Имеем

$$\| w^0_{x_j} u^p_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| w^0_{x_j} u^{p,N}_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} + \| w^0_{x_j} (u^p_{v_q} - u^{p,N}_{x_q}) \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.30}$$

где $u^{p,N}$, $v^{p,N}$ — решения краевой задачи

$$\Delta u^{p,N} + (1+\mu)(1-\mu)^{-1} \theta^{p,N}_{x_1} = -2(1-\mu)^{-1} [(k_1 w^p)_{x_1} + w^p_{x_1 x_1} T_N w_{x_1}{}^p +$$

$$+ \mu (k_2 w^p)_{x_1} + \mu w^p_{x_1 x_2} T_N w_{x_2}{}^p] - w^p_{x_1 x_2} T_N w_{x_2}{}^p - w^p_{x_2 x_2} T_N w_{x_1}{}^p - X \tag{3.31}$$

$$\Delta v^{p,N} + (1+\mu)(1-\mu)^{-1} \theta^{p,N}_{x_2} = -2(1-\mu)^{-1} [(k_2 w^p)_{x_2} + w^p_{x_2 x_2} T_N w_{x_2}{}^p + \mu (k_1 w^p)_{x_2} +$$

$$+ \mu w^p_{x_1 x_2} T_N w_{x_2}{}^p] - w^p_{x_1 x_2} T_N w_{x_2}{}^p - w^p_{x_1 x_1} T_N w_{x_2}{}^p - Y \tag{3.32}$$

$$u^{p,N}|_\Gamma = v^{p,N}|_\Gamma = 0 \tag{3.33}$$

Оценим сначала первое слагаемое правой части (3.30). Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\rho(x)$, $x \in R^2$, такова, что $\rho(x) \equiv 1$, $x \in \Omega$, $\rho(x) \equiv 0$, $x \in R^2 \backslash K$. Положим $U^{p,N}(x) = \rho(x)(G u^{p,N})(x)$, где $G: H_2{}^2(\Omega) \to H_2{}^2(R^2)$ — непрерывный оператор продолжения, см. [6]. Тогда имеем

$$\| w^0_{x_j} U^{p,N}_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| w^0_{x_j} T_N U^{p,N}_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} + \| w^0_{x_j} R_N U^{p,N}_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.34}$$

Теперь, учитывая (3.14), (3.31)—(3.33), (3.21), получаем

$$\| w^0_{x_j} T_N U^{p,N}_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| T_N U^{p,N}_{x_q} \|_{L_\infty(\Omega)} \| w^0_{x_j} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1 (\ln N)^{1/2} \| U^{p,N}_{x_q} \|_{H_2{}^{01}(\Omega)} \| w^0_{x_j} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 (\ln N)^{1/2} \left(\sum_{r=1}^{2} \| w_{x_r}{}^p \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{l,r,s=1}^{2} \| T_N w_{x_l}{}^p w^p_{x_r x_s} \|_{L_2(\Omega)} \right) \| w^0_{x_j} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \ln N (1 + \| w^p \|_{H_2{}^{02}(\Omega)})^2 \| w^0_{x_j} \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.35}$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, (3.13), неравенства теорем вложения, (3.12), (3.31)—(3.33), имеем

$$\| w^0_{x_j} R_N U^{p,N}_{x_q} \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| w^0_{x_j} \|_{L_4(\Omega)} \| R_N U^{p,N}_{x_q} \|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \| w^0_{x_j} \|_{L_4(\Omega)} \| R_N U^{p,N}_{x_q} \|^{1/4}_{L_2(\Omega)} \| R_N U^{p,N}_{x_q} \|^{3/4}_{L_6(K)} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 N^{-1/4}(\|w^1\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)}+\|w^2\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)})\sum_{r,s=1}^{2}\|U^{p,N}_{x_r x_s}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_5 N^{-1/4}(\|w^1\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)}+\|w^2\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)})\left(\sum_{r=1}^{2}\|w^p_{x_r}\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{l,r,s=1}^{2}\|T_N w^p_{x_l} w^p_{x_r x_s}\|_{L_2(\Omega)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_6 N^{-1/4}(\ln N)^{1/2}\Big)\left(1+\sum_{r=1}^{2}\|w^r\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)}\right)^3 \qquad (3.36)$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части (3.30). Используя неравенство Гёльдера, (1.4), (1.5), (3.31)–(3.33), (3.19), (3.13), получаем

$$\|w^0_{x_j}(u^p_{x_q}-u^{p,N}_{x_q})\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\|w^0_{x_j}\|_{L_6(\Omega)}\|u^p_{x_q}-u^{p,N}_{x_q}\|_{L_3(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_7\sum_{l=1}^{2}\|w^l\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)}\left(\sum_{l=1}^{2}\|R_N w^p_{x_l}\|_{L_{4/3}(\Omega)}+\sum_{r,s,l=1}^{2}\|R_N w^p_{x_l} w^p_{x_r x_s}\|_{L_{4/3}(\Omega)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_8\sum_{r=1}^{2}\|w^r\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)}\left(N^{-1}\|w^p_{x_l(\Omega)}\|_{\overset{\circ}{H}_2^1(\Omega)}+\sum_{r,s,l=1}^{2}\|R_N w^p_{x_l}\|_{L_4(\Omega)}\|w^p_{x_r x_s}\|_{L_2(\Omega)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_9 N^{-1/4}\left(1+\sum_{r=1}^{2}\|w^r\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)}\right)^3 \qquad (3.37)$$

(3.34)–(3.37) дают (3.29). Предложение доказано.

Завершим доказательство теоремы единственности. Согласно (3.9) и (3.22) для

$$\xi(t)=\|(S_\Omega^{-1/4}w^0(x,t))_t\|^2_{L_2(\Omega)}+D\chi^{-1}\|w^0(x,t)\|^2_{\overset{\circ}{H}_2^1(\Omega)}$$

имеет место интегральное неравенство

$$\xi(t)\leqslant\eta_1\ln N\int_0^t\xi(\tau)\,d\tau+\eta_2 N^{-1/6} \qquad (3.38)$$

для всех $t\in[0, T]$ и всех $N\in Z^+$, $N\geqslant 2$, где η_1 и η_2 – константы, зависящие лишь от данных начально-краевой задачи и от области Ω. Применим к (3.38) оценку решения неравенства Гронуола см. [7], и получим

$$\xi(t)\leqslant\eta_2 N^{-1/6}N^{\eta_1 t} \qquad (3.39)$$

Устремив N к бесконечности мы сразу получаем из (3.39), $\xi(t)\equiv 0$ при $0\leqslant t<6^{-1}\eta_1^{-1}$. Далее, повторяя это рассуждение, получим, что $\xi(t)\equiv 0$ при $t\in[0, T]$. Теорема доказана.

Автор благодарит В. И. Юдовича и И. И. Воровича за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. О.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. № 6. С. 747–784.
2. *Морозов Н. Ф.* О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 3. С. 522–525.
3. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1950. 428 с.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
5. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
6. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.VII.1990