

УДК 539.3

© 1991 г.

Л. И. СТАЦЕНКО, В. П. ШЕВЧЕНКО

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ И УПРУТОГО РЕБРА

Напряженно-деформированное состояние изотропных оболочек с разрезами (трещинами), упругими включениями (ребрами) рассматривалось в [1-3]. Как правило, эффективные результаты получены для цилиндрических оболочек и пластин. В общем случае оболочки произвольной гауссовой кривизны таких исследований нет. В данной работе предложена методика получения системы сингулярных интегродифференциальных уравнений для оболочки произвольной кривизны с трещиной и стрингером вдоль координатных осей. В основу положены метод двумерного интегрального преобразования Фурье и теория обобщенных функций. Полученная система решена численно по схеме метода Мультипона [4]. Исследовано влияние геометрических и физических параметров оболочки на коэффициенты интенсивности усилий и моментов вблизи концов концентраторов напряжений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругое равновесие тонкой изотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны, срединная поверхность которой отнесена к системе криволинейных ортогональных координат  $x, y$ , совпадающих с направлениями главных кривизн. Оболочка ослаблена прямолинейной трещиной ( $a \leq y \leq b, x=0$ ) и содержит подкрепляющий элемент в виде упругого ребра длины  $2L$  и толщины  $2h_0$  по оси  $Ox$  ( $|x| \leq L, y=0$ ) (фиг. 1). Материалы оболочки и ребра обладают различными упругими свойствами. Предполагаем, что ребро тонкое, непрерывно соединено с оболочкой вдоль линии, лишено изгибной жесткости и работает только на растяжение — сжатие. Оболочка находится под действием внешней самоуравновешенной нагрузки.

Граничные условия на линии разреза запишем в виде

$$T_1(0, y) = M_1(0, y) = S(0, y) = Q_1(0, y) = 0 \quad (1.1)$$

Из симметрии задачи относительно оси  $Oy$  для скачков перемещений и усилий будем иметь

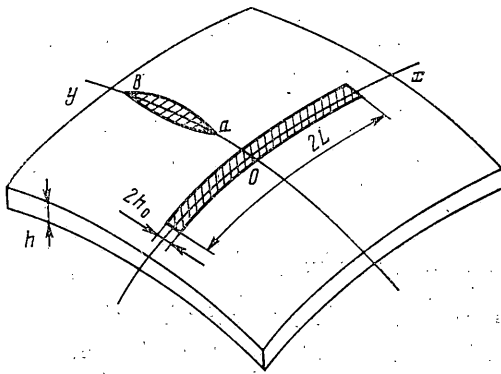
$$[v(0, y)] = [w(0, y)] = [\gamma_2] = 0, \quad [T_2] = [M_2] = [Q_2] = 0 \quad (1.2)$$

Квадратными скобками здесь и далее будем обозначать скачок соответствующей величины при переходе через линию трещины или включения со стороны внешней нормали. Включение в оболочке будем моделировать линией разрыва контактных усилий  $S$ . Для перемещений на берегах включения будем считать

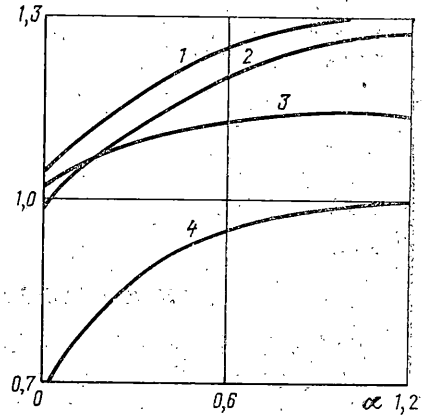
$$[u] = [v] = [w] = 0 \quad (1.3)$$

Условие равновесия любой конечной части ребра запишем в виде

$$\begin{aligned} h[S] dx + N(x+dx) - N(x) &= 0 \\ N(x) &= E_0 S_0 \varepsilon^0, \quad \varepsilon^0 = \varepsilon = \partial u / \partial x + k_1 w \end{aligned} \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $N$  — нормальная растягивающая сила в сечении ребра,  $\epsilon^0$  — его относительная деформация.

2. Система сингулярных интегродифференциальных уравнений. Поставленную задачу сведем к решению системы сингулярных интегродифференциальных уравнений. С этой целью получим интегральные представления внутренних силовых величин. Все преобразования, связанные с их построением, удобнее проводить в пространстве трансформант Фурье, используя теорию обобщенных функций и двумерное интегральное преобразование Фурье. В данном случае в пространстве трансформант получим:

$$T_1 \sim (\xi, \eta) = T_1^0 \sim + \int_a^b (K_{11} \sim f + K_{12} \sim g) e^{i\eta y} dy + \int_{-L}^L K_{13} \sim \mu e^{i\xi x} dx \quad (2.1)$$

$$M_1 \sim (\xi, \eta) = M_1^0 \sim + \int_a^b (K_{21} \sim f + K_{22} \sim g) e^{i\eta y} dy + \int_{-L}^L K_{23} \sim \mu e^{i\xi x} dx$$

$$f = -Eh(-i\eta) [u] / 2\pi, \quad g = -D(1-\nu)(3+\nu)(-i\eta) [\gamma_1] / 2\pi, \quad \mu = [S] / 2\pi$$

Здесь  $K_{ij} \sim (\xi, \eta)$  ( $i, j=1, 3$ ) — трансформанты ядер интегральных представлений,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Или в развернутом виде

$$\begin{aligned} K_{11} \sim &= i\eta^3 / (\xi^2 + \eta^2)^2 - k^4 i \eta^3 (\xi^2 + \lambda \eta^2) / (\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta \\ K_{12} \sim &= k^2 \kappa i \eta (\xi^2 + \nu \eta^2) (\xi^2 + \lambda \eta^2) / (1-\nu)(3+\nu) \Delta \\ K_{13} \sim &= -k^4 i \xi \eta^2 (\xi^2 + \lambda \eta^2) \Delta_1 / (\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta + i \xi ((1-\nu) \xi^2 + \\ &+ (2-\nu(1+\nu)) \eta^2) / (\xi^2 + \eta^2)^2 / (1-\nu) \\ K_{21} \sim &= -k^2 i \eta (\xi^2 + \nu \eta^2) (\xi^2 + \lambda \eta^2) / \kappa \Delta \\ K_{22} \sim &= i \eta (2\xi^2 + (1+\nu) \eta^2) / (3+\nu) (\xi^2 + \eta^2)^2 + k^4 i (\xi^2 + \\ &+ \nu \eta^2)^2 (\xi^2 + \lambda \eta^2)^2 / \eta \Delta (\xi^2 + \eta^2)^2 \\ K_{23} \sim &= -k^2 i \xi \Delta_1 (\xi^2 + \nu \eta^2) / \kappa \Delta \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $k^4 = 12(1-\nu^2)/R_2^2 h^2$ ,  $\lambda = R_2/R_1$ ,  $\kappa = k^2 R_2 h$ ,  $\Delta = (\xi^2 + \eta^2)^4 + k^4 (\xi^2 + \lambda \eta^2)^2$ ,  $\Delta_1 = (\lambda + \nu) \xi^2 + (2\lambda + \lambda\nu - 1) \eta^2$ .

Перепишем также в пространстве трансформант условие (1.4) — равновесия любой конечной части ребра

$$\frac{h}{E_0 S_0} \int_{-L}^{x'} \mu e^{i\xi x} dx + \int_a^b (K_{31} \sim f + K_{32} \sim g) e^{i\eta y} dy - \int_{-L}^L K_{33} \sim \mu e^{i\xi x} dx = -c_1 T_1^0 \sim$$

$$\begin{aligned}
K_{31} &\sim k^4 i \eta (\xi^2 + \lambda \eta^2) \Delta_3 / (\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta \\
K_{32} &\sim -k^2 \kappa i (\xi^2 + \nu \eta^2) \Delta_3 / (1 - \nu) (3 + \nu) \eta \Delta \\
K_{33} &\sim -k^4 i \xi \Delta_1 \Delta_3 / (\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta \\
\Delta_3 &= \xi^2 \Delta_1 - \lambda (\xi^2 + \eta^2)^2, \quad c_1 = E h / E_0 h_0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) и условию (2.3), получим разрешающую систему уравнений в пространстве трансформант Фурье, к которой применим формулу обращения для двумерного преобразования Фурье. В результате в пространстве оригиналов получим систему трех сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами типа Коши:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (K_{11}(0, y' - y) f(y) + K_{12}(0, y' - y) g(y)) dy + \int_{-L}^L K_{13}(-x, y') \mu(x) dx = \\
&\quad = -T_1^0(0, y') \\
&\int_a^b (K_{21}(0, y' - y) f(y) + K_{22}(0, y' - y) g(y)) dy + \int_{-L}^L K_{23}(-x, y') \mu(x) dx = \\
&\quad = -M_1^0(0, y') \\
&c_1 \int_{-L}^{x'} \mu(x) dx + \int_a^b (K_{31}(x', -y) f + K_{32}(x', -y) g) dy + \\
&\quad + \int_{-L}^L K_{33}(x' - x, 0) \mu dx = -c_1 T_1^0(x', 0)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В системе (2.4) перейдем к безразмерным параметрам  $t, \tau$ :

$$x = Lt, \quad y = (a+b)/2 + \tau(b-a)/2 \tag{2.5}$$

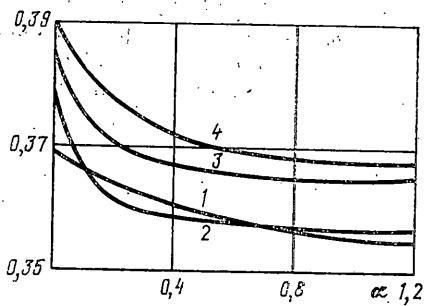
С учетом (2.5) выпишем в качестве примера явное выражение ядра  $K_{11}$ :

$$\begin{aligned}
K_{11} &= -\frac{1}{2} (\tau - \tau') - k^2 d^2 |\tau' - \tau| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} K_{11mn} g e^{i n_{n+m-1} \times} \\
&\quad \times (\sqrt{i k d} |\tau' - \tau|) / m!
\end{aligned} \tag{2.6}$$

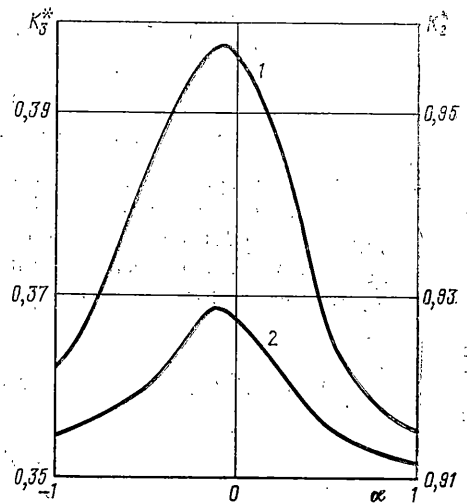
где коэффициенты  $K_{11mn}(\lambda)$  представлены в интегральной форме

$$K_{11mn}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - |\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta|)^m |\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta| \sin(2n-1)\theta \sin \theta d\theta$$

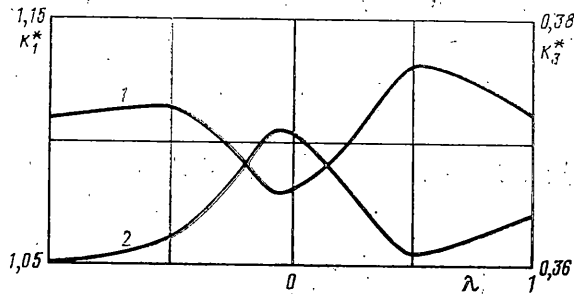
В случае оболочек положительной кривизны коэффициенты  $K_{11mn}$  можно вычислить с помощью присоединенных функций Лежандра, для отрицательной и нулевой гауссовой кривизны они могут быть вычислены соответственно на основе рекомендаций работы [5] и методики, изложенной в [6]. Здесь эти коэффициенты для оболочек произвольной кривизны вычислены на ЭВМ с помощью квадратурных формул для функций вида  $F(x) \cos px, F(x) \sin px$ .



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

Полученная система (2.4) с дополнительными условиями однозначности перемещений, углов поворота и контактных усилий

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 g(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \mu(t) dt = 0 \quad (2.7)$$

имеет единственное решение в классе функций, неограниченных на концах отрезка  $[-1; 1]$ .

Коэффициенты интенсивности усилий и моментов запишем в явном виде на решении системы (2.4), (2.7):

$$K_1 = -d^{1/2} \lim_{\tau \rightarrow \pm 1} (1-\tau^2)^{1/2} f(\tau)/2, \quad K_2 = -d^{1/2} \lim_{\tau \rightarrow \pm 1} (1-\tau^2)^{1/2} g(\tau)/2$$

$$K_3 = (1+\nu)L^{1/2} \lim_{t \rightarrow \pm 1} (1-t^2)^{1/2} \mu(t)/2 \quad (2.8)$$

где  $K_1, K_2$  — соответственно коэффициенты интенсивности усилий и моментов вблизи концов трещины,  $K_3$  — коэффициент интенсивности усилий вблизи концов включения.

Аналитическое решение системы сингулярных интегродифференциальных уравнений вида (2.4), (2.7) даже в простейших случаях сферы и цилиндра практически невозможно из-за сложной структуры ядер  $K_{ij}$  ( $i, j=1, 3$ ). В настоящей работе система решена численно с помощью метода Мультиппа [4].

3. Результаты расчетов. С использованием ЭВМ проведены численные исследования коэффициентов  $K_1, K_2, K_3$  в зависимости от геометрических и физических параметров оболочки и концентраторов напряжений. На фиг. 2 изображено изменение коэффициента интенсивности усилий  $K_1^* = K_1 / T_1^0 |d|^{1/2}$  в зависимости от параметра  $\alpha = a/(b-a)$  (расстояния между трещиной и ребром). Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $\nu = 1/3$ ;  $h/R_2 = 0,01$ ;  $\beta_1 = 2$ ;  $\beta_2 = 2$ ;  $E/E_0 = 0$ . Кривая 1 соответствует сферической оболочке, 2 — псевдосферической, 3 — цилиндрической, 4 — пластине. Из графиков фиг. 2 видно, что эффект подкрепления трещины ребром становится заметным для  $\alpha \leq 1$ . Соответствующее изменение коэффициента интенсивности усилий  $K_3^* = K_3 / T_1^0 |L|^{1/2}$  вблизи концов ребра (при тех же значениях параметров) показано на фиг. 3. При  $\alpha \leq 1$  ребро воспринимает часть нагрузки с трещины.

На фиг. 4 изображено изменение коэффициентов  $K_1^*$  и  $K_3^*$  (соответственно кривые 1, 2) в зависимости от безразмерного параметра кривизны  $\lambda = R_2/R_1$ . При этом считалось  $\nu = 1/3$ ;  $h/R_2 = 0,01$ ;  $\beta_1 = 2$ ;  $\beta_2 = 2$ ;  $\alpha = 0,2$ . Из графиков фигуры следует, что для  $|\lambda| \leq 1$  происходит выравнивание значений коэффициента  $K_1^*$  вблизи концов трещины с одновременным увеличением значений  $K_3^*$  вблизи концов включения.

Достоверность полученных результатов проверялась сопоставлением с различными частными решениями задач о трещинах, включениях в пластинах и оболочках [1, 2, 7]. Эти частные случаи можно получить, полагая  $\alpha \ll 1$  (исключая взаимное влияние концентраторов напряжений) или же рассматривая только плоские части в ядрах интегральных представлений (2.2). Так, например, на фиг. 5 показано влияние кривизны оболочки на значения коэффициентов интенсивности усилий и моментов. Здесь кривая 1 соответствует напряженному состоянию оболочки с разрезом при моментной нагрузке, а кривая 2 — напряженному состоянию оболочки с абсолютно жестким ребром при мембранной нагрузке. При  $\nu = 1/3$ ;  $h/R_2 = 0,01$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 2$ . Анализ приведенных графиков показывает, что параметр  $\lambda$  существенным образом влияет на значения коэффициентов интенсивности усилий  $K_3^*$  и моментов  $K_2^* = K_2 / M_1^0 |d|^{1/2}$  вблизи концов концентраторов напряжений. Сравнивая поведение кривых фиг. 5, убеждаемся в статико-геометрической аналогии (сопряженности) задачи о полой оболочке со свободным разрезом и задачи для оболочки с абсолютно жестким включением. Введя поправочный множитель  $A = 3 - \nu$ , можно по известному решению основной задачи получить решение сопряженной. Кроме того, соотношения статико-геометрической аналогии являются надежным средством контроля на всех этапах исследования напряженно-деформированного состояния оболочек с абсолютно жестким ребром.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цванг В. А., Шевченко В. П. Изотропная оболочка произвольной кривизны с прямолинейной трещиной // Теор. и прикл. механика. Киев-Донецк: Вища шк., 1981. Вып. 12. С. 60–65.
2. Грелицкий Д. В., Опанасович В. К., Шацкий И. П. Напряженное состояние полой оболочки с тонким упругим включением // Тр. 13-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ч. II. Таллинн: ТПИ, 1983. С. 23–28.
3. Фильштинский Л. А., Любчик В. А. Эффект подкрепления ребрами жесткости анизотропной оболочки с разрезами // ФХММ. 1984. Т. 20. № 1. С. 43–58.
4. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
5. Величко П. М., Хиженяк В. К., Шевченко В. П. Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны // Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1975. С. 34–41.
6. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. К вопросу о действии сосредоточенных воздействий на пологие оболочки // Концентрация напряжений. Киев: Наук. думка, 1965. С. 326–337.
7. Greif R., Sanders J. L. The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1965. Vol. 32. № 1. P. 59–66.

Донецк

Поступила в редакцию  
25.X.1989