МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1991

УДК 539.3

В. В. КУЗНЕЦОВ

ИНВАРИАНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Рассмотрена точная теория конечных деформаций трехмерного тела, основанная на гипотезе нерастяжимости нормального элемента к базовой (срединной) поверхности с учетом деформаций поперечного сдвига. В качестве физических мер деформаций использованы инварианты тензора деформаций Грина в произвольной криволинейной системе координат. Получено выражение инвариантов при допущениях технической теории оболочек. Определены соотношения упругости, энергии и геометрически нелинейные соотношения при больших перемещениях и поворотах.

1. Точные соотношения. Примем, что деформирование трехмерного тела следует кинематической гипотезе $\mathbf{R}=\mathbf{r}+z\mathbf{n}$, $\mathbf{R}^{\vee}=\mathbf{r}^{\vee}+z\mathbf{n}^{\vee}$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки трехмерного тела; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор базовой поверхности; $\mathbf{n}$ — орт нормали к базовой поверхности. Здесь и далее «галочкой» отмечены величины в деформированном состоянии. В общем случае $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$ ($\mathbf{r}^{\vee}$, $\mathbf{n}^{\vee}$) являются функциями произвольных криволинейных координат α_i ($i=1, 2$), производные по которым будем обозначать индексом после запятой. В отличие от гипотезы Кирхгофа — Лява [1] $\mathbf{n}^{\vee}\mathbf{n}^{\vee}=1$; $\mathbf{n}^{\vee}\mathbf{r}_{,i}^{\vee}=0$ кинематическая гипотеза С. П. Тимошенко [2] использует только условие нерастяжимости $\mathbf{n}^{\vee}\mathbf{n}^{\vee}=1$, не требуя ортогональности векторов $\mathbf{n}^{\vee}$ и $\mathbf{r}_{,i}^{\vee}$. Это позволяет учесть деформации поперечного сдвига. Полагая $z=\alpha_3$, получим, что $\mathbf{R}(\mathbf{R}^{\vee})$ является функцией трех криволинейных координат α_i ($i=1, 2, 3$).

В качестве физических мер деформаций трехмерного тела используем три инварианта I_E, I_{EE}, I_{EEE} тензора Грина, имеющие вид

$$I_E=d_{AAA}^{-1}(d_{EAA}+d_{AEA}+d_{AAE}) \tag{1.1}$$

$$I_{EE}=d_{AAA}^{-1}(d_{EEA}+d_{EAE}+d_{AEE}),\qquad I_{EEE}=d_{AAA}^{-1}d_{EEE}$$

$$d_{abc}=\det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{Vmatrix}$$

$$A_{ij}=\mathbf{R}_{,i}\mathbf{R}_{,j};\quad E_{ij}={}^1/_2(\mathbf{R}^{\vee}_{,i}\mathbf{R}^{\vee}_{,j}-\mathbf{R}_{,i}\mathbf{R}_{,j})$$

Здесь $i, j=1, 2, 3$, A_{ij} — ковариантные компоненты метрического тензора; E_{ij} — ковариантные компоненты тензора Грина; d_{AAA} — дискриминант метрического тензора A_{ij}. Согласно (1.1), инварианты в произвольной точке определяются значениями A_{ij}, E_{ij}, которые выражаются через характеристики базовой поверхности с учетом кинематической гипотезы следующим образом

$$A_{ij}=a_{ij}+2zb_{ij}+z^2c_{ij}\quad (i, j=1, 2) \tag{1.2}$$

$$A_{i3}=A_{3i}=0,\quad A_{33}=1,\quad a_{ij}=\mathbf{r}_{,i}\mathbf{r}_{,j}$$

$$b_{ij}={}^1/_2(\mathbf{n}_{,i}\mathbf{r}_{,j}+\mathbf{n}_{,j}\mathbf{r}_{,i}),\quad c_{ij}=\mathbf{n}_{,i}\mathbf{n}_{,j}$$

$$E_{ij}=\varepsilon_{ij}+z\varkappa_{ij}+{}^1/_2z^2\nu_{ij}$$

$$E_{i3}=E_{3i}={}^1/_2\mathbf{n}^\vee\mathbf{r}_{,i}{}^\vee,\quad E_{33}=0$$
$$a_{ij}{}^\vee=\mathbf{r}_{,i}{}^\vee\mathbf{r}_{,j}{}^\vee,\quad b_{ij}{}^\vee={}^1/_2(\mathbf{n}_{,i}{}^\vee\mathbf{r}_{,j}{}^\vee+\mathbf{n}_{,j}{}^\vee\mathbf{r}_{,i}{}^\vee),\quad c_{ij}{}^\vee=\mathbf{n}_{,i}{}^\vee\mathbf{n}_{,j}{}^\vee$$
$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(a_{ij}{}^\vee-a_{ij}),\quad \varkappa_{ij}=b_{ij}{}^\vee-b_{ij},\quad \nu_{ij}=c_{ij}{}^\vee-c_{ij}$$

Формулы (1.2) позволяют определить инварианты тензора деформаций через векторы $\mathbf{r}^\vee$, $\mathbf{n}^\vee$ в деформированном состоянии. Соотношения (1.1), (1.2) справедливы при произвольных деформациях и перемещениях и являются точными для трехмерного тела, следующего кинематической гипотезе С. П. Тимошенко.

2. Приближенные соотношения. Из формул (1.1), (1.2) могут быть получены приближенные соотношения для оболочек, в которых за базовую принимается срединная поверхность. Простейший вариант таких соотношений основан на допущениях технической теории оболочек

$$A_{ij}\approx a_{ij},\quad E_{ij}\approx\varepsilon_{ij}+z\varkappa_{ij}\quad (i,j=1,2) \tag{2.1}$$

Введем квадратичную форму $g_{ij}d\alpha_i d\alpha_j$, характеризующую деформации поперечного сдвига $g_{ij}=E_{3i}E_{3j}$ $(i,j=1,2)$. Коэффициенты этой квадратичной формы преобразуются так же, как компоненты тензора, и имеют важное значение в установлении инвариантных характеристик деформаций поперечного сдвига.

Используя соотношения (2.1), получаем из (1.1) следующие формулы без дополнительных упрощений

$$I_E=I_\varepsilon+zI_\varkappa \tag{2.2}$$
$$I_{EE}=I_{\varepsilon\varepsilon}-I_g+zI_{\varepsilon\varkappa}+z^2I_{\varkappa\varkappa},\quad I_{EEE}=-(I_{g\varepsilon}+zI_{g\varkappa})$$

$$I_\varepsilon=(d_{\varepsilon a}+d_{a\varepsilon})/d_{aa},\quad I_\varkappa=(d_{\varkappa a}+d_{a\varkappa})/d_{aa} \tag{2.3}$$
$$I_{\varepsilon\varepsilon}=d_{\varepsilon\varepsilon}/d_{aa},\quad I_{\varkappa\varkappa}=d_{\varkappa\varkappa}/d_{aa}$$
$$I_{\varepsilon\varkappa}=(d_{\varepsilon\varkappa}+d_{\varkappa\varepsilon})/d_{aa},\quad I_g=(d_{ag}+d_{ga})/d_{aa}$$
$$I_{g\varepsilon}=(d_{g\varepsilon}+d_{\varepsilon g})/d_{aa},\quad I_{g\varkappa}=(d_{g\varkappa}+d_{\varkappa g})/d_{aa}$$

$$d_{ab}=\det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & b_{22}\end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Соотношения (2.2) выражают инварианты в произвольной точке оболочки через инвариантные характеристики срединной поверхности. Согласно (2.2), (2.3), замечаем, что деформации поперечного сдвига представлены инвариантами I_g, $I_{g\varepsilon}$, $I_{g\varkappa}$ и отражаются на втором и третьем инвариантах тензора деформаций I_{EE}, I_{EEE}. Выражения инвариантов (2.3) могут быть легко записаны через ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$, g_{ij} в явном виде с помощью раскрытия определителей (2.4).

3. Соотношения упругости и энергии. В соответствии с законом состояния [3] могут быть определены соотношения между инвариантами I_E, I_{EE}, I_{EEE} тензора деформаций и напряжений I_σ, $I_{\sigma\sigma}$, $I_{\sigma\sigma\sigma}$, а также соотношение для плотности энергии Π_v в единице объема. Принимая [2] гипотезу отсутствия нормальных напряжений в волокне, первоначально ортогональном срединной поверхности, и обобщенный закон Гука получаем

$$I_\sigma=2(\lambda+\mu)I_E,\quad I_{\sigma\sigma}=\lambda(\lambda+2\mu)I_E{}^2+4\mu^2I_{EE} \tag{3.1}$$
$$I_{\sigma\sigma\sigma}=8\mu^3I_{EEE}-4\lambda\mu^2I_EI_g$$
$$\Pi_v={}^1/_2(\lambda+2\mu)I_E{}^2-2\mu I_{EE}$$

Здесь λ, μ — постоянные Ламе для плоского напряженного состояния, связанные с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν равенствами $\lambda=\nu E/(1-\nu^2)$, $2\mu=E/(1+\nu)$.

Используя формулы (2.2), можно получить по (3.1) значения инвариантов тензора напряжений в любой точке оболочки. Главные напряжения σ_i определяются как корни кубического уравнения

$$\begin{gathered}\sigma^3-I_\sigma\sigma^2+I_{\sigma\sigma}\sigma-I_{\sigma\sigma\sigma}=0\\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=I_\sigma\\ \sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1=I_{\sigma\sigma}\\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3=I_{\sigma\sigma\sigma}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Таким образом получаем полную информацию о напряженном состоянии. Заметим, что, несмотря на гипотезу отсутствия нормальных напряжений в волокне, первоначально ортогональном срединной поверхности, напряженное состояние в общем случае является объемным, т. е. все три главных напряжения отличны от нуля. Это связано с деформациями поперечного сдвига. Если принять $g_{ij}=0$, то, как видно из (2.2), (3.1), $I_{\sigma\sigma\sigma}=0$. Формулы (3.2) показывают, что при этом одно из главных напряжений равно нулю. Полагая $\sigma_3=0$, из остальных соотношений получаем

$$\sigma_1+\sigma_2=I_\sigma,\quad \sigma_1\sigma_2=I_{\sigma\sigma} \tag{3.3}$$

Соотношения (3.3) справедливы в теории оболочек, построенной на гипотезах Кирхгофа — Лява: в любой точке трехмерного тела реализуется плоское напряженное состояние.

Полная энергия упругого тела П определяется интегралом по объему от плотности энергии Π_v. Используя допущения (2.1), получаем

$$\Pi=\int\limits_F \Pi_F\,dF,\qquad dF=d_{aa}^{1/2}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}\Pi_f=\Pi_{f\varepsilon}+\Pi_{f\varkappa}+\Pi_{fg}\\ \Pi_{f\varepsilon}={}^1/_2B\left[I_\varepsilon^2-2(1-\nu)I_{\varepsilon\varepsilon}\right]\\ \Pi_{f\varkappa}={}^1/_2D\left[I_\varkappa^2-2(1-\nu)I_{\varkappa\varkappa}\right],\quad \Pi_{fg}=GI_g\\ B=\frac{Eh}{1-\nu^2},\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad G=\frac{kEh}{1+\nu},\qquad k=1\end{gathered}$$

Здесь h — толщина оболочки; Π_f — плотность энергии на единицу площади f срединной поверхности; Π_{fg} представляет удельную энергию, связанную с поперечным сдвигом. Выражение для Π_{fg} позволяет установить смысл инварианта I_g, который с точностью до множителя совпадает с удельной энергией поперечного сдвига. При учете неравномерности распределения касательных напряжений по толщине коэффициент k отличен от единицы. Различные исследователи теоретически и экспериментально получали достаточно близкие между собой значения этого коэффициента [4]. Например, параболический закон распределения касательных напряжений дает $k=5/6$. Отметим также, что имеются соотношения, связывающие значение k с коэффициентом Пуассона материала [4].

Уравнения равновесия оболочки можно получить энергетическим методом.

4. Кинематика конечных поворотов. Допущения технической теории оболочек (2.1) не накладывают прямых ограничений на перемещения и повороты элементов оболочки. Геометрически нелинейные соотношения имеют вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}={}^1/_2(\mathbf{r}_{,i}{}^\vee\mathbf{r}_{,j}{}^\vee-a_{ij})\\ \varkappa_{ij}={}^1/_2(\mathbf{n}_{,i}{}^\vee\mathbf{r}_{,j}{}^\vee+\mathbf{n}_{,j}{}^\vee\mathbf{r}_{,i}{}^\vee)-b_{ij}\\ g_{ij}={}^1/_4(\mathbf{n}^\vee\mathbf{r}_{,i}{}^\vee)(\mathbf{n}^\vee\mathbf{r}_{,j}{}^\vee)\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь a_{ij}, $(-b_{ij})$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм недеформированной поверхности. Неизвестными являются векторы $\mathbf{r}^\vee$, $\mathbf{n}^\vee$ как функции криволинейных координат α_1, α_2.

Вектор $\mathbf{n}^\vee$ должен удовлетворять ограничению $\mathbf{n}^\vee\mathbf{n}^\vee=1$, что создает определенные неудобства при использовании вариационных методов, так как проекции вектора на оси координат не могут быть приняты за независимые. Для того чтобы избежать необходимости выполнения условия $\mathbf{n}^\vee\mathbf{n}^\vee=1$, можно воспользоваться некоторым представлением для вектора $\mathbf{n}^\vee$, таким, чтобы названное условие удовлетворялось тождественно.

Удобную форму дает представление $\mathbf{n}^\vee$ через вектор конечной вариации $\mathbf{v}$ [5]:

$$\mathbf{n}^\vee=\mathbf{n}\cos v+\mathbf{v}\frac{\sin v}{v}, \qquad v=|\mathbf{v}| \tag{4.2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – исходный вектор, $\mathbf{v}=\delta\mathbf{n}$ – его вариация, удовлетворяющая условию $\mathbf{n}\delta\mathbf{n}=0$. Это означает, что вектор вариации ортогонален $\mathbf{n}$. Следовательно, если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – два заданных линейно независимых вектора, ортогональные $\mathbf{n}$, то

$$\mathbf{v}=\varphi_1\mathbf{e}_1+\varphi_2\mathbf{e}_2 \tag{4.3}$$

Здесь φ_1, φ_2 – произвольные. Заметим, что приращение вектора $\mathbf{v}^\vee=\mathbf{n}^\vee-\mathbf{n}$ не совпадает с его вариацией $\mathbf{v}$. Они связаны условием

$$\mathbf{v}^\vee=\mathbf{n}(\cos v-1)+\mathbf{v}\frac{\sin v}{v}. \tag{4.4}$$

При малом v $\cos v\approx 1$, $\sin v\approx v$ и формула (4.4) дает $\mathbf{v}^\vee\approx\mathbf{v}$, т. е. приращение вектора и его вариация приближенно совпадают при малой вариации. Этим можно воспользоваться для формулировки задачи при малых перемещениях.

В общем случае геометрически нелинейная задача отыскания деформированной конфигурации оболочки сводится к определению пяти функций криволинейных координат, за которые можно принять проекции вектора $\mathbf{r}^\vee$ на оси некоторой системы координат и компоненты вектора вариации нормали $\mathbf{v}$. Полагая в соотношениях (4.1) $\mathbf{r}^\vee=\mathbf{r}+\mathbf{u}$, $\mathbf{n}^\vee=\mathbf{n}+\mathbf{v}^\vee$, можно получить запись инвариантов деформаций через векторы перемещения срединной поверхности $\mathbf{u}$ и приращения нормали $\mathbf{v}^\vee$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
2. *Галимов К. З.* К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 155–166.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
4. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
5. *Кузнецов В. В.* К определению вращений в трехмерном пространстве на основе понятия вариации вектора // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 59–60.

Новосибирск

Поступила в редакцию 5.IV.1989