

УДК 539.3

© 1991 г.

Я. З. БУРМАН, Б. Я. ЗАРХИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФОРМАМ И ВЕКТОРАМ ЛАНЦОША

Рассматривается задача определения динамической реакции закрепленных и свободных упругих конструкций (конечноэлементных моделей) при гармоническом нагружении на основе разложения по ортогональному базису, состоящему из собственных форм и векторов Ланцоша. Собственные формы составляют часть такого смешанного базиса, характеризующую упруго-массовые свойства модели, а векторы Ланцоша — часть, зависящую как от свойств модели, так и от нагружения. Сочетание в базисе векторов обоих типов позволяет достигать в практических задачах требуемой точности при существенно меньших вычислительных затратах, чем для традиционного разложения по собственным формам. Присутствие в смешанном базисе инвариантной части обуславливает экономию суммарных вычислительных затрат при расчетах для многих случаев нагружения в сравнении с базисом из векторов Ланцоша. Для ускорения сходимости разложения применяется сдвиг в район диапазона возбуждения. Даются рекомендации о соотношении в смешанном базисе числа собственных форм и векторов Ланцоша для практических расчетов конструкций.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача определения динамической реакции упругих конструкций без учета демпфирования под действием гармонической нагрузки. Задача описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений от времени

$$\begin{aligned} Mu''(t) + Ku(t) &= be(t) \\ u(t_0) &= u_0, \quad u'(t_0) = u_0' \end{aligned} \quad (1.1)$$

полученной методом конечных элементов [1–3]. Здесь M и K — соответственно матрицы масс и жесткости конечноэлементной модели конструкции, $u(t)$ и $u'(t)$ — вектор-функции перемещений и ускорений в узлах расчетной сетки, b — вектор формы нагружения, $e(t)$ — скалярная функция, u_0 и u_0' — векторы перемещений и скоростей в начальный момент t_0 .

Матрицы M и K являются симметричными и разреженными матрицами высокого порядка N , составляющего в расчетах реальные конструкций $10^3 \div 10^4$. Матрица жесткости K является положительно определенной для закрепленной конструкции и неотрицательно определенной (вырожденной) для свободной конструкции. Матрица масс M может быть положительно или отрицательно определенной в зависимости от выбора распределения масс в расчетной схеме. Вырожденность матрицы возникает при использовании диагональных матриц масс конечных элементов (матриц сосредоточенных масс) при одновременном неучете инерции для некоторых степеней свободы. Таким образом, матрицы K и M могут быть вырождены одновременно (например, для свободных авиационных конструкций, несущих большие массы, приведенные к узлам расчетной схемы; при этом допустимо пренебречь инерцией вращения для остальных узлов). Способ преодоления вырожденности будет рассмотрен ниже.

2. Проекционный метод. Базис из собственных форм. Один из основных подходов определения динамической реакции конструкций основан

на проекционном методе и предполагает отыскание решения в виде разложения по базису:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}_m \mathbf{v}(t) \quad (2.1)$$

где $\mathbf{Y}_m = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m)$ — прямоугольная матрица размерности $(N \times m)$, составленная из m базисных векторов, $\mathbf{v}(t)$ — новая неизвестная вектор-функция. Такое представление искомой функции позволяет редуцировать исходную систему (1.1) путем проектирования ее на базис \mathbf{Y}_m и получить «малую» систему уравнений относительно $\mathbf{v}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{*m} \mathbf{v}'' + \mathbf{K}_{*m} \mathbf{v} &= \mathbf{Y}_m^T \mathbf{b}_e(t) \\ \mathbf{M}_{*m} &= \mathbf{Y}_m^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_m, \quad \mathbf{K}_{*m} = \mathbf{Y}_m^T \mathbf{K} \mathbf{Y}_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

Размерность m системы (2.2), как правило, много меньше размерности исходной, и интегрирование (2.2) не представляет затруднений. Поэтому основные вычислительные затраты для обсуждаемого подхода приходится на этап построения базиса.

Наиболее распространен на практике выбор базиса из форм свободных колебаний [1–3], определяемых из решения обобщенной алгебраической проблемы собственных значений

$$\mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{Y} \Omega^2 \quad (2.3)$$

соответствующей (1.1); здесь Ω^2 — диагональная матрица собственных чисел. Первые 5–20 частот и форм свободных колебаний представляют, как правило, самостоятельный интерес как информативные интегральные характеристики конструкций, и их определение обычно предшествует определению динамической реакции. Базис \mathbf{Y}_m из первых форм свободных колебаний позволяет вычислять решение задачи (1.1) с удовлетворительной точностью при частотах возбуждения, лежащих в диапазоне низших частот свободных колебаний.

Однако известно, что с ростом частоты возбуждения, а также при сложных формах нагружения сходимость разложения по собственным формам заметно ухудшается. Основная причина этого состоит в неадекватности представления внешнего нагружения в базисе из собственных форм, которые характеризуют лишь жесткостно-массовые свойства модели конструкции и инвариантны к нагружению. Наблюдающаяся на практике медленная и немонотонная сходимость разложения определяет потребность вычисления заметно большего количества форм, чем необходимо для анализа свободных колебаний. Так, известно [4], что для тонкостенных подкрепленных оболочек удовлетворительная точность достигается при удержании в базисе собственных форм, последней из которых отвечает частота, примерно в 3 раза большая частоты возбуждения. Ввиду значительных вычислительных затрат применение такого базиса можно считать оправданным лишь для относительно простых форм нагружения и частот возбуждения, близких к низким собственным частотам, то есть тогда, когда участвующие в разложении и обеспечивающие приемлемую точность, собственные формы представляют и самостоятельный интерес.

Как одну из возможностей улучшения аппроксимации упомянем здесь способ статической коррекции [5–6], состоящий в пополнении базиса из собственных форм вектором упругих смещений \mathbf{z} , который находится из решения соответствующей (1.1) статической задачи

$$\mathbf{K} \mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (2.4)$$

о применении этого способа см. также ¹.

¹ Возкушевский А. В., Пашинина Т. С., Петров В. А., Храпков А. А. Система программ для расчета тонкостенных осесимметричных конструкций // Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1982. Т. 161. С. 11–18.

Приведенные положения иллюстрируются на числовых примерах в п. 6. Далее в работе изложены альтернативные методики построения базиса, основанные на вычислении векторов Ланцоша, позволяющие существенно снизить общие вычислительные затраты. Перед описанием этих методик приведем здесь важный для дальнейшего алгоритм метода Ланцоша решения частичной обобщенной проблемы собственных значений (2.3).

3. Решение обобщенной проблемы собственных значений. Метод Ланцоша. Ввиду упомянутой возможности вырожденности матриц K и M зададим сдвиг по спектру γ [7, 8] и преобразуем (2.3) к виду:

$$K_* Y = M Y \Omega_*^2 \quad (3.1)$$

$$K_* = K - \gamma M \quad (3.2)$$

$$\Omega_*^2 = \Omega^2 - \gamma E \quad (3.3)$$

E — единичная матрица, γ — скаляр. Если γ не совпадает точно с каким-либо собственным числом из (2.3), то матрица K_* не является вырожденной, и поэтому для решения собственной проблемы (2.3) можно применять методы, связанные с факторизацией K_* . После решения (3.1) значения компонент Ω^2 легко восстановить из (3.3).

Решение полной проблемы собственных значений (3.1) при высоких порядках матриц обычно не требуется; на практике необходимо решить частичную проблему собственных значений, то есть отыскать собственные пары (частоты и формы), отвечающие низшим собственным значениям или некоторому их интервалу. Одним из наиболее эффективных методов решения частичной проблемы (3.1) является метод Ланцоша [8, 9]. Алгоритм метода (так называемый простой алгоритм Ланцоша или алгоритм без ортогонализации) для задачи (3.1) имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} 1. r_0 &:= K_*^{-1} d; & 2. \beta_j &:= (r_{j-1}^T M r_{j-1})^{1/2}; & 3. q_j &:= r_{j-1} / \beta_j \\ 4. r_j &:= K_*^{-1} M q_j; & 5. r_j &:= r_j - \beta_j q_{j-1} \\ 6. \alpha_j &:= r_j^T M q_j; & 7. r_j &:= r_j - \alpha_j q_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

d — некоторый стартовый вектор, пункты 2–7 повторяются для $j=1, 2, \dots, m$.

Векторы Ланцоша q_j (столбцы Q_m) в точной арифметике ортогональны относительно матрицы M . В процессе реальных вычислений ошибки округления быстро (через несколько итераций) нарушают это свойство вплоть до появления линейно зависимых векторов. Эффективно поддерживать ортогональность векторов Ланцоша позволяет процедура частичной реортогонализации [10], суть которой состоит в следующем: вводится вектор $W_{j-1} := q_j^T M Q_{j-1}$ и для каждого j алгоритм (3.4) дополняется пунктом

$$8. \quad \beta_{j+1} W_j^T = [W_{j-1}^T \ 1] (T_j - \alpha_j E_j) - \beta_j [W_{j-2}^T \ 1 \ 0] \quad (3.5)$$

Здесь T_j — трехдиагональная симметричная матрица порядка j , диагональные элементы которой — α_j , поддиагональные — β_j , E_j — единичная матрица порядка j . Если наибольший элемент вектора W_{j-1} превышает пороговое значение, в качестве которого можно выбрать $(\epsilon)^{1/2}$, где ϵ — машинная точность [7, 8], то вектор r_{j-1} нужно ортогонализировать относительно M к Q_{j-1} . Процедура частичной реортогонализации гарантирует ортогональность векторов q_j с точностью $(\epsilon)^{1/2}$, что вполне достаточно для практического применения метода Ланцоша [8].

В базисе Q_m векторов Ланцоша проблема собственных значений (3.1) имеет вид

$$T_m X_m = X_m \Omega_*^{m-2} \quad (3.6)$$

где X_m — матрица собственных векторов, Ω_{*m}^{-2} — диагональная матрица собственных значений. Полная проблема собственных значений (3.6) может быть легко решена с помощью QL -алгоритма [7, 8] благодаря трехдиагональности матрицы T_m . Известно, что компоненты Ω_{*m}^{-2} являются приближениями к m собственным значениям проблемы (3.1), а столбцы матрицы $Q_m X_m$ — к собственным векторам Y [8]. Практические расчеты собственных колебаний конструкций демонстрируют быструю сходимость решений (3.6) к решениям (3.1). Так, при расчетах подкрепленных оболочек на каждую сошедшуюся собственную пару затрачивается в среднем 1,5–3 итерации [4].

4. Базис из векторов Ланцоша. Векторы Ланцоша q_j по построению (3.4)–(3.5) представляют собой ортонормированный базис подпространства Крылова [8], образующегося для нашей задачи как линейная оболочка векторов

$$e_1 = K_*^{-1}d, \quad e_2 = K_*^{-1}M_*c_1, \dots, \quad e_m = K_*^{-1}M_*c_{m-1} \quad (4.1)$$

Известны хорошие аппроксимационные свойства подпространства Крылова; на их использовании основан целый ряд методов линейной алгебры [9].

Дадим механическую интерпретацию этих векторов для случая совпадения стартового вектора d с вектором формы нагружения b : вектор e_1 представляет амплитуду упругих перемещений при гармоническом нагружении с формой b , вектор e_2 представляет амплитуду перемещений от гармонического нагружения силами инерции, возникающими при деформировании конструкции согласно вектору e_1 и так далее.

Из (4.1) очевидно, что векторы Ланцоша адекватно характеризуют как жесткостно-массовую модель конструкции, так и нагружение. Это обуславливает быструю сходимость разложения (2.1) в базисе Q_m . При этом важны также более низкие затраты на вычисление одного вектора Ланцоша, чем одной собственной формы (в 1,5–3 раза). Поэтому базис из векторов Ланцоша применительно к задаче определения динамической реакции является естественной альтернативой классическому базису из первых собственных форм.

Использование базиса из векторов Ланцоша для задачи (1.1) предложено в [11, 12]; известно обобщение с введением сдвига для случая свободных конструкций.²

В базисе из векторов Ланцоша Q_m система (3.1) имеет вид:

$$T_m v'' + (E - \gamma T_m) v = \beta_1 I_1 \varepsilon(t) \quad (4.2)$$

где I_1 — первый столбец единичной матрицы E_m . Малая система (4.2) может быть эффективно решена как прямым численным интегрированием, так и разложением по собственным формам X_m соответствующей проблемы (3.6).

Дополнительная возможность снижения вычислительных затрат при построении базиса Q_m состоит в выборе величины сдвига спектра γ . Известно [8], что введение сдвига приводит к тому, что в подпространстве, образованном векторами Ланцоша, представляются в первую очередь собственные формы с круговыми частотами, близкими к $\gamma^{1/2}$. Поэтому, в зависимости от вида функции нагружения $\varepsilon(t)$ можно выбрать величину γ из условия ускорения сходимости разложения (2.1). Так, для рас-

² Заргин Б. Я., Бурман Я. З. К автоматизированному расчету динамической реакции конструкций на основе разложения по векторам Ланцоша. Казань, 1987. — 14 с. Деп. в ВИНТИ, № 8782–В87.

пространенного случая $\varepsilon(t) = \sin \omega_s t$, где $\omega_s \in [\omega_1, \omega_2]$, рационально выбрать

$$\gamma = [(\omega_1 + \omega_2)/2]^2 \quad (4.3)$$

Описанная методика проиллюстрирована на примерах в п. 6.

5. Базис из собственных форм и векторов Ланцоша. Быстрая сходимость разложения (2.1) в базисе Q_m в значительной мере определяется специфичностью векторов Ланцоша по отношению к форме нагружения. Очевидно, что при смене формы нагружения весь набор векторов Ланцоша требуется построить заново, что делает рациональным использование такого базиса лишь при малом числе форм нагружения.

Другой недостаток связан с учетом практически целесообразной последовательности работ при выполнении динамических расчетов конструкций. На практике расчет собственных колебаний обычно предшествует расчету динамической реакции. Найденных же при расчете собственных колебаний 5÷20 первых форм, как правило, недостаточно при определении динамической реакции для всех заданных случаев нагружения путем суперпозиции лишь этих форм. Однако имея в виду содержащуюся в них полезную информацию об упруго-массовых свойствах модели конструкции, а также произведенные вычислительные затраты, весьма выгодным следует признать такой способ построения базиса, который а) учитывал бы эту информацию (т. е. включал бы все или некоторые найденные собственные формы как инвариантную к нагружению группу векторов и, одновременно, б) обеспечивал бы быструю сходимость путем адекватного учета нагружения и реакции модели конструкции (за счет включения векторов Ланцоша).

Такой смешанный базис, включающий инвариантную (собственные формы) и специфичную к нагружению (векторы Ланцоша) части, предложен в [13].³

Процедура построения базиса состоит в вычислении требуемого количества собственных форм (согласно алгоритму метода Ланцоша (2.4) — (2.6)) и вычислении векторов Ланцоша для каждого случая нагружения (по тому же алгоритму). При этом требуется поддерживать M -ортогональность включаемых в базис векторов Ланцоша к ранее включенным собственным формам. Алгоритм (3.4) — (3.5) следует для этой цели дополнить пунктом: ортогонализация по схеме Грамма — Шмидта векторов r_i относительно матрицы M к включенным в базис собственным формам.

После выполнения M -ортогонализации динамическая реакция получается простой суперпозицией по всем векторам смешанного базиса.

Отметим, что описанный способ построения смешанного базиса является обобщением упомянутого способа статической коррекции, который предполагает включение в базис из собственных форм вектора $K^{-1}b$ решения статической задачи (2.4), то есть одного (первого) вектора Ланцоша. Включение же последующих векторов Ланцоша обеспечивает более полный учет динамических свойств модели конструкции и приводит к ускорению сходимости; это показано на примерах в п. 6.

Соотношение количества собственных форм и векторов Ланцоша в базисе, рациональное для экономии вычислительных затрат, зависит от числа случаев нагружения, частотного диапазона возбуждения, а также от наличия предварительно вычисленных собственных форм. Отыскиваемые при анализе свободных колебаний 5÷20 собственных форм могут составить инвариантную часть базиса в случае, когда частота возбуждения превышает последнюю найденную собственную частоту не более чем

³ См. также *Заргин Б. Я., Бурман Я. З.* Определение динамической реакции конструкций на основе разложения по собственным формам и векторам Ланцоша // *Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов: Тез. докл. III Всесоюз. конф.*, Казань: КАИ, 1988. С. 54—55.

в $2,5 \div 3$ раза; сходимость разложения, как правило, достигается за счет $5 \div 20$ векторов Ланцоша при вычислении их с введением сдвига спектра. При вычислении векторов Ланцоша для первого же случая нагружения приведенный алгоритм обеспечит сходимость нескольких собственных форм, включение которых в базис позволит уменьшить число векторов Ланцоша для последующих случаев нагружения. Однако, если частота возбуждения более чем в 3—4 раза превышает последнюю найденную собственную, то вклад в разложение от соответствующих форм является зачастую малым, и включение их в базис не оправдано. В этом случае целесообразно сделать сдвиг спектра $\gamma \approx \omega_b^2$ (или согласно (4.3)), определить несколько собственных форм с частотами, близкими к диапазону возбуждения и, включив их в базис, добиться сходимости разложения за счет векторов Ланцоша.

Если число случаев нагружения с относительно высокими частотами невелико ($2 \div 3$), то рационально не определять предварительно собственные пары, соответствующие диапазону возбуждения, а построить при $\gamma \approx \omega_b^2$ для первого случая базис лишь из векторов Ланцоша. Сопедавшиеся при этом собственные формы можно включить в базис и использовать затем для остальных случаев нагружения.

Хорошие аппроксимационные качества векторов Ланцоша, обеспечивающие быструю сходимость, а также относительно малые затраты по их вычислению позволяют сделать предположение о предпочтительности достижения сходимости в смешанном базисе путем пополнения его векторами Ланцоша. При этом предполагается использование названных приемов повышения эффективности и, в первую очередь, сдвига спектра. Отказ от использования сдвига, то есть $\gamma = 0$, обуславливает ухудшение аппроксимационных свойств базиса (кроме случаев весьма низкочастотного нагружения) и замедление сходимости (помимо затруднений при расчетах свободных конструкций). Более того, применение смешанного базиса без введения сдвига привело автора [13] к рекомендации о включении в базис лишь $1 \div 2$ векторов Ланцоша и достижении сходимости за счет пополнения базиса собственными формами. Такой подход, близкий к способу статической коррекции, менее эффективен в сравнении с обсуждаемым для многих практически важных расчетных ситуаций: при числе случаев нагружения $1 \div 5$ и частотах возбуждения, превосходящих найденные собственные частоты. С увеличением числа случаев нагружения эффективность подхода [13] возрастает, однако и тогда применение сдвига может значительно снизить объем вычислений. Некоторые числовые результаты для сопоставления приведены в п. 6.

6. Примеры. 1. Определялся максимальный динамический прогиб u_{\max} свободной опертой балки под действием сосредоточенной силы $P \sin \omega_b t$, приложенной в центре пролета. Задача имеет аналитическое решение [14]. Расчеты велись для исходных данных: длина — 20 м, погонная масса — 100 кг/м, момент инерции поперечного сечения — $8 \cdot 10^{-5}$ м⁴, модуль упругости — $2 \cdot 10^{11}$ Н/м².

Балка моделировалась с помощью 32 конечных элементов с кубической аппроксимацией прогибов; вращательные степени свободы, наделавшиеся нулевой инерцией, конденсировались по Гайану — Айронсу [1]. Порядок разрешающей системы уравнений после конденсации равнялся 31. Была решена соответствующая полная проблема собственных значений. Результаты исследования сходимости разложения по базису из собственных форм и базису из векторов Ланцоша (построенному при $\gamma = 0$) приведены в табл. 1, где f_b — частота нагружения (Гц), e_1 — погрешность относительно u_{\max}^* — решения из [14], вычисленная по формуле:

$$e_1 = |(u_{\max}^* - u_{\max}) / u_{\max}^*| \quad (6.1)$$

В зависимости от частоты нагружения для каждого значения в табл. 1 дано: в верхней строке — требуемое число базисных векторов в разложении по собственным формам

Таблица 1

e_1	f_b					
	3	10	20	30	50	70
10^{-2}	1	3	5	7	9	9
	1	2	3	4	4	5
10^{-3}	3	7	9	13	15	17
	2	3	4	4	5	7
10^{-4}	7	15	19	27	29	31
	2	3	4	4	5	8
10^{-5}	15	29	31	31	31	31
	3	4	5	6	8	9

Таблица 2

e_1	f_b					
	3	10	20	30	50	70
10^{-2}	1	1	2	3	4	4
	1	1	1	1	1	2
10^{-3}	1	2	3	3	4	5
	1	1	1	1	2	3
10^{-4}	1	2	3	4	5	5
	1	1	1	2	3	5
10^{-5}	2	3	4	5	6	7
	1	1	2	2	3	6

мам, в нижней — по векторам Ланцоша. Первые 7 собственных частот равны соответственно: 1,57; 6,28; 17,1; 25,4; 39,3; 56,5; 77,0 Гц.

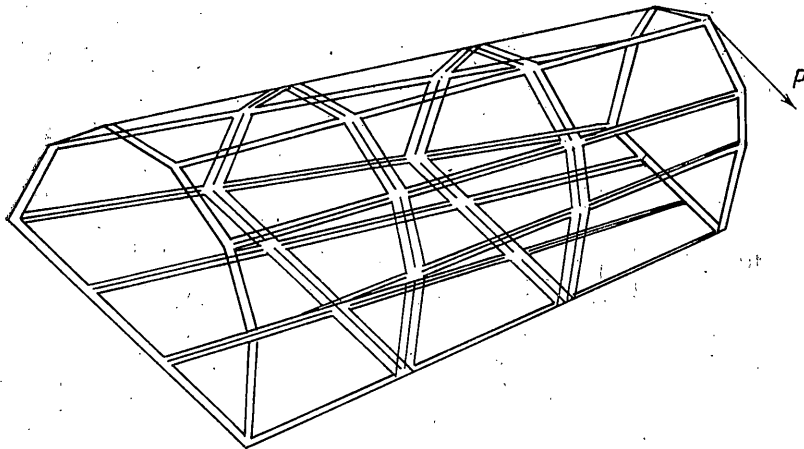
В табл. 2 приведено число векторов Ланцоша при $\gamma=0$, необходимое для достижения точности e_1 в случае смешанного базиса, состоявшего последовательно из первой собственной формы и векторов Ланцоша (верхние строки) и первых трех собственных форм и векторов Ланцоша (нижние строки) при различных частотах нагружения (Гц).

Верхние строки табл. 1 иллюстрируют медленную сходимость разложения по собственным формам даже для столь простого примера: при погрешности $e_1=10^{-4}$ для частоты $f_b=(2\pi)^{-1}\omega_b=20$ Гц число требуемых векторов превышает половину размерности задачи. Рост частоты f_b до 50÷70 Гц требует включения всех собственных форм задачи (полного базиса)! Табл. 1 и 2 демонстрируют существенно лучшую сходимость и меньшие вычислительные затраты при использовании векторов Ланцоша. Группа инвариантных векторов в составе смешанного базиса уменьшает число требуемых векторов Ланцоша (сравн. табл. 2 и нижние строки табл. 1), что дает основание надеяться на снижение суммарных затрат для нескольких случаев нагружения при использовании смешанного базиса в сравнении с эффективным, но специфичным базисом из векторов Ланцоша.

2. Определялась динамическая реакция свободной тонкой подкрепленной оболочкой, представляющей собой идеализацию хвостовой балки вертолета; геометрия оболочки и форма нагружения показаны на фигуре. Частота гармонического нагружения изменялась в диапазоне 100÷300 Гц.

Таблица 3

N	f_b	N	f_b	N	f_b
0÷6	0	15	114,9	30	295,2
7	40,0	20	166,2	35	425,6
10	59,7	25	217,6		



Конечноэлементная модель оболочки образована в соответствии с расширенной расчетной схемой Беляева [3, 15], принятой в строительной механике летательных аппаратов. Использовались диагональные матрицы масс конечных элементов с нулевыми компонентами для вращательных степеней свободы.

Разрешающая система содержала 216 уравнений. Были найдены все частоты и формы свободных колебаний модели. Спектр включал 6 нулевых частот, что обусловлено незакрепленностью конструкции; частоты 102 форм упругих колебаний находились в диапазоне 40÷2852 Гц (некоторые частоты приведены в табл. 3: верхняя строка — номер тона, нижняя — частота (Гц)), еще 108 формам соответствовали бесконечные частоты, отвечающие нулевым диагональным элементам матрицы масс модели.

В верхних строках табл. 4 приведено число «упругих» собственных форм, включенных в базис, начиная с первой, необходимых для получения упругих перемещений с заданной погрешностью, в нижних строках — соответствующее число векторов Ланцоша (вычисленных для значения сдвига γ , заданного по формуле (4.3) и равному $(200 \cdot 2\pi)^2$). Погрешность решения оценивалась по формуле

$$e_2 = (\sum (u_i - u_i^*)^2)^{1/2} / (\sum u_i^{*2})^{1/2} \quad (6.2)$$

где u_i — компоненты найденного вектора перемещений, u_i^* — компоненты «точного» решения, полученного суперпозицией всех 108 упругих собственных форм.

Анализ верхних строк табл. 4 вновь свидетельствует о медленной сходимости в базисе из собственных форм, а также об увеличении числа требуемых собственных форм с ростом частоты нагружения. Также подтверждается быстрая сходимость и малые вычислительные затраты для базиса из векторов Ланцоша; следует отметить рост числа векторов Ланцоша с увеличением отклонения частоты возбуждения ω_b от $\gamma^{1/2}$. При равенстве $\omega_b = \gamma^{1/2} = 200 \cdot 2\pi$ для сходимости достаточно одного вектора (квазистатическое решение).

Табл. 5 аналогична табл. 2 примера 1. Здесь приведены результаты для смешанного базиса из 10 (верхние строки) и 15 (нижние строки) собственных форм и векторов Ланцоша; количество последних, включенных в базис для достижения заданной

Таблица 4

e_2	f_b						
	100	130	170	200	230	270	300
10 ⁻¹	28	28	28	33	33	33	37
	25	24	10	1	8	20	23
10 ⁻²	40	40	40	70	70	90	90
	28	25	14	1	12	23	24
10 ⁻³	103	103	70	107	107	107	107
	30	27	16	1	13	24	26
10 ⁻⁴	107	107	107	107	107	107	107
	32	28	17	1	15	25	27

Таблица 5

e_2	f_b						
	100	130	170	200	230	270	300
10^{-1}	12	10	2	1	2	8	12
	8	3	2	1	2	2	5
10^{-2}	19	15	3	1	3	12	15
	13	5	2	1	2	5	7
10^{-3}	20	16	5	1	5	14	16
	15	8	4	1	4	7	8
10^{-4}	22	18	7	1	7	15	18
	17	10	5	1	5	8	10

Таблица 6

e_2	f_b						
	100	130	170	200	230	270	300
10^{-1}	30	20	10	1	10	20	25
	20	15	8	1	8	15	20
10^{-2}	35	35	30	1	30	35	35
	25	20	15	1	15	20	25
10^{-3}	37	37	37	1	37	40	40
	35	30	20	1	20	30	35
10^{-4}	45	40	40	1	40	60	70
	40	37	30	1	30	37	40

погрешности e_2 для различных частот нагружения f_b (Гц), и дано в таблице. При вычислении базисных векторов обоих типов использовался сдвиг спектра $\gamma = (200 \cdot 2\pi)^2$. Анализ этих результатов показывает, что наличие в базисе инвариантной к нагружению группы собственных форм (особенно вычисленных с введением сдвига) в среднем не приводит к увеличению общего числа базисных векторов по сравнению с базисом из векторов Ланцоша и дает возможность снизить общие затраты при вычислении динамической реакции для нескольких форм нагружения.

Для сопоставления подходов в табл. 6 приведено необходимое для достижения e_2 число собственных форм при наличии в смешанном базисе только одного (верхние строки) или двух (нижние строки) векторов Ланцоша (способ статической коррекции и предложение [13] соответственно). Базис составлялся по следующей схеме: вычислялись собственные формы с использованием сдвига и дополнялись одним или двумя векторами Ланцоша, ортогональными этим формам; затем число форм увеличивалось, векторы Ланцоша строились заново и так до достижения заданной погрешности. Данные табл. 6 демонстрируют значительно лучшую сходимость (особенно при двух векторах Ланцоша) по сравнению с данными табл. 4, полученными для базиса из собственных форм. Однако, сопоставление с табл. 5 определенно говорит о более высоких вычислительных затратах для смешанного базиса с малым числом векторов Ланцоша. Результаты тестирования для многих случаев нагружения не представлены из-за ограниченности объема статьи и могут составить предмет отдельной публикации. Отметим лишь, что тестирование подтвердило высказанное выше положение о предпочтительности достижения сходимости пополнением смешанного базиса векторами Ланцоша, вычисленными при введении сдвига спектра (например, по формуле (4.3)).

Анализ результатов тестирования, а также опыт расчета колебаний весьма сложных натуральных конструкций [4] позволяют рекомендовать метод разложения по смешанному базису из собственных форм и векторов Ланцоша для использования в расчетной практике. Выбор выгодного состава векторов следует определять в зависимости от вида форм и диапазона частот нагружения, наличия предвременно найденных собственных форм. Для одной формы нагружения при отсутствии найденных собственных форм вне конкуренции оказывается базис из векторов Ланцоша. Для 2÷5 форм нагружения рациональным является базис из 10÷15 собственных форм

(низших или найденных при задании сдвига в зависимости от диапазона возбуждения) и $10 \div 15$ векторов Ланцоша, построенных для каждой формы нагружения. Для большего числа форм нагружения эффективен базис из собственных форм и $1 \div 2$ векторов Ланцоша, вычисленных при задании соответствующего сдвига.

7. Учет демпфирования.

Если демпфирование задается посредством матрицы демпфирования C , вводимой в систему уравнений (1.1) $M\dot{u}''(t) + C\dot{u}'(t) + Ku(t) = b\varepsilon(t)$ и представленной в форме Рэлея [1, 2] $C = a_1M + a_2K$ (a_1 и a_2 — произвольные коэффициенты), то малая система, построенная для смешанного базиса, пополняется одним членом. Аналогично может быть учтено демпфирование и в случае представления матрицы C в известной более общей форме [2]:

$$C = M \sum_{j=1}^n a_j (M^{-1}K)^j$$

В тех случаях, когда явное задание матрицы C невозможно, часто применяется введение коэффициентов непосредственно в уравнения малой системы, построенной для базиса из собственных форм [2, 4]; при этом коэффициенты демпфирования задаются в долях от критического для каждой собственной формы. Подобный способ применим и при использовании смешанного базиса, для чего коэффициенты демпфирования следует ввести после разложения соответствующей малой системы по ее собственным формам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бате К., Вильсон Е. Численные методы и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.
2. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
3. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк., 1985. 392 с.
4. Бурман З. И., Артюхин Г. А., Зархин Б. Я. Программное обеспечение матричных алгоритмов и метода конечных элементов в инженерных расчетах. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
5. Hansteen O. E., Bell K. On the accuracy of mode-superposition analysis in structural dynamics // Earthquake Engng. and Struct. Dyn. 1979. V. 7. N5. P. 405–411.
6. Баженов В. А., Гоцуляк Е. А., Кондаков Г. С. Исследование колебаний пластин и оболочек на основе метода криволинейных сеток и редукции базиса // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1986. Вып. 49. С. 6–8.
7. Уилкинсон Дж., Райли К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 390 с.
8. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений: Численные методы. М.: Мир, 1983. 382 с.
9. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
10. Simon H. D. The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization // Math. of Comput. 1984. V. 42. N. 165. P. 115–142.
11. Wilson E. L., Yuan M., Dickens J. M. Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors // Earthquake Engng and Struct. Dyn. 1982. V. 10. N 6. P. 813–821.
12. Nour-Omid B., Clough R. Dynamic analysis of structures using Lanczos co-ordinates // Earthquake Engng and Struct. Dyn. 1984. V. 12. N 4. P. 565–577.
13. Клайн К. А. Исследование динамического поведения конструкций с помощью усеченного базиса из собственных форм и векторов Ритца // Аэрокосмическая техника. 1987. N 6. С. 168–177.
14. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1980. 616 с.
15. Бурман З. И., Аксенов О. М., Лукашенко В. И., Тимофеев М. Т. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.

Казань

Поступила в редакцию
3.XI.1989