

УДК 539.374

© 1991 г.

А. ШВЕДЕ

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Используя заданные механизмы деформирования разными авторами решен ряд задач динамического нагружения цилиндрических жесткопластических оболочек. В [1–14] исследуется воздействие импульса равномерного внутреннего давления. Из них в [8–14] учитывается и геометрическая нелинейность. В геометрически линейной постановке решено и несколько задач с радиальной силой, приложенной по окружности. В [15] импульс такой силы действует на бесконечно длинную оболочку, а в [16, 17] на оболочку, которая закреплена на обоих торцах. В [18] рассматривается полубесконечная цилиндрическая оболочка, нагруженная на некотором расстоянии от свободного торца.

В настоящей работе без дополнительных гипотез о распределении скоростей численно исследовано геометрически нелинейное деформирование цилиндрических жесткопластических оболочек при равномерном импульсном нагружении, а также при кольцевой динамической нагрузке на свободном торце. Определены остаточные деформации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая цилиндрическая оболочка (см. фиг. 1) длины L , радиуса R и толщины $2h$ ($2h \ll L$, $2h \ll R$). Предел текучести материала при растяжении σ_0 , масса единицы поверхности m . Торцы оболочки могут быть свободно опертыми с и без аксиального закрепления. Левый торец может быть свободным. Оболочка нагружена прямоугольным импульсом внутреннего равномерного радиального давления p длительностью τ . К свободному торцу в течение того же интервала времени τ под углом α к образующей оболочки может быть приложена осесимметричная кольцевая сила f . Допустимо также и чисто импульсное нагружение. Тогда считается, что всем точкам оболочки сообщена одинаковая начальная радиальная скорость v_0 .

Ненулевые составляющие тензора скоростей деформаций тонкой цилиндрической оболочки при конечных прогибах в аксиально симметричных условиях можно записать следующим образом (см., например, [9, 10]; 1, 2, 3 — аксиальное, окружное и радиальное направление соответственно):

$$e_{11} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} - z \frac{d^2v}{dx^2}, \quad e_{22} = \frac{v}{R} \quad (1.1)$$

где v , u — скорость прогиба и аксиального смещения срединной поверхности, w — прогиб.

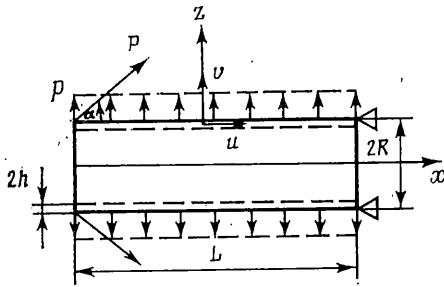
Область применимости (1.1) ограничивается оценкой (y — аксиальное смещение):

$$y \ll w \approx 2h \quad (1.2)$$

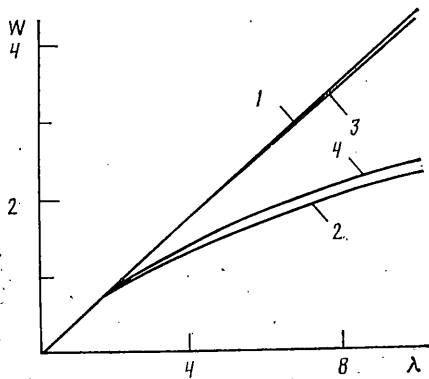
Из условия несжимаемости следует наличие составляющей скорости деформаций e_{33} :

$$e_{33} = -e_{11} - e_{22} \quad (1.3)$$

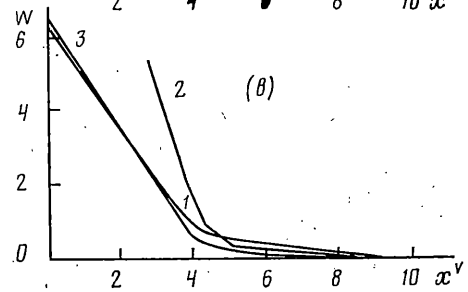
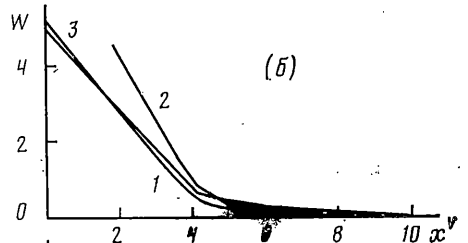
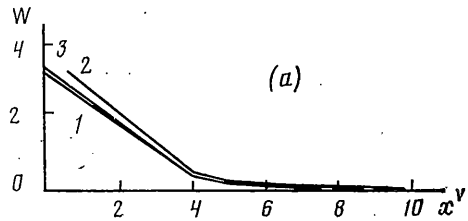
что характеризует обжатие стенки оболочки.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Математическая модель проблемы строится по аналогии с [19], где на основе вариационного принципа, предложенного в [20], рассматривалась задача динамического нагружения жесткопластической квадратной пластины в геометрически линейной постановке. Согласно [20] время движения тела объемом ω разделяется на достаточно малые интервалы Δt^k , и скорости u_i^k и скорости деформаций e_{ij}^k (здесь и далее $i, j=1, 2, 3$ и по ним производится суммирование) в интервале времени Δt^k находятся, минимизируя функционал

$$J(u_i^k, \Delta t^k) = \frac{1}{2\Delta t^k} \int_{\omega} \rho (u_i^k - u_i^{k-1})^2 d\omega + \int_{\omega} \varphi(e_{ij}^k) d\omega - \int_{S_p} P_i u_i^k dS \quad (1.4)$$

$$e_{ij}^k = 1/2 (u_{i,j}^k + u_{j,i}^k)$$

где ρ — плотность, P_i — поверхностные нагрузки, действующие в области S_p , $\varphi(e_{ij}^k)$ — диссипативный потенциал.

При использовании условия текучести Мизеса [20] диссипативный потенциал имеет следующий вид:

$$\varphi(e_{ij}^k) = \sigma_0 (2/3 e_{ij}^k e_{ij}^k)^{1/2} \quad (1.5)$$

Функционал (1.4) для рассматриваемой задачи после интегрирования по толщине оболочки и в окружном направлении и отбрасывания членов, характеризующих инерцию вращения, можно записать так:

$$J(u^k, v^k) = \frac{m}{2\Delta t^k} \int_0^L [(v^k - v^{k-1})^2 + (u^k - u^{k-1})^2] dx + \int_{-h}^h \int_0^L \varphi(e_{ij}^k) dx dz -$$

$$-\int_0^L p v^k dx - f(v^k(0) \sin(\alpha) + u^k(0) \cos(\alpha)) \quad (1.6)$$

где отличные от нуля e_{ij}^k определены по (1.1) и (1.3) и все величины, кроме прогиба w отнесены к k -у интервалу времени. Для того, чтобы в каждом временном шаге (1.1) и (1.3) оставались линейными, прогиб взят из предыдущего $k-1$ интервала и определяется следующим образом:

$$w^{k-1} = w^{k-2} + \frac{1}{2}(v^{k-1} + v^{k-2}) \Delta t^{k-1} \quad (1.7)$$

Начальные условия следующие

$$u^0(x) = 0, \quad v^0(x) = v_0 \quad (1.8)$$

Граничные условия для v^k на закрепленном торце

$$v^k(0) = 0, \quad v^k(L) = 0 \quad (1.9)$$

Если имеется полное закрепление, то

$$u^k(0) = 0, \quad u^k(L) = 0 \quad (1.10)$$

Остальные граничные условия для v^k в случае закрепленного торца и условия на свободном торце получим в ходе обработки (1.6).

2. Методика решения. Функционал (1.6) при $e_{ij}^k e_{ij}^k = 0$ недифференцируем [20], и для его минимизации необходимы специальные методы. Воспользуемся подходом, основанном на принципе двойственности [21]. Согласно ему каждый выпуклый собственный полунепрерывный снизу функционал совпадает с верхней гранью всех его непревосходящих функционалов. Рассмотрим второй интеграл (1.6). Можно показать, что он удовлетворяет перечисленным требованиям. Тогда справедливо следующее представление:

$$J_2 = \sigma_0 \int_{-h}^h \int_0^L (2/3 e_{ij}^k e_{ij}^k)^{1/2} dx dz = \max_{s_{ij}^k, s_{ij}^k \leq 2/3 \sigma_0^2} \int_{-h}^h \int_0^L s_{ij}^k e_{ij}^k dx dz \quad (2.1)$$

где s_{ij}^k — произвольные функции, на которые наложено определенное ограничение.

Учитывая (1.1) и (1.3) интегрируем правую часть (2.1) по координате z . После некоторых преобразований имеем

$$J_2 = \max_{s_{ij}^k, s_{ij}^k \leq 2/3 \sigma_0^2} \int_0^L \left[n_1^k \left(\frac{du^k}{dx} + \frac{dv^k}{dx} \frac{dw^{k-1}}{dx} \right) + n_2^k (v^k/R) + m_1^k (-d^2 v^k / dx^2) \right] dx \quad (2.2)$$

$$m_1^k = \int_{-h}^h (s_{11}^k - s_{33}^k) z dz, \quad n_\beta^k = \int_{-h}^h (s_{\beta\beta}^k - s_{33}^k) dz, \quad \beta = 1, 2$$

(не суммировать).

Заметим, что с механической точки зрения (2.1) выражает принцип Мизеса максимума скорости диссипации энергии в жесткопластическом теле [20]. Это означает, что s_{ij}^k , при котором в (2.1) достигается максимум, есть девиатор тензора напряжений. В таком случае n_1^k, n_2^k и m_1^k являются соответственно аксиальным и окружным усилием и изгибаю-

щим моментом (учитывая, что в тонкой оболочке $\sigma_{33}=0$), а ограничение в (2.1) есть условие текучести Мизеса.

Далее следует найти выражение этого условия текучести в пространстве n_1^k, n_2^k, m_1^k . Такая задача решена в [22], но результат представлен в параметрической форме и в предлагаемом алгоритме применение проблематично. В литературе дано много разных приближенных условий текучести для тонких цилиндрических оболочек, находящихся в аксиально симметричных условиях (обзоры см. в [23, 24]). Воспользуемся условием пластичности, основанном на принципе ограниченного взаимодействия между моментами и мембранными усилиями [10]. После введения безразмерных величин это условие можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1, N_2, M_1 \in \Gamma \\ \Gamma = \{N_1, N_2, M_1 | N_1^2 + |M_1| \leq 1, |N_2| \leq 1\} \\ M_1 = \frac{m_1}{M_0}, \quad M_0 = \sigma_0 h^2, \quad N_\beta = \frac{n_\beta}{N_0}, \quad \beta = 1, 2, \quad N_0 = \sigma_0 2h \end{aligned} \quad (2.3)$$

В результате преобразований получаем задачу поиска седловой точки (при соблюдении (1.8)–(1.10)), которую после перехода к безразмерным величинам можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{U^k, V^k} \max_{N_1^k, N_2^k, M_1^k \in \Gamma} \frac{1}{2\Delta T^k} \int_0^1 [(V^k - V^{k-1})^2 + (U^k - U^{k-1})^2 + N_1^k D_1^k + \\ + N_2^k D_2^k + M_1^k A_1^k - P V^k] dX - CF(V^k(0) \sin(\alpha) + U^k(0) \cos(\alpha)) \quad (2.4) \\ D_1^k = C \frac{dU^k}{dX} + 2 \frac{dV^k}{dX} \frac{dW^{k-1}}{dX}, \quad D_2^k = 4BV^k, \quad A_1^k = -\frac{1}{2} \frac{d^2 V^k}{dX^2} \\ W^{k-1} = W^{k-2} + 1/4 G \Delta T^{k-1} (V^{k-2} + V^{k-1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $X = xL^{-1}$, $T = t\tau^{-1}$ — безразмерная координата и время, $V^k = 1/2 mL^2 v^k M_0^{-1} \tau^{-1}$, $U^k = 1/2 mL^2 u^k M_0^{-1} \tau^{-1}$ — безразмерные скорости, $W^k = 1/2 w^k h^{-1}$, $Y^k = 1/2 y^k h^{-1}$ — безразмерные смещения, $B = 1/4 L^2 R^{-1} h^{-1}$, $C = Lh^{-1}$ — геометрические параметры оболочки, $P = 1/2 p L^2 M_0^{-1}$, $F = f N_0^{-1}$ — безразмерные нагрузки, $G = N_0 \tau^2 L^{-2} m^{-1}$ — параметр, характеризующий длительность импульса.

Для нахождения седловой точки (2.4) применяется двухшаговой итерационный алгоритм типа Удзавы [21]:

n-й шаг. Зная $N_{1n}^k, N_{2n}^k, M_{1n}^k$ определяются V_{n+1}^k, U_{n+1}^k , как функции, минимизирующие (2.4) при известных $N_{1n}^k, N_{2n}^k, M_{1n}^k$.

(n+1)-й шаг. Строится $N_{1n+1}^k, N_{2n+1}^k, M_{1n+1}^k$ следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\beta n+1}^k = \Pi_\Gamma(N_{\beta n+1/2}^k), \quad \beta = 1, 2, \quad M_{1n+1}^k = \Pi_\Gamma(M_{1n+1/2}^k) \quad (2.6) \\ N_{\beta n+1/2}^k = N_{\beta n}^k + \gamma D_n^k, \quad \beta = 1, 2, \quad M_{1n+1/2}^k = M_{1n}^k + \gamma A_n^k \end{aligned}$$

где γ — численный параметр, позволяющий оптимизировать скорость сходимости, Π_Γ — оператор проектирования на область Γ , который при Γ , определенном в (2.3), действует следующим образом:

$$\Pi_\Gamma(N_{2n+1/2}^k) = \begin{cases} N_{2n+1/2}^k, & |N_{2n+1/2}^k| \leq 1 \\ N_{2n+1/2}^k / |N_{2n+1/2}^k|, & |N_{2n+1/2}^k| > 1 \end{cases}$$

$$\Pi_{\Gamma}(Q) = \begin{cases} Q, & (N_{1n+\frac{1}{2}}^k)^2 + |M_{1n+\frac{1}{2}}^k| \leq 1 \\ \frac{Q}{|M_{1n+\frac{1}{2}}^k| + [4(M_{1n+\frac{1}{2}}^k)^2 + (N_{1n+\frac{1}{2}}^k)^2]^{\frac{1}{2}}}, & (N_{1n+\frac{1}{2}}^k)^2 + |M_{1n+\frac{1}{2}}^k| > 1 \end{cases}$$

если $Q = N_{1n+\frac{1}{2}}^k, M_{1n+\frac{1}{2}}^k$.

Для решения задачи, соответствующей n -у шагу итерационного алгоритма, проинтегрируем (2.4) по частям. Имеем:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{(V_n^k - V^{k-1})^2 + (U_n^k - U^{k-1})^2}{2\Delta T^k} - \left[2 \frac{d}{dX} \left(N_{1n}^k \frac{dW^{k-1}}{dX} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 M_{1n}^k}{dX^2} - 4BN_{2n}^k + P \right] V_n^k - C \frac{dN_{1n}^k}{dX} U_n^k \right\} dX + \left[\left(\frac{1}{2} \frac{dM_{1n}^k}{dX} + 2N_{1n}^k \frac{dW^{k-1}}{dX} \right) V_n^k - \frac{1}{2} M_{1n}^k \frac{dV_n^k}{dX} + CN_{1n}^k U_n^k \right] \Big|_{x=0}^{x=1} - FC(V_n^k(0) \sin(\alpha) + U_n^k(0) \cos(\alpha)) \quad (2.7)$$

После варьирования (2.7) относительно V_n^k и U_n^k получаем эти функции во внутренних точках интервала $[0, 1]$ в явном виде:

$$\frac{V_n^k - V^{k-1}}{\Delta T^k} = \frac{1}{2} \frac{d^2 M_{1n}^k}{dX^2} + 2 \frac{d}{dX} \left(N_{1n}^k \frac{dW^{k-1}}{dX} \right) - 4BN_{2n}^k + P \quad (2.8)$$

$$\frac{U_n^k - U^{k-1}}{\Delta T^k} = C \frac{dN_{1n}^k}{dX} \quad (2.9)$$

Получаем также граничные условия:
на шарнирно опертом торце

$$V_n^k = 0, \quad M_{1n}^k = 0 \quad (2.10)$$

на защемленном торце

$$V_n^k = 0, \quad \frac{dV_n^k}{dX} = 0 \quad (2.11)$$

на свободном торце

$$M_{1n}^k = 0, \quad \frac{dM_{1n}^k}{dX} = 2F \left(2 \frac{dW^{k-1}}{dX} \cos(\alpha) - C \sin(\alpha) \right) \quad (2.12)$$

на аксиально свободном торце

$$N_{1n}^k + F \cos(\alpha) = 0 \quad (2.13)$$

на аксиально закрепленном торце

$$U_n^k = 0 \quad (2.14)$$

На $n+1$ шаге итерационного алгоритма выполняется условная максимизация (2.4) относительно $N_{1n}^h, N_{2n}^h, M_{1n}^h$ при известных U_n^h, V_n^h (осуществляется движение по градиенту с ограничением на выход из допустимой области (2.3)). Чередование таких шагов продолжается до достижения сходимости, т. е., пока

$$\frac{\|V_{n+1}^h - V_n^h\|}{\|V_n^h\|} \leq \varepsilon, \quad \frac{\|U_{n+1}^h - U_n^h\|}{\|U_n^h\|} \leq \varepsilon \quad (2.15)$$

где ε — требуемая точность, $\|\cdot\|$ — норма в определенном функциональном пространстве.

Для численного решения задачи вводится равномерная разностная сетка и на ней с точностью $O(H^2)$, где H — шаг разбиения, аппроксимируются выражения (2.6), (2.8), (2.9) и соответствующие граничные условия. Для аппроксимации M_1^h на заземленном торце используется (2.11), а для V^h на свободном торце — (2.12).

Численные эксперименты показали, что скорость сходимости алгоритма можно увеличить, если в (2.8) W^{k-1} заменить на W^k . Тогда значения V^h в узлах сетки в явном виде из (2.8) выразить невозможно, и для их определения имеем ленточную систему линейных алгебраических уравнений. Ее решаем методом верхней релаксации.

3. Анализ результатов. По изложенной методике решалось несколько задач. Дискретизация в основном проводилась с шагом $H=0,1$. Шаги ΔT_k брались равными во всех временных интервалах. В расчетах использованы $\Delta T=0,1$ или $\Delta T=0,05$.

Пример 1. Как первая рассматривалась задача равномерно распределенного импульсного нагружения полностью закрепленных коротких ($B=1, C=20$) оболочек. Исследовалась лишь левая половина оболочки. При $X=0,5$ задавались условия симметрии

$$\left. \frac{dV^h}{dX} \right|_{x=0,5} = 0, \quad \left. \frac{dM_1^h}{dX} \right|_{x=0,5} = 0, \quad U^h|_{x=0,5} = 0.$$

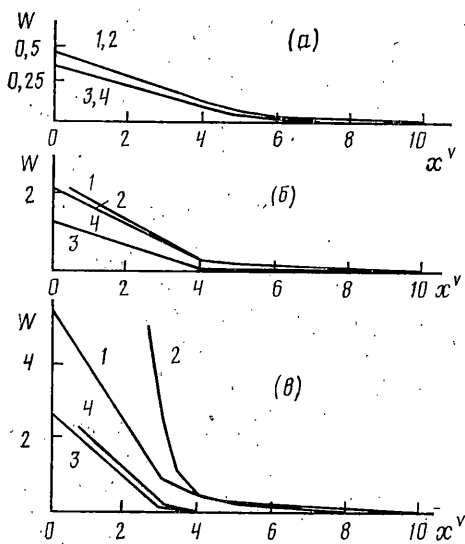
На фиг. 2 приведены зависимости безразмерного остаточного прогиба в середине пролета оболочки от величины $\lambda = \sqrt[4]{1/16 V_0^2 G}$, характеризующей квадрат приложенного импульса (1 — геометрически линейное решение, 2 — нелинейное). Из построенных графиков следует, что изменения геометрии оказывают значительное влияние на деформирование оболочки уже при сравнительно небольших прогибах. Рост прогибов в нелинейном случае сдерживается в связи с возникновением аксиальной растягивающей силы, которая «упрочняет» оболочку.

Для сравнения на фиг. 2 приведено геометрически линейное решение с движущимися шарнирными окружностями из [9] (кривая 3) и нелинейное решение с изломом в центре пролета оболочки из [10] (кривая 4). Различия между кривыми 1 и 3, а также между 2 и 4 незначительны.

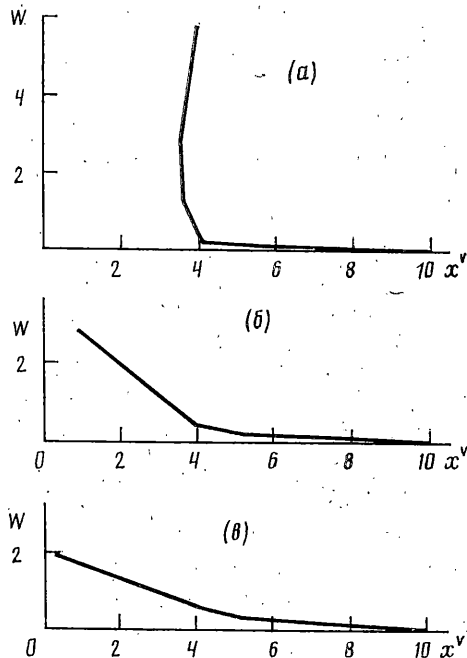
Задачи импульсного нагружения жесткопластических цилиндрических оболочек при умеренных деформациях решались и в [8, 9, 11–14] (при заданной форме распределения скоростей), но там использовались другие условия текучести и поэтому сравнения с ними не проводились.

Пример 2. Исследовано также деформирование цилиндрической оболочки под воздействием на ее свободный левый торец прямоугольных импульсов кольцевой осесимметричной силы.

Сначала рассматривается такая же как выше короткая оболочка ($B=1, C=20$), которая на правом торце шарнирно оперта и в аксиальном направлении закреплена.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 3 представлены остаточные формы такой оболочки (1 — геометрически линейное, 2 — нелинейное решение) после воздействия на нее импульсов радиальной ($\alpha=90^\circ$) силы $F=0,15$ разной длительности τ , характеризующейся параметром G ; а — $G=1,25$, б — $G=2,0$, в — $G=2,5$.

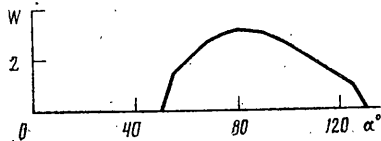
Здесь и далее на оси абсцисс отложена величина $x^v = \frac{1}{2}xh^{-1}$, а на оси ординат — безразмерный прогиб W (с учетом безразмерного аксиального смещения Y). Это обеспечивает одинаковый масштаб для W и Y и позволяет судить о истинной форме деформированной оболочки.

Из фиг. 3 видно, что с увеличением прогибов расхождения между геометрически линейным и нелинейным решениями увеличиваются. Так как торец оболочки свободен, то значительные аксиальные усилия в нелинейном случае здесь не возникают, и эти расхождения в основном связаны с наличием аксиальных смещений в нелинейном решении.

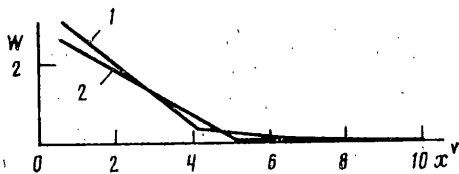
Рассматриваемая задача в геометрически линейной постановке с радиальной силой, используя заданное конусное распределение скорости с движущейся шарнирной окружностью, решена и в [18]. Результат (кривая 3) представлен на фиг. 3 и мало отличается от полученного в настоящей работе геометрически линейного решения (кривая 1).

Далее на фиг. 4 представлены остаточные формы оболочки для разных F (а — $F=0,125$, б — $F=0,175$, в — $F=0,225$) при $\alpha=90^\circ$ и постоянной длительности импульса ($G=0,5$), в геометрически линейной (кривая 1) и нелинейной (кривая 2) постановках. Приведены также кривые, характеризующие форму оболочки в момент времени $T=1$ окончания действия импульса (3 — линейный, 4 — геометрически нелинейный расчет). Видно, что по мере увеличения нагрузки основное деформирование оболочки происходит в инерционной фазе движения.

В геометрически линейной постановке форма прогиба во время действия нагрузки не меняется, и кривая 3 характеризует ее и непосредственно в момент приложения силы. Сравнивая эти кривые на фиг. 4, а — в можно заметить, что при самой меньшей рассмотренной нагрузке $F=0,125$



Фиг. 6



Фиг. 7

излом формы оболочки находится примерно в ее среднем сечении ($x^* \approx 5$). При больших F он ближе к нагруженному торцу. Кривые 1 и 2 показывают, что в последующие моменты времени эта зона интенсивных деформаций смещается вглубь оболочки. К моменту ее остановки, согласно геометрически нелинейному расчету (кривые 2) вне зависимости от F деформации доходят примерно до середины пролета оболочки, и ее правая часть остается недеформированной. Расчеты показывают также, что длительность импульса (параметр G) тоже мало влияет на размер (по координате x^*) области остаточных деформаций.

В [25], используя заданное конусное распределение скорости, решена соответствующая геометрически линейная статическая задача. Координата шарнирной окружности x_*^* вне зависимости от нагрузки в этой работе определяется соотношением $x_*^* \approx 1/2 (R/h)^{1/2}$. В случае $B=1$, $C=20$ получаем $x_*^* = 5$. Это близко к координате излома в выше приведенном решении при нагрузке $F=0,125$ (см. фиг. 4, а), которая близка к предельной и при которой мала роль инерционных эффектов, а также к размеру остаточной деформированной части оболочки практически во всех ранее рассмотренных примерах.

Далее рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 90^\circ$ и внешняя сила кроме радиальной составляющей $F_r = F \sin(\alpha)$ имеет и аксиальную компоненту $F_a = F \cos(\alpha)$. На фиг. 5 приведены остаточные формы оболочек для трех вариантов нагружения — а — $F_a = E$, $F_r = E$; б — $F_a = 0$, $F_r = E$; в — $F_a = -E$, $F_r = E$, где $E=0,15$ при $G=1,25$. Аксиальная растягивающая сила ($F_a < 0$) упрочняет оболочку, уменьшает прогибы и делает ее форму пологой. Деформации в этом случае доходят до закрепленного торца. Сжимающая сила, в свою очередь, увеличивает прогибы и приводит к более резкому излому оболочки.

Следует отметить, что решение, представленное на фиг. 5, а, вообще говоря, требует дополнительной проверки, так как здесь на торце $Y \approx W$, что означает выход из рамок применимости (1.2) использованных кинематических гипотез.

На фиг. 6 приведена зависимость безразмерного прогиба левого торца оболочки от угла α приложения импульса силы $F=0,15$, $G=1,25$. Форму этой кривой в первую очередь определяет пропорциональность прогиба радиальной составляющей нагрузки F_r . Влияние аксиальной компоненты F_a менее выражено и заключается в сдвиге максимума прогибов в сторону сжимающих F_a к $\alpha \approx 80^\circ$. Найдем величину F_r в точках пересечения кривой на фиг. 6 оси абсцисс. Это будут значения предельных радиальных нагрузок при $F_a = \pm 0,15$. Оказывается, что они практически равны между собой. Это значит, что F_a при выбранном условии текучести (2.3) не влияет на величину предельной радиальной нагрузки.

Далее рассмотрим длинную оболочку. Предыдущие результаты позволяют предположить, что из-за того, что деформирование происходит лишь в непосредственной близости от нагруженного торца, удлинение оболочки при сохранении R и h не повлияет на ее поведение, по крайней мере, если $F_a \geq 0$. Подтверждение этого видно на фиг. 7. Рассматривается такая же оболочка, как ранее, только в 5 раз длиннее (для нее $B=25$, $C=100$) под

радиальной нагрузкой $F=0,15$. Кривая 1 соответствует ранее рассчитанной короткой оболочке при $G=1,25$, а кривая 2 — длинной оболочке и представляет собой форму прогиба левого конца этой оболочки в том же масштабе, что и кривая 1. Длинная оболочка простирается до $x^v=50$, но это на рисунке не показано. Для длинной оболочки $G=0,05$. Такое значение G обеспечивает одинаковые продолжительности импульсов τ в обоих случаях. Так как длинная оболочка рассчитывалась с таким же шагом ($H=0,1$) как короткая, то шаг разбиения ее части, показанной на фиг. 7 (кривая 2), в выбранном масштабе в 5 раз больше, чем для короткой оболочки (кривая 1), что очевидно недостаточно. Незначительные различия между кривыми 1 и 2 могут быть обусловлены именно этим.

Из изложенного следует, что в области остаточных прогибов порядка толщины стенки поведение цилиндрической жесткопластической оболочки при воздействии на нее свободный торец импульса кольцевой силы с $F_a \geq 0$ характеризуется краевым эффектом — деформированной оказывается лишь область размера $x_*^v \approx \frac{1}{2}(R/h)^{1/2}$ в непосредственной близости от нагруженного торца. При этом величина x_*^v не зависит от длины оболочки и от параметров импульса силы F и G . Это относится как к геометрически линейному (что полностью согласуется с результатами [18]), так и к нелинейному решению. Размер остаточной деформированной области почти такой же, как в статическом решении [25]. Это связано с тем, что в инерционной фазе движения распределение скоростей в оболочке стремится к такой же форме, как в соответствующей статической задаче.

Учет геометрической нелинейности в рассматриваемой задаче позволяет более точно определить форму деформированной оболочки и решать задачи, где нагрузка имеет и аксиальную составляющую. Влияние этой нелинейности на максимальный прогиб при радиальной нагрузке на свободном торце менее значительно, чем в случае равномерного нагружения полностью закрепленной оболочки.

Разработанная методика расчета позволяет решать задачи и с другими условиями текучести и с системами нагрузок, где априорное задание форм распределения скоростей может оказаться невозможным.

Точность численного решения проверялась, уменьшая шаг разбиения H два раза. Некоторые расхождения прогибов в начальных временных шагах были заметны лишь при $F \geq 0,74$, когда зона излома находилась в интервале $0 < X < H$, но на остаточную форму оболочки это практически не повлияло.

Для проверки точности аппроксимации по времени уменьшалось и ΔT . Выбор $\Delta T < 0,1$ заметно не влиял на результаты в фиксированных моментах времени. Некоторое уменьшение ΔT иногда было необходимо для более точной фиксации момента остановки оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hodge P. G. Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells // J. Mech. Phys. Solids. 1955. V. 3. N. 3. P. 176–188.
2. Hodge P. G. The influence of blast characteristics on the final deformation of circular cylindrical shells // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1956. V. 78. N. 4. P. 617–624.
3. Hodge P. G. The effect of end conditions on the dynamic loading of plastic shells // J. Mech. Phys. Solids 1959. V. 7. N. 4. P. 258–263.
4. Оленев Г. Деформация жесткопластической цилиндрической оболочки при импульсной нагрузке // Уч. зап. Тарт. ун-та. 1982. N. 627. С. 57–65.
5. Jones N., Olivetra J. G. Impulsive loading of a cylindrical shell with transverse shear and rotatory inertia // Intern. J. Solid. and Struct. 1983. V. 9. N. 3. P. 263–279.
6. Колесников С. М., Костриж В. К. Поведение жесткопластической цилиндрической оболочки под действием импульса внешнего давления // Прикл. механика. 1975. Т. 11. N. 7. С. 63–69.

7. *Sankaranarayanan R.* Dynamic response of plastic circular cylindrical shells under lateral and hydrostatic pressures // *J. Aeronaut. Soc. India.* 1962. V. 14. N. 1. P. 1-9.
8. *Курс Ю.* Большие прогибы жесткопластических цилиндрических оболочек при ударной нагрузке // *Учен. зап. Тарт. ун-та.* 1971. N. 277. С. 247-257.
9. *Jones N.* The influence of large deflections on the behavior of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively // *Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.* 1970. V. 37. N. 2. P. 416-424.
10. *Walters R. M.* An approximate study of the dynamic plastic behavior of shells // *Intern. J. Non-linear Mech.* 1972. V. 7. N. 3. P. 255-273.
11. *Stronge W. J.* Lower bound on deformation for dynamically loaded rigid-plastic structures // *Intern. J. Solids and Struct.* 1983. V. 19. N. 12. P. 1049-1063.
12. *Stronge W. J.* Accuracy of bounds of plastic deformation for dynamically loaded plates and shells // *Intern. J. Mech. Sci.* 1985. V. 27. N. 1/2. P. 97-104.
13. *Ploch J., Wierzbicki T.* Bounds for large plastic deformations of dynamically loaded continua and structures // *Intern. J. Solids and Struct.* 1981. V. 17. N. 2. P. 183-195.
14. *Найда А. А.* Несущая способность цилиндрических оболочек, нагруженных импульсным внутренним давлением // *Прикл. механика.* 1984. Т. 20. N. 1. С. 61-66.
15. *Eason G., Shield R. T.* Dynamic loading of rigid-plastic cylindrical shells // *J. Mech. Phys. Solids.* 1955. V. 4. N. 2. P. 53-71.
16. *Кузин П. А.* О динамическом изгибе жесткопластической цилиндрической оболочки // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* 1962. N. 6. С. 88-94.
17. *Кузин П. А.* О динамике жесткопластической цилиндрической оболочки конечной длины // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* 1964. N. 2. С. 105-115.
18. *Кузин П. А., Шапиро Г. С.* О влиянии свободного края на динамический изгиб жесткопластической цилиндрической оболочки // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* 1965. N. 3. С. 84-94.
19. *Шведе А. И.* Применение вариационного принципа для численного расчета процесса динамического деформирования квадратной жесткопластической пластины // *Моделирование физических процессов в сплошных средах.* Рига: Изд-во ЛГУ им. П. Стучки, 1985. С. 122-131.
20. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
21. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольтер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
22. *Ильющин А. А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
23. *Robinson M.* A comparison of yield surfaces for thin shells // *Intern. J. Mech. Sci.* 1971. V. 13. N. 4. P. 345-354.
24. *Sawczuk A.* On plastic analysis of shells // *Theory of shells: Proc. 3th IUTAM Symp., Tbilisi, 1978.* Amsterdam: North Holland Publishing Comp., 1980. P. 27-63.
25. *Eason G., Shield R. T.* The influence of free ends on the loadcarrying capacities of cylindrical shells // *J. Mech. Phys. Solids.* 1955. V. 4. N. 1. P. 17-27.

Рига

Поступила в редакцию
12.VII.1989