МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1991

УДК 531.1

Г. П. САЧКОВ, Ю. М. ХАРЛАМОВ

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВРАЩЕНИЯ

Решение задач ориентации, встречающихся в некоторых задачах динамики гироскопических систем и в задачах вращения твердого тела, приводит при надлежащем выборе переменных к линейной нестационарной системе Пуассона

$$X^{\bullet}=\omega^{\vee}(t)X,\quad \omega^{\vee}=\begin{bmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{bmatrix}$$

в которой $X=(X_1X_2X_3)^{\mathrm{T}}$ – вектор направляющих косинусов некоторой оси подвижной системы координат $OXYZ$, вращающейся с угловой скоростью $\omega(t)=(\omega_1\omega_2\omega_3)^{\mathrm{T}}$ относительно системы $O\xi\eta\zeta$ [1, 2]. Известно, что в ряде случаев [3, 4] фундаментальная матрица этой системы может быть получена в явном виде, при этом в [1] указаны шесть случаев интегрируемости на основе методов приводимости нестационарных линейных систем к стационарным. Применительно к задаче интегрирования кинематических уравнений возможна геометрическая интерпретация случаев интегрируемости, приводимая в [1, 5], и которая характеризует специфичное сложное составное движение системы координат $OXYZ$ относительно системы $O\xi\eta\zeta$, при котором возможна поэтапная интеграция простых движений, составляющих сложное. Для исключения вырождения кинематических уравнений и их упрощения при численном интегрировании в [2] рассматриваются и другие формы кинематических уравнений. В настоящей работе дается построение в конечном виде решений невырождающихся кинематических уравнений в случаях, не охватываемых методами теории приводимости, рассмотренных в [1], и приводится геометрическая интерпретация нового условия интегрируемости.

1. Математическая модель. Дарбу показано [6], что угловое положение твердого тела становится известным, если найдено частное решение кинематического дифференциального уравнения типа Риккати, имеющего вид

$$d\zeta/d\tau=1/q+q\zeta^2 \tag{1.1}$$

В этом уравнении, являющемся комплексным, функция ζ и переменный коэффициент q являются функциями независимой переменной

$$\tau=\int_0^t(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}dt/2,\quad \varphi=\arg(\omega_2+i\omega_1)-\int_0^t\omega_3\,dt$$

$$q=\exp(i\varphi)$$

Если для (1.1) известно частное решение $\xi(\tau)$, то можно определить функции χ_j и ρ_j ($j=1, 2$), которые позволяют определить положение твердого тела в параметрах Кейли – Клейна

$$\chi_1=(e^{-i\theta_1}+\bar{\xi}\xi_0e^{i\theta_2})/\Delta\Delta_0,\quad \rho_2=\bar{\chi}_1$$
$$\rho_1=(\xi_0e^{i\theta_1}-\xi e^{-i\theta_2})/\Delta\Delta_0,\quad \chi_2=-\bar{\rho}_1 \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем переменные с чертой означают комплексно-сопряженные значения. Величины с нуликами являются начальными значениями, зависящими от начального значения ξ_0 частного решения уравнения (1.1). Входящие в выражения (1.1) значения Θ_1, Θ_2 и Δ определяются из следующих соотношений

$$\Theta_1=\Theta(\tau)-\int\limits_0^t \omega_3\,dt/2, \quad \Theta_2=\Theta(\tau)+\int\limits_0^t \omega_3\,dt/2$$

$$\Theta(\tau)=\int\limits_0^\tau (q\xi-\bar{q}\bar{\xi})\,d\tau/2i, \quad \Delta=(1+\bar{\xi}\xi)^{1/2} \tag{1.3}$$

Параметры Кейли — Клейна углового положения твердого тела выражаются через соотношения (1.2) следующим образом

$$\alpha=\alpha_0\chi_1+\beta_0\chi_2, \quad \gamma=\gamma_0\chi_1+\delta_0\chi_2 \tag{1.4}$$

$$\beta=\alpha_0\rho_1+\beta_0\rho_2, \quad \delta=\gamma_0\rho_1+\delta_0\rho_2$$

Для нахождения частного решения уравнения (1.1) используем экспоненциальную подстановку

$$u(\tau)=\exp\left(-\int\limits_0^\tau e^{i\varphi}\zeta\,d\tau\right)$$

которая приводит (1.1) к виду

$$u^{\cdot\cdot}(\tau)-i\varphi^{\cdot}(\tau)u^{\cdot}(\tau)+u(\tau)=0 \tag{1.5}$$

Воспользовавшись второй экспоненциальной подстановкой

$$u=V\exp[i\varphi/2]$$

преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$V^{\cdot\cdot}+(1+\varphi^{\cdot 2}/4+i\varphi^{\cdot\cdot}/2)V=0 \tag{1.6}$$

В случае, если функция $\varphi=a\tau^2+b\tau+c$, где a и b, c постоянные, уравнение (1.6) принимает вид

$$V^{\cdot\cdot}+(1+[2a\tau+b]^2/4+ia)V=0 \tag{1.7}$$

Чтобы перейти от уравнения (1.7) к уравнению параболического цилиндра, используем замену аргумента по соотношению ($a>0$) $i(2a\tau+b)=2z(ai)^{1/2}$. Имеем

$$V^{\cdot\cdot}(z)+[1+2(-{}^1/_2 i/a)-z^2]V(z)=0 \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) есть уравнение параболического цилиндра с чисто комплексным параметром $\nu=-{}^1/_2 i/a$.

При помощи подстановки $V(z)=v(z)\exp(-{}^1/_2 z^2)$ уравнение (1.8) переходит в уравнение

$$v^{\cdot\cdot}(z)-2zv^{\cdot}(z)+2\nu v(z)=0 \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.9) есть функция Эрмита, а соответствующие им решения уравнения (1.8) — функциями параболического цилиндра. Функции Эрмита могут быть выражены через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \gamma, z)$. Принимая за новое независимое переменное $x=z^2$, можно преобразовать уравнение (1.9) к частному виду вырожденного гипергеометрического уравнения (1.10):

$$xv^{\cdot\cdot}(x)+({}^1/_2-x)v^{\cdot}(x)+{}^1/_2\nu v(x)=0 \tag{1.10}$$

с параметрами $\alpha=-\nu/2$ и $\gamma=1/2$. Общий интеграл дифференциального уравнения (1.10) имеет вид

$$v(x)=A\cdot F(-{}^1/_2\nu,\ {}^1/_2,\ x)+Bx^{1/2}F({}^1/_2(1-\nu),\ {}^3/_2,\ x) \tag{1.11}$$

При $A=1$ и $B=0$ с учетом $x=z^2$ получим частное решение уравнения (1.10): $v_r(z)=F(-{}^1/_2\nu,\ {}^1/_2,\ z^2)$. Частное решение уравнения Риккати (1.1) $\xi(\tau)$ с учетом частного решения v_r и ранее введенных подстановок имеет вид

$$\xi(\tau)=-e^{-i\varphi(\tau)}F\left(\frac{i}{4a},\frac{1}{2},\frac{i(2a\tau+b)^2}{4a}\right)\Big/F\left(\frac{i}{4a},\frac{1}{2},i(2a\tau+b)^2/4a\right) \tag{1.12}$$

Таким образом частное решение $\xi(\tau)$ получено при условии, что угловые скорости твердого тела ω_j $(j=1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяют соотношению $(\omega_2>0)$:

$$\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2}-\int\limits_0^t\omega_3\,dt=\frac{a}{4}\left(\int\limits_0^t(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}\,dt\right)^2+\frac{b}{2}\int\limits_0^t(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}\,dt+c \tag{1.13}$$

В дифференциальной форме соотношение (1.13) принимает вид:

$$\omega_3=\frac{\dot\omega_1\omega_2-\omega_1\dot\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}-\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}\left(a\int\limits_0^t(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}\,dt+b\right) \tag{1.14}$$

2. Условия интегрируемости. Сравним условия интегрируемости, полученные в настоящей работе

$$\omega_3+\frac{\omega_1\dot\omega_2-\dot\omega_1\omega_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}+\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}\left(a\int\limits_0^t(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}\,dt+b\right)=0 \tag{2.1}$$

и в [1, 5]:

$$\omega(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)=\sum_{i=1}^m\omega^{(i)}(t) \tag{2.2}$$

в которой $\omega^{(1)}$ — мгновенная угловая скорость системы $OX_1Y_1Z_1$ по отношению к системе $O\xi\eta\zeta$, причем $\omega^{(1)}$ имеет неизменное направление в системе $O\xi\eta\zeta$ $(\omega^{(1)}=\dot\varphi_0(t)\omega_*^{(0)})$, вектор $\omega^{(i)}(t)$ имеет неизменное направление в системе $OX_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ и является мгновенной угловой скоростью системы $OX_iY_iZ_i$ относительно системы $OX_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ $(i=\overline{1,\ m})$, при этом $OX_mY_mZ_m$ совпадает с системой $OXYZ$.

Таким образом оказываются заданными все вектора $\omega^{(i)}(t)=$ $=\dot\varphi_{i-1}(t)\omega_*^{(i-1)}$, где орты $\omega_*^{(i-1)}$ — произвольно заданные, но постоянные вектора, определяемые своими константами l_{i-1}, m_{i-1}, n_{i-1} направляющих косинусов, $\dot\varphi_{i-1}(t)$ — произвольно заданные функции времени. Указанными величинами и определяется структура проекций суммы $\omega^{(1)}(t)+\ldots+\omega^{(m)}(t)$ на подвижные оси $OXYZ$, обозначаемых через ω_1, ω_2, ω_3.

В силу введенных обозначений каждому вектору $\omega^{(i)}$ угловой скорости соответствует матрица поворота $\alpha^{(i)}$ от системы осей $OX_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ к системе осей $OX_iY_iZ_i$ равная [7]:

$$\alpha^{(i)}_{(t)}=\begin{bmatrix} (1-\cos\varphi_{i-1})\,l^2_{i-1}+ & (1-\cos\varphi_{i-1})\,m_{i-1}l_{i-1}+ & (1-\cos\varphi_{i-1})\,n_{i-1}l_{i-1}- \\ +\cos\varphi_{i-1} & +n_{i-1}\sin\varphi_{i-1} & -m_{i-1}\sin\varphi_{i-1} \\ (1-\cos\varphi_{i-1})\,l_{i-1}m_{i-1}- & (1-\cos\varphi_{i-1})\,m^2_{i-1}+ & (1-\cos\varphi_{i-1})\,m_{i-1}n_{i-1}+ \\ -n_{i-1}\sin\varphi_{i-1} & +\cos\varphi_{i-1} & +l_{i-1}\sin\varphi_{i-1} \\ (1-\cos\varphi_{i-1})\,l_{i-1}n_{i-1}+ & (1-\cos\varphi_{i-1})\,m_{i-1}n_{i-1}- & (1-\cos\varphi_{i-1})\,n^2_{i-1}+ \\ +m_{i-1}\sin\varphi_{i-1} & -l_{i-1}\sin\varphi_{i-1} & +\cos\varphi_{i-1} \end{bmatrix}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\omega}^{(i)}(t)$ имеет проекции $\omega_1^{(i)}$, $\omega_2^{(i)}$, $\omega_3^{(i)}$ в осях $OX_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ равные $\omega_1^{(i)}=\dot\varphi_{i-1}l_{i-1}$, $\omega_2^{(i)}=\dot\varphi_{i-1}m_{i-1}$, $\omega_3^{(i)}=\dot\varphi_{i-1}n_{i-1}$, запишем на основании формулы (2.2) равенство

$$(\omega_1\omega_2\omega_3)^T=\alpha^{(m)}\dots\alpha^{(1)}(\omega_1{}^{(1)}\omega_2{}^{(1)}\omega_3{}^{(1)})^T+\dots+\alpha^m(\omega_1{}^{(m)}\omega_2{}^{(m)}\omega_3{}^{(m)})^T \quad (2.3)$$

в котором множитель первого члена $\alpha=\alpha^{(m)}\dots\alpha^{(1)}$ является матрицей поворота от системы осей $O\xi\eta\zeta$ к системе осей $OX_mY_mZ_m$, удовлетворяя по столбцам кинематическому уравнению Пуассона.

Так как при этом проекции $\omega_1\omega_2\omega_3$ задаются в явной форме от времени, то сами функции ω_j ($j=1, 2, 3$) могут быть либо независимы, либо зависимы в силу конечных (геометрических) уравнений связи между ними.

Поэтому условие (2.2) расписанное в проекциях в зависимости от коэффициентов, входящих в сумму по i ($i=\overline{1, m}$) может привести только к конечным связям между проекциями ω_1, ω_2, ω_3, в то время как условие (2.1) представляет дифференциальную связь проекций, в общем случае не сводящуюся к конечной со структурой (2.3), как это отмечается в голономных и неголономных системах [6]. В частности, условие 2.1 в случае склерономных голономных связей не сводится к конечному относительно ω_1, ω_2, ω_3 соотношению $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)=0$, где f обозначает функцию, при $\omega_1=\sin t^2$, $\omega_2=\cos t^2$, $\omega_3=t$; $a=2$, $b=0$, так как в противном случае существовала бы зависимость между указанными независимыми проекциями ω_1, ω_2, ω_3. Однако отмеченное здесь обстоятельство не нарушает интегрируемость кинематических уравнений вращения в силу (1.12). Так как условие (2.2) представляет необходимое и достаточное условие решения заданной формы для кинематических уравнений и не сводится к (2.1), то рассмотренные в [1] условия в общем случае не охватывают условия (2.1), где a, b — произвольные постоянные. Однако это не исключает случаев, когда какой-либо класс интегрируемых движений может одновременно удовлетворять и условию (2.1) и условию (2.2).

В качестве первого примера можно указать простые конические движения, задаваемые равенством [1]: $\boldsymbol{\omega}(t)=\boldsymbol{\omega}(-b\sin\nu t, b\cos\nu t, a)$ (a, b, ν — константы).

Вторым примером служит движение тела с неподвижной точкой с условием процессионности [8], получаемом из соотношения (2.1) при $a=0$, что свидетельствует об обобщении уравнения Д. Гриоли. Другими словами, на основании формул (1.2), (1.4)÷(1.12) интегрируемость имеет место и при более общем условии: $a\neq0$. Случай Д. Гриоли является частным и для соотношения (2.2) при $m=3$. Действительно, в обозначениях (8), при $\beta=\mathrm{const}$ равенства $\omega_1=\dot\mu+\dot\delta\cos\beta$, $\omega_2=\dot\delta\sin\beta\sin\mu$, $\omega_3=\dot\delta\sin\beta\cos\mu$ можно на основании (2.3) записать в виде:

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T=\alpha^{(3)}\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}(\dot\delta, 0, 0)^T+\alpha^{(3)}(\dot\mu, 0, 0)^T$$

$$\alpha^{(3)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\mu & \sin\mu\\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu\end{bmatrix},\quad \alpha^{(2)}\alpha^{(1)}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\delta & \sin\delta\\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix} \quad [2.4]$$

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad \delta = \int_0^t (\omega_2^2 + \omega_3^2)^{1/2} dt/\sin\beta$$

что и подтверждает справедливость (2.2).

Отметим, что все случаи интегрируемости, при которых матрица угловых скоростей в подвижных осях постоянна, в геометрической интерпретации сводятся к условию (2.2).

Действительно, обозначив соответственно абсолютную и локальную производные через $d\boldsymbol{\omega}/dt$, $\delta\boldsymbol{\omega}/dt$ запишем формулу связи этих производных $d\boldsymbol{\omega}/dt = \delta\boldsymbol{\omega}/dt + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}$ в проекциях

$$\frac{d}{dt}(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T = \frac{\delta}{dt}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T + \Omega^\vee (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$$

где кососимметричная матрица $\Omega^\vee$, соответствующая угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ подвижной системы координат.

Откуда в силу постоянства ω_1, ω_2, ω_3 имеем $\delta/dt(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = 0$, $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ то окончательно $d/dt(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) = 0$, что свидетельствует о неизменности направления вектора $\boldsymbol{\omega}(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ в неподвижной системе координат, как это и следует из условия (2.2) при $m=1$.

Условию (2.1) в случае управляемой компоненты $\omega_3(t)$ можно дать следующую интерпретацию. Условием интегрируемости уравнений вращения твердого тела является управление компонентой угловой скорости $\omega_3(t)$ по закону (2.1); при этом управление (а при его отсутствии — такое изменение) осуществляется вокруг оси неизменно ориентированной в твердом теле и в общем случае не сохраняющей неизменное направление в неподвижной системе координат, что является отличительной чертой движения.

Указанное в настоящей работе условие интегрируемости (2.1) дополняет случаи интегрируемости, основанные на методах теории приводимости и приведенные в [1]. Используемый в работе вариант кинематических уравнений не содержит особенностей вырождения и сводится к уравнению Риккати, приводящемуся заменой переменных к достаточно исследованному гипергеометрическому уравнению, что само по себе представляет дополнительную возможность для случаев интегрируемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каленова В. И., Морозов В. М.* О применении методов теории приводимости к некоторым задачам динамики гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 8–14.
2. *Панов А. П.* К построению общих решений векторных кинематических уравнений вращения. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 52–57.
3. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 272 с.
4. *Wu M.-Y.* A successive decomposition method for the solution of linear time-varying systems // Intern. J. Control 1981. V. 33. No. 1. P. 181–186.
5. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Ишлинский А. Ю.* Инерциальное управление баллистическими ракетами. М.: Наука, 1968. 142 с.
8. *Харламов Е. И., Горр Г. В.* О безнутационных движениях твердого тела, имеющего неподвижную точку // Киев.: Механика твердого тела, 1976. Вып. 8. С. 23–31.

Москва

Поступила в редакцию 6.II.1990