МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3

А. Д. ПАНТЕЛЕЕВ

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПО МЕХАНИЧЕСКИМ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

Работа посвящена разработке оптимального проекта трехслойных оболочек с учетом механических и радиотехнических требований.

Полагается, что рассматриваемая оболочка со слоями постоянной толщины, выполненными из композиционных диэлектрических материалов, облучается плоской линейно-поляризованной электромагнитной волной и выполняет функции как радиотехнической, так и силовой конструкции.

Физический смысл задачи состоит в нахождении толщин несущих слоев d_1, d_3 и заполнителя d_2, при которых оболочка удовлетворяет принятому критерию качества и заданным ограничениям, учитывающим весь комплекс предъявляемых требований. Таким образом, алгоритм решения оптимальной задачи предусматривает расчет механических и электрических характеристик рассматриваемой оболочки.

1. Электрический расчет. С точки зрения радиотехники, качество оболочки оценивается величиной энергии, переносимой электромагнитной волной, при ее прохождении через диэлектрическую стенку. В свою очередь количество трансформируемой энергии характеризуется комплексным коэффициентом прохождения, расчет которого осуществляется, основываясь на приближении геометрической оптики [1]. В рамках этой модели падающая волна заменяется системой параллельных лучей. При этом предполагается, что в точке встречи луча с поверхностью оболочки отражение и прохождение луча происходит так же, как и для плоской границы раздела. Указанная модель дает хорошие результаты, если радиус кривизны стенки в 1,5–2 раза больше длины волны λ_0 в свободном пространстве, что в большинстве практических случаев выполняется.

Исходя из вышесказанного, основываясь на результатах [1], коэффициенты прозрачности и отражения по энергии определяются из волновой матрицы трансформации $[T_{1-3}]$ для рассматриваемой трехслойной стенки. При этом матрица $[T_{1-3}]$ представляется в виде произведения соответствующих матриц трансформации для каждого из слоев, входящих в трехслойный пакет, т. е.

$$[T_{1-3}]=[T_1][T_2][T_3]=[c_{ij}] \tag{1.1}$$

Каждая $[T_j]$ из (1.1) выражается в виде

$$[T_j]=(1-r_j^2)^{-1}\begin{bmatrix} e(\alpha)-r_j^2e(-\alpha) & r_je(\alpha)[1-e(-2\alpha)] \\ rje(\alpha)[1-e(-2\alpha)] & -r_j^2e(\alpha)+e(-\alpha) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

где $e(\alpha)=\exp(i\varphi_j)$; φ_j — электрическая толщина соответствующего диэлектрического слоя; r_j — коэффициент отражения от границы j-го слоя со стороны падающей волны.

Выражения для r_j и φ_j приведены в [1] и зависят от диэлектрической проницаемости ε_j, тангенса угла активных потерь $\operatorname{tg}\delta_j$ материала j-го слоя, от толщины d_j и угла падения волны β на стенку оболочки. Построив по указанному алгоритму волновую матрицу трансформации $[T_{1-3}]$, найдем коэффициенты прозрачности T и R [1]:

$$T(\mathbf{d}, \beta)=1/c_{11}, \quad R(\mathbf{d}, \beta)=C_{21}/C_{11} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{d}=(d_1, d_2, d_3)$ — вектор толщины.

2. Расчет механических характеристик. При решении задачи механики в качестве исследуемого объекта принимаем оболочку вращения, полагая, что последняя подвержена внешнему силовому статическому воздействию. Ее несущую способность будем оценивать по напряженному состоянию и критической силе, при которой происходит потеря устойчивости.

Решение соответствующих задач о напряженном состоянии и устойчивости оболочек в линейной постановке сводится к решению уравнений

$$A\omega=g, \quad A\omega=\lambda B\omega \tag{2.1}$$

где g — поверхностная нагрузка; A — линейный дифференциальный оператор, порожденный энергией деформации оболочки; B — дифференциальный оператор, характеризующий докритическое напряженное состояние в оболочке; $\omega=(u_1, v_1, u_3, v_3, w)$ — вектор-функция, компоненты которой представляют перемещения точек срединных поверхностей наружного $\omega_1=(u_1, v_1, w)$ и внутреннего $\omega_3=(u_3, v_3, w)$ слов оболочки. Тангенциальные перемещения точек заполнителя u_2, v_2 из условия контакта на границе слоев выражаются через компоненты ω_1 и ω_3. Кроме того принято, что w для всех слоев одинаково.

Связывая задачу устойчивости с решением второго уравнения (2.1), мы отождествляем критическую нагрузку, при которой оболочка теряет устойчивость, с наименьшим положительным собственным значением λ_1 в задаче на собственные значения $A\omega=\lambda B\omega$. При этом собственная функция ω, соответствующая λ_1, представляет форму потери устойчивости.

В качестве расчетной модели при решении уравнений (2.1) принимается трехслойный пакет несимметричного по толщине строения с несущими ортотропными слоями и легким заполнителем. Для всего пакета применима гипотеза ломаной нормали. Следуя идеологии [2] и используя результаты [3, 4], операторы A и B из (2.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}(A\omega', \omega'')=\sum_{i=1,3}\iint_{\Omega}\Big\{& d_i[B_{11}^{(i)}\varepsilon_1(\omega_i')\varepsilon_1(\omega_i'')+B_{12}^{(i)}(\varepsilon_1(\omega_i')\varepsilon_2(\omega_i'')+\\ &+\varepsilon_2(\omega_i')\varepsilon_1(\omega_i''))+B_{22}^{(i)}\varepsilon_2(\omega_i')\varepsilon_2(\omega_i'')+G_{12}^{(i)}\gamma(\omega_i')\gamma(\omega_i'')]+\\ &+\frac{d_i^3}{12}[B_{11}^{(i)}\varkappa_1(\omega_i')\varkappa_1(\omega_i'')+B_{12}^{(i)}(\varkappa_1(\omega_i')\varkappa_2(\omega_i'')+\varkappa_2(\omega_i')\varkappa_1(\omega_i''))+\\ &+B_{22}^{(i)}\varkappa_2(\omega_i')\varkappa_2(\omega_i'')+4G_{12}^{(i)}\tau(\omega_i')\tau(\omega_i'')]\Big\}H_z^{(i)}H_\theta^{(i)}\,dz\,d\theta+\\ &+\iint_{\Omega} d_2[G_{13}\varepsilon_{13}(\omega_1', \omega_3')\varepsilon_{13}(\omega_1'', \omega_3'')+\\ &+G_{23}\varepsilon_{23}(\omega_1', \omega_3')\varepsilon_{23}(\omega_1'', \omega_3'')]H_z^{(2)}H_\theta^{(2)}\,dz\,d\theta\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}(B\omega', \omega'')=\sum_{i=1,3}\iint_{\Omega}\Big[&\frac{T_{11}^{(i)}}{H_z^{(i)}}\frac{\partial w'}{\partial z}\frac{\partial w''}{\partial z}+\frac{T_{ee}^{(i)}}{H_\theta^{(i)}}\frac{\partial w'}{\partial\theta}\frac{\partial w''}{\partial\theta}+\\ &+\frac{T_{1r}^{(i)}}{H_z^{(i)}H_\theta^{(i)}}\left(\frac{\partial w'}{\partial\theta}\frac{\partial w''}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial z}\frac{\partial w''}{\partial\theta}\right)\Big]H_z^{(i)}H_\theta^{(i)}\,dz\,d\theta\end{aligned} \tag{2.3}$$

Выражения для деформаций и коэффициентов Ламе H_z, H_θ приведены в [5]. Входящие в (2.3) усилия $T^{(i)}_{mn}$, действующие в срединных поверхностях несущих слоев, определяются из решения задачи о напряженном состоянии оболочки при единичной нагрузке.

Для решения уравнений (2.1) и связанных с ними задач о напряженном состоянии и устойчивости, на множестве функций ω, обладающих необходимой степенью гладкости и удовлетворяющих условиям закрепления оболочки, образуем энергетическое пространство [2]. Следуя [6], выделим в энергетическом пространстве последовательность конечномерных подпространств, представляющих тензорное произведение кубических сплайнов по координате z и тригонометрических функций по θ. Из приведенных в [6] результатов следует, что приближенные решения задачи (2.1), построенные с помощью указанной аппроксимации, сходятся к точному решению.

3. Задача оптимизации. Назовем $\mathbf{d}=(d_1, d_2, d_3)$ вектором проектируемых переменных и определим допустимое множество векторов

$$G=\{\mathbf{d}\,|\,d_i^-\leqslant d_i\leqslant d_i^+,\ F(\mathbf{d})\geqslant 1,\ \Psi_n(\mathbf{d}, M)\leqslant 1,\ |T(\mathbf{d}, \beta)|\geqslant T^-, \\ |R(\mathbf{d}, \beta)|\leqslant R^+,\ \beta^-\leqslant\beta\leqslant\beta^+,\ n=1, \ldots, K\} \tag{3.1}$$

Здесь d_i^-, d^+, β^-, β^+, T^-, R^+ — положительные постоянные, назначаемые исходя из конструктивных, технологических особенностей материала и эксплуатационных требований, предъявляемых к объекту; $F(\mathbf{d})$ — функция, представляющая нормированное к допустимому значение критической силы; $\Psi_n(\mathbf{d}, M)$ — безразмерные функции, характеризующие напряженное состояние оболочки, ее деформации, перемещения в точке $M(z, \theta, h)$ или ее вес (h — координата по нормали к срединной поверхности). В последнем случае, конечно, точка M не является аргументом соответствующей функции.

Обозначая через $f(\mathbf{d})$ функцию цели, и, полагая, что допустимое множество (3.1) не пустое, задача оптимизации формулируется как задача нелинейного программирования об отыскании вектора $\mathbf{d}^*=(d_i^*)$ такого, что

$$\mathbf{d}^*\in G,\quad f(\mathbf{d}^*)=\operatorname{ext} f(\mathbf{d}) \tag{3.2}$$

Здесь $\operatorname{ext} f(\mathbf{d})$ обозначает экстремальное значение $f(\mathbf{d})$ — минимум или максимум в зависимости от смысла задачи. Представленные в (3.1) неравенства налагают ограничения на геометрические размеры слоев, механические и радиотехнические характеристики.

Для каждой конкретной задачи конкретизируется вид функций Ψ_n и f. При этом какая-либо из функций Ψ_n может выступить в роли критерия качества. В этом случае она исключается из множества G.

Для решения оптимальной задачи (3.1), (3.2) использовался метод штрафных функций [7]. При этом последовательность штрафных функций, учитывающая ограничения (3.1), представляется в виде

$$P_m(\mathbf{d})=a_1^m(1+\operatorname{sign} T_*)T_*^2+a_2^m(1+\operatorname{sign} R_*)R_*^2+a_3^m(1+\operatorname{sign} F_*)F_*^2+ \\ +a_4^m\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\left[1-(-1)^j\operatorname{sign} d_i^{(j)})(d_i^{(j)})^2+\sum_{n=1}^{K}\delta_n^m(1+\operatorname{sign}\Psi_{*n})\Psi_{*n}^2\right] \tag{3.3}$$

$$T_*=T^- -|T(\mathbf{d}, \beta)|,\quad R_*=|R(\mathbf{d}, \beta)|-R^+,\quad F_*=1-F(\mathbf{d}) \\ \Psi_{*n}=\Psi_n(\mathbf{d}, M)-1,\quad d_i^{(1)}=d_i^- -d_i,\quad d_i^{(2)}=d_i-d^+ \tag{3.4}$$

С учетом (3.3) модифицированная функция цели имеет вид $f_m^\vee(\mathbf{d})=f(\mathbf{d})+$ $+p_m(\mathbf{d})$, а решение задачи (3.1), (3.2) заменяется решением последовательности задач на безусловный экстремум

$$f_m^{\vee}(\mathbf{d}^*)=\operatorname{ext} f_m^{\vee}(\mathbf{d}) \tag{3.5}$$

При этом числовые последовательности из (3.3) $\{a_i^m\}$ и $\{\delta_n^m\}$ положительные и монотонно возрастающие, если отыскивается $\inf f_m^{\vee}(\mathbf{d})$, и отрицательные монотонно убывающие, если отыскивается $\sup f_m^{\vee}(\mathbf{d})$. Для решения задачи (3.5) использовался метод покоординатного спуска.

В качестве примера рассмотрена замкнутая цилиндрическая оболочка, шарнирно опертая по торцам, нагруженная по боковой поверхности равномерно распределенным внешним давлением постоянной интенсивности $g=\mathrm{const}$, облучаемая плоской линейно-поляризованной электромагнитной волной. Электрический расчет выполнен для двух вариантов: центральный луч падает на стенку оболочки при фиксированном значении $\beta=0$ и угол сканирования изменяется от 0 до $\pi/6$.

При решении оптимальной задачи в качестве функции цели принят вес оболочки. Таким образом, с точностью до постоянной

$$f(\mathbf{d})=f_0/\{[(d_1-d_3)(d_1+d_2+d_3)+2R_0(d_1+d_3)]\rho_1+2R_0d_2\rho_2 \tag{3.6}$$

где ρ_1, ρ_2 — удельные веса материалов несущих слоев и заполнителя, R_0 — радиус срединной поверхности среднего слоя, f_0 — вес тестовой оболочки, о чем сказано ниже.

Несущая способность оболочки как силовой конструкции оценивалась по напряженному состоянию. В несущих слоях и заполнителе напряжения сравнивались с предельно допустимыми. Следует отметить, что в рассматриваемом случае в силу осевой симметрии граничных условий и внешней нагрузки напряженное состояние осесимметрично и не зависит от координаты θ. Обозначим через

$$\sigma_i(\mathbf{d},\ h)=\max \sigma_{i\alpha\beta}(\mathbf{d},\ z,\ h)/[\sigma_{\alpha,\beta}] \tag{3.7}$$

нормированные к допустимым $[\sigma_{\alpha,\beta}]$ напряжения в i-м слое. При этом $\alpha=1$, 2 характеризуют напряжения по главным направлениям ортотропии, совпадающим с z и θ; $\beta=1$, 2, 3 соответствуют напряжениям растяжения, сжатия и сдвига (для заполнителя).

Вследствие принятых гипотез для деформирования слоев максимальные напряжения в несущих слоях реализуются на граничных поверхностях $h=\pm d_i/2$, $i=1$, 3. В заполнителе напряженное состояние однородно по толщине и, следовательно, $\sigma_2(\mathbf{d},\ h)=\sigma_2(\mathbf{d})$.

С учетом (3.7) функции $\Psi_n(\mathbf{d},\ M)$ из (3.1) представляются в виде

$$\Psi_{1,3}(\mathbf{d},\ M)=\sigma_{1,3}(\mathbf{d},\ h),\quad \Psi_2(\mathbf{d},\ M)=\sigma_2(\mathbf{d})$$

а механические ограничения в рассматриваемом случае характеризуются одной функцией

$$\Psi_* = \max(\sigma_2(\mathbf{d}),\ \max_{h,i=1,3} \sigma_i(\mathbf{d}; h))-1 \tag{3.8}$$

При решении задачи о напряженном состоянии величина интенсивности g из (2.1) устанавливается исходя из того, чтобы в тестовых примерах, с которыми сравнивались оптимальные проекты, напряженное состояние достигало предельно допустимого, т. е. величина $\Psi_*=0$. Помимо этого в тестовых примерах взяты оболочки симметричного строения, т. е. $d_1=d_3$, для которых $T_*=0$, что соответствует номинальному значению коэффициента передачи.

Оптимальная задача (3.1), (3.2) в рассматриваемом случае с учетом (3.4), (3.6), (3.8) представляется в виде

$$f(\mathbf{d}^*)=\inf_{\mathbf{d}\in G} f(\mathbf{d}),\quad \mathbf{d}^*\in G$$

$$G=\{\mathbf{d}|j=1,\ 2;\ d_i^{(j)}\leqslant 0;\quad \Psi_*\leqslant 0;\quad T_*\leqslant 0\} \tag{3.9}$$

$\mathbf{d}_0^*$			T_*	Ψ_*	$f(\mathbf{d}^*)$
d_{10}^*	d_{20}^*	d_{30}^*			
0,0364	0,5300	0,1260	0	0	1,28
0,0208	0,6610	0,0602	0	0	1,42

При построении штрафных функций (3.3) следует оставить слагаемые, соответствующие трем ограничениям в (3.9).

Физический смысл задачи (3.9) состоит в отыскании толщин слоев, на которых реализуется оболочка минимального веса. При этом уровень передаваемой мощности при прохождении электромагнитной волны не ниже заданного, а напряженное состояние, вызываемое силовым воздействием на конструкцию, не превышает допустимого.

Обозначим через $\mathbf{d}_0^*=(d_{i0}^*)$ безразмерный вектор, связанный с решением задачи (3.9) соотношением $\mathbf{d}^*=\lambda_0\mathbf{d}_0^*$.

В таблице представлены оптимальные векторы d_0^*, реализующие оболочку минимального веса и некоторые сравнительные характеристики, связанные с тестовыми примерами. Первая строка таблицы относится к случаю $\beta=0$, вторая — к $0\leqslant\beta\leqslant\pi/6$.

Из приведенных данных видно, что при одинаковых номинальных механических и электрических характеристиках оптимальные проекты обеспечивают экономию веса конструкции по сравнению с неоптимальными до 42%. При этом для более жестких эксплуатационных требований, когда необходимо учитывать угол сканирования луча, оптимальный проект дает более ощутимый эффект в количественном выражении.

Таким образом, использование несимметричных структур трехслойных пакетов позволяет проектировать конструкции с улучшенными эксплуатационными характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каплун В. А.* Обтекатели антенн СВЧ. М.: Сов. радио, 1974, 236 с.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510 с.
3. *Цурпал Н. А., Тамуров Н. Г.* Расчет многосвязаных слоистых и нелинейно-упругих пластин и оболочек. Киев: Вища шк., 1977. 223 с.
4. *Пантелеев А. Д.* Оптимальное проектирование трехслойных пластин и пологих оболочек минимального веса // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 11. С. 103–107.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
6. *Медведев Н. Г., Пантелеева А. Д.* Об одном приближенном методе расчета оболочек вращения переменной толщины // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 133–136.
7. *Баничук Н. Г., Кобелев В. В., Рикардс Р. Б.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиноведение, 1988. 224 с.

Киев

Поступила в редацию
15.I.1990