

УДК 539.214

© 1991 г.

**П. А. КУНТАШЕВ, С. Б. МАКСИМОВ**

**ОБ АНАЛОГИИ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ УРОВНЯ НАПРЯЖЕНИЙ  
В НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ  
И ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ**

Исследуется задача о распределении упругих параметров в неоднородном изотропном упругом теле из условия минимума локального уровня напряжений. Показано, что условия равнонапряженности являются достаточными условиями глобального оптимума. Отмечается аналогия с задачей идеальной пластичности, позволяющая получить некоторые аналитические решения.

Постановка задачи оптимального проектирования, связанная с минимизацией уровня напряжений, вызвана необходимостью повышения прочности и надежности конструкций из условия минимума концентрации напряжений дана в [1, 2], а в [3] оптимизируются жесткостные параметры конструкции. Задача о выборе параметров многослойных цилиндрических сосудов из условия равенства интенсивностей напряжений на внутренних границах каждого слоя рассмотрена в [4]. Осесимметричные задачи о распределении модуля Юнга по радиусу цилиндра, диска и сферы по критерию Треска изучены в [5, 6]. Задачи синтеза слоистых сферы, цилиндра, слоя для конечного набора материалов, рассмотрены в [7–9]. Использовался численный подход алгоритма последовательного улучшения проекта [2] с аппаратом конечных вариаций на множестве малой меры. Поиску распределения модуля Юнга по радиусу толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением, из условия минимизации максимального кольцевого напряжения посвящена работа [10]. Необходимые и достаточные условия глобального минимума интегрального уровня напряжений для общего случая трехмерного упругого и термоупругого тела исследованы в [11]. Некоторые общие свойства задачи о минимизации нормы поля напряжений при дополнительном условии, когда поле смещений необходимо сохранять неизменным, изучены в [12].

1. Здесь рассматривается линейно упругое неоднородное изотропное тело, занимающее заданную конечную область  $V$ . Тело находится в равновесии под действием заданных внешних сил. Ставится задача о выборе на  $V$  закона изменения модуля Юнга  $E$ , минимизирующего уровень напряжений вида

$$\|\sigma\| = \max \Phi^{1/2}, \quad \Phi = a\sigma_{kk}\sigma_{nn} + b s_{ij}s_{ij} \tag{1.1}$$

$$a = (1 - 2\nu)/6; \quad b = (1 + \nu)/2$$

где  $\Phi E^{-1}$  — удельная энергия деформаций;  $s_{ij}$  — девиатор тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ; по повторяющимся индексам производится суммирование. Коэффициент Пуассона  $\nu$  принимается фиксированным. Покажем, что условие равнонапряженности вида

$$\Phi = \text{const} \tag{1.2}$$

является достаточным условием глобального минимума уровня напряжений (1.1) в сформулированной выше задаче оптимизации упругой неоднородности.

Доказательство проводится от противного. Пусть поле напряжений  $\sigma$  в проекте  $E$  удовлетворяет условиям равнонапряженности (1.2) и пусть

найдется проект  $E_*$  с напряжениями  $\sigma_*$  отличными от  $\sigma$  такими, что  $\|\sigma_*\| \leq \|\sigma\|$ . Тогда по (1.1)  $\Phi(\sigma_*) - \Phi(\sigma) \leq 0$  и следовательно

$$\int_V E^{-1}(\Phi(\sigma_*) - \Phi(\sigma)) dV \leq 0 \quad (1.3)$$

Строгое неравенство противоположного знака получается при применении известного в теории упругости принципа Кастильяно к проекту  $E$  с соответствующими ему напряжениями  $\sigma$  и статически возможными напряжениями  $\sigma_*$ . Полученное противоречие доказывает, кроме того, и единственность поля напряжений  $\sigma$ , удовлетворяющего условиям равнонапряженности (1.2).

Заметим, что рассматриваемая задача нахождения оптимального модуля Юнга при использовании условия оптимальности (1.2) является математически эквивалентной задаче идеальной пластичности с поверхностью текучести (1.2). Действительно,  $E^{-1}\Phi(\sigma)$  — упругий потенциал Кастильяно и согласно закону Гука связь деформаций  $\varepsilon$  и напряжений  $\sigma$  может быть представлена в виде

$$\varepsilon_{ij} = E^{-1} \partial \Phi / \partial \sigma_{ij} \quad (1.4)$$

что аналогично ассоциированному закону пластического течения [13]. В отличие от идеальной пластичности (1.4) связывает деформации, а не скорости деформаций с напряжениями; множитель Лагранжа имеет физический смысл  $E^{-1}$ , а поверхность  $\Phi = \text{const}$  зависит, в общем случае, и от первого инварианта тензора напряжений. Известно [13], что наибольший прогресс в решении задач идеальной пластичности достигнут для статически определимых задач, когда общая система уравнений распадается на две подсистемы: в напряжениях и скоростях (здесь в перемещениях). При этом в случае систем уравнений гиперболического типа эффективно используется метод характеристик.

2. Рассмотрим общий случай плоской задачи. Критерий равнонапряженности (1.2) принимает вид

$$t^2 + a^2 p^2 = k^2; \quad k^2 = \Phi / (1 + \nu); \quad t = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2; \quad p = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2 \quad (2.1)$$

где  $\sigma_1$  — главные напряжения,  $a^2 = (1 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$  — для плоского напряженного состояния,  $a^2 = 1 - 2\nu$  — для плоской деформации.

Представляя напряжения  $\sigma_{ij}$  через главные  $\sigma_1, \sigma_2$   $\sigma_{11}; \sigma_{22} = p \pm t \cos 2\varphi$ ,  $\sigma_{12} = t \sin 2\varphi$  и учитывая (2.1), получаем

$$\sigma_{11}; \sigma_{22} = ka^{-1} (\cos \omega \pm a \sin \omega \cos 2\varphi), \quad \sigma_{12} = k \sin \omega \sin 2\varphi \quad (2.2)$$

где  $\varphi$  — угол между первым главным напряжением и осью  $X_1$ .

При условии  $-1 \leq a \operatorname{tg} \omega \leq 1$  система уравнений равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  с учетом (2.2) имеет гиперболический тип [13], а уравнения характеристик и соотношения на них имеют вид ( $u_i$  — смещения):

$$dx_2/dx_1 = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varphi_1), \quad d\Omega \pm d\varphi = 0, \quad dU_1 + \operatorname{tg}(\varphi \pm \varphi_1) dU_2 = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi_1 = (\arccos a) \operatorname{tg} \omega / 2$$

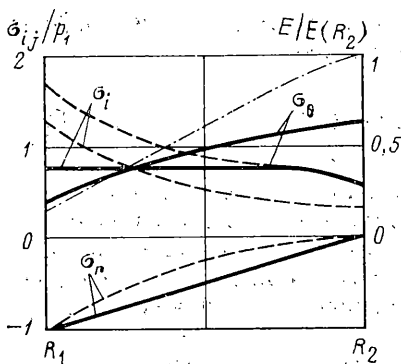
$$\Omega = \varphi_1 + 1/2 (a^2 + 1)^{1/2} / a \operatorname{arctg} a \operatorname{tg} \varphi_1 / (a^2 + 1)^{1/2}$$

Это позволяет эффективно использовать метод характеристик, широко применяемый в теории идеальной пластичности [13].

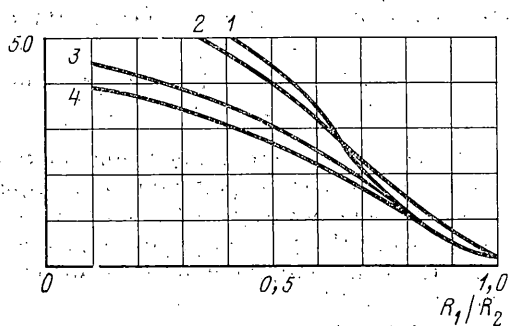
В качестве примера рассмотрим задачу об оптимальном распределении модуля Юнга  $E$  в трубе (кольце), нагруженной осесимметрично внутренним и внешним давлением.

Учитывая, что в полярной системе координат  $r, \theta, z$ , из (2.2) получаем

$$\sigma_{rr}; \sigma_{\theta\theta} = ka^{-1} (\cos \omega \pm a \sin \omega) \quad (2.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Интегрируя уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций получаем

$$r^2 \sin \omega \exp(-\omega/a) = \text{const} = c_1$$

$$E^{-1} (\sin \omega - a \cos \omega) \exp(\omega/a) = \text{const} = c_2$$

Константы  $k$ ,  $c_1$  определяются из граничных условий  $\sigma_{rr}(R_i) = p_i$ , а искомое распределение модуля Юнга определяется с точностью до постоянного множителя [12].

На фиг. 1 сравниваются эпюры безразмерных напряжений в оптимальном (сплошные линии) и однородном (штрихованные линии) цилиндре под внутренним давлением  $p_1$  при соотношении радиусов  $R_1/R_2 = 0,5$ . Соответствующее оптимальное распределение модуля Юнга показано штрихпунктирной линией. Как видим в оптимальном проекте распределение интенсивности напряжений Мизеса значительно выравнивается. На фиг. 2 показано относительное уменьшение интенсивности напряжений ( $\max \sigma_i^\circ - \max \sigma_i$ )/ $\max \sigma_i^\circ$  (в процентах) для цилиндра и кольца под внутренним (линии 1, 2) и внешним (линии 3, 4) давлением, где  $\sigma_i^\circ$  — распределение интенсивности напряжений Мизеса в однородном проекте.

3. Рассмотрим задачу о распределении модуля сдвига  $G(x_1, x_2)$  по сечению неоднородного упругого призматического стержня при кручении. Требуется минимизировать максимальное по сечению значение касательного напряжения, считая крутящий момент  $M_*$  и геометрию поперечного сечения  $\Omega$  заданными.

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\int (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{23}x_1) d\Omega = M_* \quad (3.3)$$

здесь  $n_1, n_2$  — направляющие косинусы нормали к боковой поверхности;  $\mathcal{Z}$  — направление по оси стержня [14]. Можно показать аналогично п. 1, что условия равнонапряженности вида

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = \text{const} = k^2 \quad (3.4)$$

являются достаточными условиями глобального оптимума в сформулированной задаче оптимизации неоднородного упругого стержня при кручении.

Таким образом, решение статической задачи (3.1) — (3.4) тождественно совпадает с соответствующей задачей кручения идеально пластических стержней [15]. Используя параметризацию

$$\sigma_{13} = k \cos \varphi, \quad \sigma_{23} = k \sin \varphi \quad (3.5)$$

решение уравнения (3.1) относительно  $\varphi$  можно представить в виде

$$x_2 \sin \varphi + x_1 \cos \varphi = S(\varphi) \quad (3.6)$$

где функция  $S(\varphi)$  определяется из граничных условий (3.2) через параметрическое задание контура сечения  $x_1 = x_1(\varphi)$ ,  $x_2 = x_2(\varphi)$  в виде

$$S(\varphi) = x_2(\varphi) \sin \varphi + x_1(\varphi) \cos \varphi \quad (3.7)$$

Для определения проекта распределения модуля сдвига, соответствующего найденному оптимальному напряженному состоянию, проинтегрируем соотношения закона Гука относительно депланаций  $W$

$$W_{,1} = G^{-1}k \cos \varphi - \omega x_2, \quad W_{,2} = G^{-1}k \sin \varphi + \omega x_1$$

где  $\omega$  — относительный угол закручивания. Перейдем при этом к новым переменным  $\xi$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= -(\xi - S'(\varphi)) \sin \varphi + S(\varphi) \cos \varphi \\ x_2 &= (\xi + S'(\varphi)) \cos \varphi + S(\varphi) \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Якобиан преобразования (3.8) равен  $(-\xi)$  и отличен от нуля за исключением линий пересечения характеристик и их огибающих. В результате получаем законы распределения депланаций и модуля сдвига с точностью до произвольной, дифференцируемой периодической с периодом  $2\pi$  функции  $f$ :

$$W(\xi, \varphi) = \omega S(\varphi) \xi + f(\varphi) \quad (3.9)$$

$$G(\xi, \varphi) = k\omega^{-1}[\xi - Q(\varphi)\xi^{-1}]; \quad Q = \omega^{-1}f'(\varphi) - S[S'' + S]$$

Для случая овального сечения стержня, получаем

$$\begin{aligned} x_1(\varphi) &= -[a + b(\cos 2\varphi + 2)] \sin \varphi \\ x_2(\varphi) &= [a + b(\cos 2\varphi - 2)] \cos \varphi \\ W(\xi, \varphi) &= -2b\omega\xi \sin 2\varphi + f(\varphi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$G(\xi, \varphi) = k\omega^{-1}[\xi - (\omega^{-1}f'(\varphi) + 12b^2 \sin^2 2\varphi)\xi^{-1}]^{-1}$$

$$\xi = x_2 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi + 4b \cos 2\varphi; \quad f(\varphi) = 8b^2 \omega \sin 2\varphi \cos 2\varphi.$$

На фиг. 3 показано распределение безразмерного модуля сдвига  $G_* = k^{-1}\omega a C$  для соотношения параметров овала  $b/a = 1/9$ . При этом в сечении овала имеются три изолированные точки, в которых значение модуля сдвига обращается в бесконечность. Это начало координат и точки  $(\pm 4b, 0)$ , в которых характеристики сгущаются.

Найдем выигрыш по уровню напряжений в оптимальном проекте по сравнению с геометрически близким однородным стержнем эллиптического сечения с полуосями  $(a \pm b)$  [16], [17]:

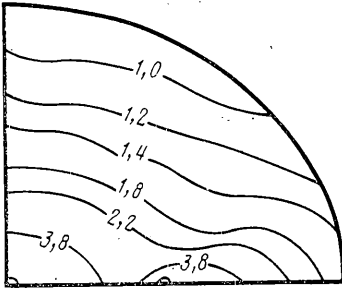
$$\lambda = \frac{\max \sigma_i^{\circ}}{k} = \frac{4(1 - 9/2 \cdot b_*^2 + 4b_*^2)}{3(1 + b_*)(1 - b_*)^2}, \quad b_* = \frac{b}{a}$$

при этом крутящие моменты считаются одинаковыми.

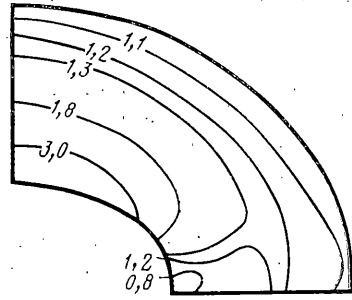
Для случая двусвязного овального сечения, когда внутренний контур  $\xi_1(\varphi) = (a + 3b \cos 2\varphi) - \xi_0$ ,  $\xi_0 = \text{const}$ , является геометрически подобным внешнему, в отличие от сплошного сечения, условию положительности модуля сдвига и непрерывности депланаций

$$f'(\varphi) \leq W[\xi_1^2(\varphi) - 12b^2 \sin^2 2\varphi] \quad (3.11)$$

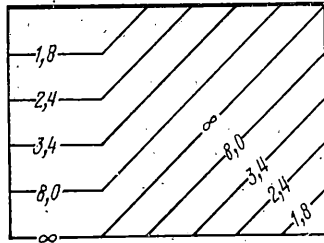
удовлетворяет бесконечное множество функций  $f$ . Множество проектов  $G^{-1}$  (3.10), (3.11), обеспечивающих оптимальное напряженное состояние,



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

является выпуклым, что согласуется с общими результатами [12]. Имеющийся произвол можно использовать для минимизации уровня деформаций при сохранении найденного оптимального поля напряжений

$$\|W\| = \max_{\Omega} |W| \rightarrow \min_{\Omega}, \quad \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$$

Эта задача сводится [12] к задаче выпуклого программирования. В данном случае ее решение существует и единственно  $f(\varphi) = b\omega \sin 2\varphi [2\xi_1(\varphi) + \xi_0]$ .

На фиг. 4 для четверти сечения показано соответствующее распределение безразмерного модуля сдвига  $G_* = Ga/k$  для параметров  $b/a = 1/9$ ;  $\xi_0/a = 5/9$ .

Для кольцевого сечения из (3.10) получаем оптимальное осесимметричное распределение модуля сдвига  $G(r) = k\omega^{-1}r^{-1}$ , которое дает выигрыш по уровню напряжений в виде

$$\lambda = 4(1-t^3) \cdot (1-t^4)^{-1/3}, \quad t = R_1/R_2$$

Для стержней полигонального сечения оптимальное поле напряжений является кусочно постоянным, линии пересечения характеристик являются линиями разрыва напряжений, а распределение других параметров  $G^{-1}$  является кусочно-линейной функцией расстояния от точки до границы сечения. На фиг. 5 для четверти сечения показано оптимальное распределение модуля сдвига для прямоугольного сечения с соотношением сторон  $b/a = 4/7$ .

Таким образом, предложенное достаточное условие оптимальности и отмеченная аналогия с задачами идеальной пластичности позволяют построить конструктивный алгоритм решения задач минимизации уровня напряжений в неоднородных упругих телах. Проведенные расчеты показывают значительно (до двух раз) снижение уровня напряжений в срав-

нении с однородными конструкциями, что подтверждает перспективность создания конструкций из неоднородных упругих материалов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
2. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
3. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* Эффективные характеристики композиционных материалов и оптимальное проектирование элементов конструкций // Успехи механики. 1986. Т. 9, № 2. С. 3–81.
4. *Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л.* Одномерная задача прочности и оптимального проектирования неоднородных многослойных сферических и цилиндрических сосудов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький. 1976. Т. 5. С. 3–14.
5. *Хейнлоо М. Л.* Оптимизация свойств материалов неоднородных круглых дисков, находящихся под воздействием давлений // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 8. С. 83–89.
6. *Хейн К., Хейнлоо М.* Оптимизация непрерывной неоднородности цилиндрических труб под воздействием давлений // Уч. зап. Тартуск. гос. ун-т. Тарту. 1987. Т. 772. С. 44–59.
7. *Алехин В. В.* Оптимизация слоистых цилиндра и сферы минимального веса при наличии ограничений // Динамика сплошной среды/Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск. 1984. Вып. 65. С. 3–9.
8. *Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.* Синергизм в механике многослойных конструкций // Общие задачи и методы исследования пластических и вязкоупругих материалов и конструкций/УНЦ АН СССР. Свердловск. 1986. С. 54–59.
9. *Габышева Л. Н., Каниболотский М. А.* Оптимизация массы слоистой сферической оболочки, синтезируемой из конечного набора материалов // Там же. С. 29–35.
10. *Калирников А. Е., Корляков С. В.* Оптимизация напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы по модулю упругости материала // Проблемы прочности. 1988. № 2. С. 88–91.
11. *Кунташев П. А., Немировский Ю. В.* Минимизация уровня напряжений распределением упругих параметров в упругих и термоупругих телах // Математические методы и физико-механические поля. Киев. 1987. Вып. 26. С. 43–50.
12. *Кунташев П. А., Немировский Ю. В.* О некоторых свойствах оптимальных термоупругих проектов при фиксированных полях напряжений или деформаций // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 476–484.
13. *Кикоин И. К.* Таблицы физических величин: Справочник. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
14. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1986. 231 с.
15. *Ломakin В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
16. *Сokolовский В. В.* Теория пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 308 с.
17. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

Красноярск, Москва

Поступила в редакцию  
28.III.1990