

УДК 531.38

© 1991 г.

П. К. ПЛОТНИКОВ, А. Н. СЕРГЕЕВ, Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается в кинематической постановке задача приведения связанной с твердым телом системы координат к опорной системе координат, вращающейся с заданной (программной) абсолютной угловой скоростью [1–3]. В качестве математической модели движения используются кинематические уравнения углового движения твердого тела в ненормированных кватернионах, а в качестве управлений — проекции абсолютной угловой скорости вращения тела на связанные с ним оси.

Предложены два вида коррекции, являющиеся кватернионными аналогами позиционной и интегральной коррекций. Показано, что для предлагаемых видов коррекции получаются линейные (без линеаризации) уравнения ошибок системы управления ориентацией. Установлено, что кватернионное уравнение ошибок для кватерниона рассогласования, определенного своими компонентами в инерциальном базисе, не только линейно, но и стационарно и инвариантно относительно программного движения опорного базиса. Построено общее решение уравнений ошибок, установлены условия асимптотической устойчивости программного движения, приведено одно из возможных решений задачи синтеза оптимальных значений коэффициентов коррекции. Указаны области применения полученных результатов.

1. Постановка задачи. Виды коррекции. Введем в рассмотрение следующие системы координат: ξ — инерциальная, Z — опорная (программная) система координат, вращающаяся в инерциальном пространстве с заданной (программной) угловой скоростью $\omega^\circ = \omega^\circ(t)$, X — система координат, жестко связанная с твердым телом.

Взаимную ориентацию введенных систем координат зададим нормированными кватернионами λ° , μ , λ в соответствии со схемой поворотов

$$\xi \xrightarrow[\omega^\circ]{\lambda^\circ} Z \xrightarrow{\mu} X \sim \xi \xrightarrow[\omega]{\lambda} X \quad (1.1)$$

Здесь ω — абсолютная угловая скорость вращения твердого тела. Полагаем, что вектор ω° задан своими проекциями $\omega_i^\circ = \omega_i^\circ(t)$ в базисе Z , а вектор ω определен своими проекциями ω_i в базисе X , т. е.

$$\omega^\circ = \omega_1^\circ z_1 + \omega_2^\circ z_2 + \omega_3^\circ z_3, \quad \omega = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3$$

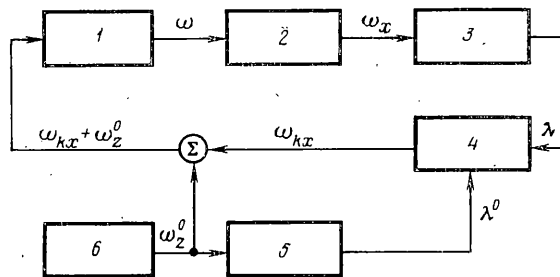
где z_i и x_i — орты осей Z_i и X_i .

Полагаем также, что кватернион λ° определен своими компонентами λ_j° ($j=0, 3$) в базисе Z (а, следовательно, и в базисе ξ), а кватернион λ — своими компонентами λ_j — в базисе X (ξ).

Тогда связь кватернионов λ° , λ и их первых производных по времени с векторами ω° , ω имеет вид уравнений [1]:

$$2\dot{\lambda}^\circ = \lambda^\circ \omega_z^\circ \quad (1.2)$$

$$2\dot{\lambda} = \lambda \omega_x \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь и далее запись вида a_η означает отображение вектора a на базис η ($\eta = \xi, Z, X$) [1], точка означает дифференцирование по времени t , производная от кватерниона b вычисляется в предположении неизменности ортов гиперкомплексного пространства i_1, i_2, i_3 : $\dot{b} = \dot{b}_0 + b_1 \dot{i}_1 + b_2 \dot{i}_2 + b_3 \dot{i}_3$; знак $\circ$ означает кватернионное умножение.

Под задачей управления ориентацией твердого тела будем понимать задачу приведения связанной с телом системы координат X к опорной системе координат Z , вращающейся с программной (заданной) абсолютной угловой скоростью $\omega^\circ(t)$ (т. е. к системе координат, движущейся по программной траектории $\lambda^\circ = \lambda^\circ(t)$). Рассматриваем кинематическую постановку задачи управления [1–3]: полагаем, что управление ориентацией осуществляется за счет сообщения связанной системе координат абсолютной угловой скорости

$$\omega = \omega_k + \omega^* = (\omega_{k1} + \omega_1^\circ) x_1 + (\omega_{k2} + \omega_2^\circ) x_2 + (\omega_{k3} + \omega_3^\circ) x_3 \quad (1.4)$$

состоящей из угловой скорости ω^* , проекции ω_i^* которой в базисе X равны заданным в базисе Z проекциям ω_i° программной угловой скорости ω° ($\omega_x^* = \omega_z^\circ$), и из угловой скорости коррекции ω_k , назначение которой — изменять таким образом ориентацию базиса X , чтобы вызвать его совпадение с базисом Z .

При такой постановке задачи управления ориентацией твердого тела в качестве математической модели движения принимаются кинематические уравнения движения твердого тела в параметрах Родрига — Гамильтона (1.3), а в качестве управлений — проекции ω_i абсолютной угловой скорости вращения тела на связанные оси, а не моменты, прикладываемые к твердому телу. Поэтому задача управления в такой постановке является кинематической.

Блок-схема системы управления ориентацией твердого тела представлена на фиг. 1. На ней 1 — объект управления (твердое тело), 2 — измеритель абсолютной угловой скорости, 3 — блок интегрирования уравнения (1.3), 4 — блок формирования коррекции ω_{kx} , 5 — блок формирования программной траектории $\lambda^\circ(t)$ (интегрирования уравнения (1.2)), 6 — блок формирования программного управления.

Так как величины ω_i° (программные управления) полагаются заданными функциями времени, то основными в рассматриваемой задаче являются вопросы построения и исследования законов коррекции ω_{ki} , обеспечивающих асимптотически устойчивый и оптимальный в некотором смысле процесс управления ориентацией твердого тела (процесс отслеживания базисом X заданного программного движения базиса Z), при котором асимптотически выполняется равенство $\mu \rightarrow 1$, где μ — кватернион рассогласования, характеризующий угловое отклонение связанного базиса X относительно программного Z .

Кватернион рассогласования μ может быть определен своими компонентами либо в инерциальном базисе ξ , либо в связанном базисе X

(а, следовательно, и в программном базисе Z). В первом случае в соответствии со схемой поворотов (1.1) имеем

$$\lambda = \mu \circ \lambda^\circ, \mu = \lambda \circ \bar{\lambda}^\circ \quad (1.5)$$

Во втором [1]:

$$\lambda = \lambda^\circ \circ \mu^*, \mu^* = \bar{\lambda}^\circ \circ \lambda \quad (1.6)$$

Здесь и далее черта означает сопряженный кватернион.

Уравнение для кватерниона рассогласования μ (уравнение ошибок системы управления ориентацией в первом случае) получается из уравнений (1.2) — (1.5) и имеет вид

$$2\dot{\mu} = \lambda \circ \omega_{KX} \circ \bar{\lambda}^\circ = \mu \circ \lambda^\circ \circ \omega_{KX} \circ \bar{\lambda}^\circ = \omega_{K\bar{\lambda}^\circ} \circ \mu \quad (1.7)$$

Уравнение для кватерниона рассогласования μ^* (уравнение ошибок системы управления ориентацией во втором случае) получается из уравнений (1.2) — (1.4), (1.6) и имеет вид [1, 3]

$$2\dot{\mu}^* = \mu^* \circ \omega_{KX} + \mu^* \circ \omega_Z^\circ - \omega_Z^\circ \circ \mu^* \quad (1.8)$$

Видно, что если в уравнение ошибок (1.7) входит (при задании угловой скорости коррекции в связанном базисе) кватернион $\lambda^\circ = \lambda^\circ(t)$, характеризующий программную траекторию твердого тела, то в уравнение ошибок (1.8) входит программное управление $\omega_Z^\circ(t)$ (угловая скорость программного вращения твердого тела).

В [1—3] предложены два вида коррекции: когда управления ω_{K_i} являются линейными функциями величин $\mu_0^* \mu_i^*$ ($\omega_{K_i} = -k_i \mu_0^* \mu_i^*$), и когда управления ω_{K_i} являются линейными функциями направляющих косинусов углов между осями систем координат X и Z : $\omega_{K_1} = -k_1(\mu_0^* \mu_1^* - \mu_2^* \mu_3^*)$, $\omega_{K_2} = -k_2(\mu_0^* \mu_2^* + \mu_1^* \mu_3^*)$, $\omega_{K_3} = -k_3(\mu_0^* \mu_3^* + \mu_1^* \mu_2^*)$ или $\omega_{K_3} = -k_3(\mu_0^* \mu_3^* - \mu_1^* \mu_2^*)$ ($k_i = \text{const}$). Для этих видов функциональных зависимостей ω_{K_i} исследована (с помощью уравнений (1.8)) устойчивость процесса управления ориентацией. Следует отметить, что уравнения ошибок для этих видов угловых скоростей коррекции ω_{K_i} , получаемые из (1.8), существенно нелинейны и, к тому же, в общем случае нестационарны. Это затрудняет исследование «динамики» системы управления ориентацией и решение задачи синтеза оптимальных значений коэффициентов коррекции k_i .

Вместе с тем, как это видно из структуры уравнений ошибок (1.7), (1.8), возможен такой выбор зависимостей $\omega_{K\bar{\lambda}^\circ} = \omega_{K\bar{\lambda}^\circ}(\mu)$, $\omega_{KX} = \omega_{KX}(\mu^*)$, при котором уравнения ошибок будут линейными. Так, если в уравнении (1.7) положить $\omega_{K\bar{\lambda}^\circ} = \mu \circ k \circ \mu$, а в уравнении (1.8) положить $\omega_{KX} = \mu^* \circ k^* \circ \mu^*$, где $k = k(t)$, $k^* = k^*(t)$ — некоторые кватернионы с нулевыми скалярными частями (некоторые векторы), являющиеся известными функциями времени, то эти уравнения принимают вид линейных кинематических уравнений $2\dot{\mu} = \mu \circ k(t)$, $2\dot{\mu}^* = k^*(t) \circ \mu^* + \mu^* \circ \omega_Z^\circ(t) - \omega_Z^\circ(t) \circ \mu^*$, имеющих неасимптотически устойчивые решения для любых $k = k(t)$ и $k^* = k^*(t)$.

Большой интерес представляет построение и исследование таких зависимостей $\omega_{K\bar{\lambda}^\circ} = \omega_{K\bar{\lambda}^\circ}(\mu)$, $\omega_{KX} = \omega_{KX}(\mu^*)$, которые бы являлись кватернионными аналогами позиционной и интегральной коррекций, широко используемых в гироскопической технике. Анализ показывает, что для получения в этих случаях коррекции линейных уравнений ошибок необходимо для описания углового движения твердого тела вместо нормированного кватерниона λ ($\lambda \circ \bar{\lambda} = 1$) ввести ненормированный кватернион $\Lambda = \Lambda \lambda$ ($\Lambda^2 = \Lambda \circ \Lambda$) и использовать вместо кинематического уравнения углового движения твердого тела (1.3) для нормированного кватерниона λ кинематическое уравнение углового движения твердого тела для ненормированно-

го кватерниона Λ [1]:

$$2\Lambda^* = \Lambda \circ \Omega_X, \quad \Omega_X = \omega_0 + \omega_X \quad (1.9)$$

Здесь ω_0 — произвольная функция, связанная с нормой Λ^2 кватерниона Λ дифференциальным соотношением $2\Lambda^* = \omega_0 \Lambda$.

Полагая кватернион λ° , характеризующий программное движение, по-прежнему нормированным, вместо (1.5), (1.6) получим соотношения

$$\Lambda = M \circ \lambda^\circ, \quad M = \Lambda \circ \bar{\lambda}^\circ \quad (1.10)$$

$$\Lambda = \lambda^\circ \circ M^*, \quad M^* = \bar{\lambda}^\circ \circ \Lambda \quad (1.11)$$

где M, M^* — ненормированные кватернионы рассогласований, нормы которых равны норме кватерниона Λ : $\|M\| = \|M^*\| = \|\Lambda\| = \Lambda^2 = \Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2$. Кватернионы M и M^* связаны с μ и μ^* соотношениями $M = \Lambda \mu$, $M^* = \Lambda \mu^*$.

Уравнения для ненормированных кватернионов рассогласований M, M^* имеют вид, аналогичный (1.7), (1.8):

$$2M^* = \Lambda \circ \Omega_{KX} \circ \bar{\lambda}^\circ = M \circ \lambda^\circ \circ \Omega_{KX} \circ \bar{\lambda}^\circ = \Omega_{K\bar{\lambda}^\circ} \circ M \quad (1.12)$$

$$2M^* = M^* \circ \Omega_{KX} + M^* \circ \omega_Z^\circ - \omega_Z^\circ \circ M^* \quad (1.13)$$

В этих уравнениях

$$\Omega_{KX} = \omega_0 + \omega_{KX}, \quad \Omega_{K\bar{\lambda}^\circ} = \omega_0 + \omega_{K\bar{\lambda}^\circ} \quad (1.14)$$

Для реализации кватернионного аналога позиционной и интегральной коррекций предлагаются два вида коррекции, соответствующие случаям формирования кватерниона рассогласования в виде (1.10) и (1.11) и вытекающие из структуры уравнений ошибок (1.12) и (1.13). В случае задания кватерниона рассогласования соотношением (1.10) (т. е. своими компонентами в инерциальном базисе) закон коррекции предлагается формировать в виде

$$\begin{aligned} \Omega_{KX} &= \Lambda^{-1} \circ \left[k \circ (\lambda^\circ - \Lambda) + l \circ \left(\int_{t_0}^t (1 - \Lambda \circ \bar{\lambda}^\circ) d\tau \right) \circ \lambda^\circ \right] = \\ &= \Lambda^{-1} \circ \left[k \circ (M^{-1} - 1) \circ \Lambda + l \circ \left(\int_{t_0}^t (1 - M) d\tau \right) \circ \lambda^\circ \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

где k и l — некоторые кватернионные константы; Λ^{-1}, M^{-1} — кватернионы, обратные кватернионам Λ и M .

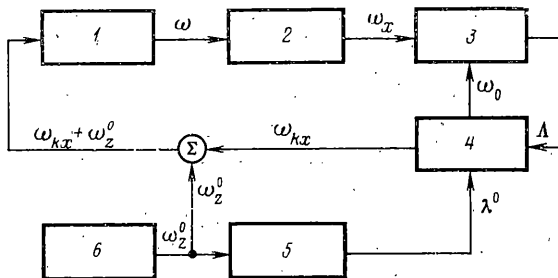
Отображение кватерниона Ω_K на инерциальный базис в этом случае является лишь функцией кватерниона рассогласования M и имеет вид

$$\Omega_{K\bar{\lambda}^\circ} = \Lambda \circ \Omega_{KX} \circ \Lambda^{-1} = k \circ (M^{-1} - 1) + l \circ \left[\int_{t_0}^t (1 - M) d\tau \right] \circ M^{-1} \quad (1.16)$$

В случае задания кватерниона рассогласования соотношением (1.11) (т. е. своими компонентами в связанном базисе) закон коррекции предлагается формировать в виде

$$\begin{aligned} \Omega_{KX} &= \Lambda^{-1} \circ \left[(\lambda^\circ - \Lambda) \circ k^* + \lambda^\circ \circ \left(\int_{t_0}^t (1 - \bar{\lambda}^\circ \circ \Lambda) d\tau \right) \circ l^* \right] = \\ &= (M^{*-1} - 1) \circ k^* + M^{*-1} \circ \left(\int_{t_0}^t (1 - M^*) d\tau \right) \circ l^* \end{aligned} \quad (1.17)$$

где k^* и l^* — некоторые постоянные кватернионы.



Фиг. 2

Угловые скорости коррекций в первом и во втором случаях находятся в соответствии с (1.14) из соотношений (1.15), (1.16) и (1.17) как векторные части кватернионов Ω_{KX} , $\Omega_{K\xi}$: $\omega_{KX} = \text{vect } \Omega_{KX}$, $\omega_{K\xi} = \text{vect } \Omega_{K\xi}$, где $\text{vect}(\cdot)$ — векторная часть кватерниона $(\cdot)$.

Уравнение замкнутой системы «объект управления (твердое тело) + система управления ориентацией» принимает в первом случае вид

$$2\Lambda' = \Lambda \circ \omega_z^0 + k^0 (\lambda^0 - \Lambda) + l^0 \left[\int_{t_0}^t (1 - \Lambda \circ \bar{\lambda}^0) d\tau \right] \circ \lambda^0 \quad (1.18)$$

а во втором случае — вид

$$2\Lambda' = \Lambda \circ \omega_z^0 + (\lambda^0 - \Lambda) \circ k^* + \lambda^0 \circ \left[\int_{t_0}^t (1 - \bar{\lambda}^0 \circ \Lambda) d\tau \right] \circ l^* \quad (1.19)$$

Для получения уравнения (1.18) необходимо подставить выражение для Ω_X

$$\Omega_X = \omega_0 + \omega_X = \omega_0 + \omega_{KX} + \omega_X^* = \Omega_{KX} + \omega_z^0 \quad (1.20)$$

и соотношение (1.15) в уравнение (1.9). Уравнение (1.19) получается аналогично (подстановкой соотношений (1.20), (1.17) в уравнение (1.9)).

Блок-схема системы управления ориентацией твердого тела с использованием ненормированного кватерниона Λ представлена на фиг. 2. На ней 1 — объект управления (твердое тело), 2 — измеритель абсолютной угловой скорости, 3 — блок интегрирования уравнения (1.9), 4 — блок формирования коррекции $\Omega_{KX} = \omega_0 + \omega_{KX}$, 5 — блок формирования программной траектории $\lambda^0(t)$ (интегрирования уравнения (1.2)), 6 — блок формирования программного управления, $\omega_0 = \text{sqal } \Omega_{KX}$, $\omega_{KX} = \text{vect } \Omega_{KX}$.

Уравнение ошибок (1.12) системы управления ориентацией в случае формирования закона коррекции в виде (1.15) или (1.16) принимает вид

$$2M' = k \circ (1 - M) + l^0 \left[\int_{t_0}^t (1 - M) d\tau \right] \quad (1.21)$$

В случае формирования закона коррекции в виде (1.17) уравнение ошибок (1.13) системы управления ориентацией принимает вид

$$2M^{*'} = (1 - M^*) \circ k^* + \left[\int_{t_0}^t (1 - M^*) d\tau \right] \circ l^* + M^* \circ \omega_z^0 - \omega_z^0 \circ M^* \quad (1.22)$$

Из уравнений (1.18) и (1.19) видно, что предлагаемые виды коррекций (1.15) и (1.17) реализуют позиционную и интегральную коррекции.

Позиционной коррекции соответствуют вторые слагаемые правых частей уравнений (1.18), (1.19), а интегральной — третьи. Для этих видов коррекции получаются линейные (без линеаризации) уравнения ошибок (1.21) и (1.22). Причем уравнение (1.21) для кватерниона рассогласования $\mathbf{M}$, определенного своими компонентами в инерциальном базисе, оказывается не только линейным, но и стационарным и инвариантным относительно программного движения базиса Z . Это позволяет дать полный анализ устойчивости и «динамики» системы управления ориентацией и определить оптимальные значения кватернионных коэффициентов коррекции k и l . В отличие от уравнения (1.21) уравнение (1.22) для кватерниона рассогласования $\mathbf{M}^*$, определенного своими компонентами в связанном базисе, является линейным, в общем случае нестационарным и зависящим от программного управления $\omega_z^\circ(t)$. Это затрудняет исследование «динамики» системы управления для коррекции вида (1.17). Следует однако отметить, что для скалярных k^* и l^* первое уравнение системы (1.22) (уравнение для компонента M_0^* кватерниона $\mathbf{M}^*$) имеет вид

$$2M_0^{**} = k^*(1 - M_0^*) + l^* \int_{t_0}^t (1 - M_0^*) d\tau$$

Оно не зависит от остальных трех уравнений этой системы и не содержит проекций ω_i° программной угловой скорости, что позволяет легко построить общее решение этого уравнения и использовать его для анализа устойчивости процесса ориентации.

Отметим также, что в случае позиционной коррекции ($l=l^*=0$) и скалярных k, k^* , таких, что $k=k^*$, уравнения замкнутых систем управления (1.18) и (1.19) для рассмотренных законов коррекции (1.15) и (1.17) совпадают. Поэтому для одинаковых начальных условий движения решения этих уравнений будут одинаковыми и в силу равенств (1.10), (1.11) кватернионы рассогласований $\mathbf{M}^*$ и $\mathbf{M}$ будут связаны соотношением $\mathbf{M}^* = \lambda^\circ(t) \circ \mathbf{M} \circ \lambda^\circ(t)$.

В дальнейшем рассматриваются свойства системы управления ориентацией для коррекции вида (1.15), ((1.16)), для чего исследуется кватернионное уравнение ошибок (1.21). При этом в соответствии с назначением системы в качестве ее невозмущенного движения принимается частное решение $\Lambda = \lambda^\circ$ уравнения (1.18), описывающего движение замкнутой системы управления ориентацией. Этому решению соответствует частное решение $\mathbf{M}=1$ уравнения ошибок (1.21). Исследуются устойчивость этого решения и «динамика» системы управления ориентацией с этим видом коррекции.

2. Общее решение уравнений ошибок. Дифференцируя уравнение ошибок (1.21) по времени, получим

$$2\mathbf{M}^{**} + k \circ \mathbf{M}^* + l \circ (\mathbf{M} - 1) = 0 \quad (2.1)$$

Вводя новую переменную $\mathbf{N} = \mathbf{M} - 1$ и обозначив $p = k/2, q = l/2$, из (2.1) получим кватернионное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{N}^{**} + p \circ \mathbf{N}^* + q \circ \mathbf{N} = 0 \quad (2.2)$$

При этом частному решению $\mathbf{M}=1$ уравнения ошибок (1.21) или (2.1) соответствует нулевое решение уравнения (2.2).

Уравнение (2.2) допускает аналитическое решение общего вида. Способ его построения аналогичен обычному. Опишем его, учитывая специфику кватернионов.

Ищем решения уравнения (2.2) вида

$$N=e^{zt}, \quad z=\text{const} \quad (2.3)$$

где экспоненциал e^{zt} определяется кватернионным рядом

$$e^{zt} = 1 + zt + \frac{1}{2!}(zt)^2 + \frac{1}{3!}(zt)^3 + \dots$$

Подставляя (2.3) и производные $N' = z \circ e^{zt}$, $N'' = z^2 \circ e^{zt}$ в уравнение (2.2), получим для нахождения кватерниона z уравнение

$$z^2 + p \circ z + q = 0 \quad (2.4)$$

являющееся кватернионным аналогом характеристического уравнения. Для нахождения корней кватернионного квадратного уравнения (2.4) совместим орты i_1, i_2, i_3 гиперкомплексного пространства с ортами e_1, e_2, e_3 трехмерного ортогонального базиса, выбранного так, что

$$p = p_0 + ae_1, \quad q = q_0 + ce_1 + be_2 \quad (2.5)$$

т. е. так, чтобы векторные части кватернионов p и q лежали в плоскости $\langle e_1, e_2 \rangle$.

Переходя к скалярной записи, из уравнения (2.4) получим систему четырех нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент z_j ($j=0, 3$) кватерниона z :

$$\begin{aligned} z_0^2 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + p_0 z_0 - az_1 + q_0 &= 0 \\ 2z_0 z_1 + p_0 z_1 + az_0 + c &= 0, \quad 2z_0 z_2 + p_0 z_2 - az_3 + b = 0 \\ 2z_0 z_3 + p_0 z_3 + az_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если

$$a(c - p_0 a/2) \neq 0 \quad (2.7)$$

то система (2.6) имеет, по крайней мере, два решения (знак плюс соответствует $i=1$, знак минус — $i=2$):

$$\begin{aligned} z_{i0} &= \pm \Delta^{1/2} - p_0/2 \\ z_{i1} &= -[(\pm \Delta^{1/2} - p_0/2)a + c]/(\pm 2\Delta^{1/2}) \\ z_{i2} &= -2(\pm \Delta^{1/2})b/(4\Delta + a^2), \quad z_{i3} = ab/(4\Delta + a^2) \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где Δ — положительный корень уравнения

$$f(\Delta) = 16\Delta^3 + 4(4a_1 + a^2)\Delta^2 + 4(a_1 a^2 - b^2 - a_2)\Delta - a_2 a^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$a_1 = q_0 + 1/4(a^2 - p_0^2), \quad a_2 = (c - 1/2 p_0 a)^2 \quad (2.10)$$

Отметим, что условие существования положительного корня уравнения (2.9), имеющее вид $f(0) = -a_2 a^2 < 0$, выполняется в силу (2.7) и второго равенства (2.10).

Используя (2.5), получим (в случае произвольной ориентации базиса e) следующие выражения для величин a, b, c через компоненты p_i, q_i ($i=1, 3$) кватернионов p и q :

$$\begin{aligned} a &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} \\ c &= q_v \cdot e_1 = (q_v \cdot p_v)/a = (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)/a \\ b &= (q_v^2 - c^2)^{1/2} = [q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - ((p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)/a)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где p_v, q_v — векторные части кватернионов p и q .

Итак, в случае, когда выполнено условие (2.7), накладываемое на кватернионные коэффициенты p и q уравнения (2.2), кватернионное

квадратное уравнение (2.4) имеет два различных корня z_1 и z_2 , компоненты z_{ij} ($i=1, 2$; $j=0, 3$) которых определяются соотношениями (2.8)–(2.11). Общее решение уравнения (2.2) в этом случае может быть записано в виде

$$N = e^{z_1 t} \circ c_1 + e^{z_2 t} \circ c_2 \quad (2.12)$$

где c_1, c_2 — кватернионные константы, зависящие от начальных условий движения.

Действительно, нетрудно проверить, что если N_1, N_2 — решения уравнения (2.2), то $N_1 \circ c_1 + N_2 \circ c_2$ также является его решением (здесь c_1, c_2 — произвольные кватернионные константы). Это означает, что множество всех решений уравнения (2.2) — правое векторное пространство над телом кватернионов. Если к тому же z_1 и z_2 — два различных корня уравнения (2.4), то решения $N_1 = e^{z_1 t}$ и $N_2 = e^{z_2 t}$ уравнения (2.2) линейно независимы над кватернионами, поэтому в множестве всех решений уравнения (2.2) они порождают пространство вещественной размерности восемь. А поскольку само уравнение (2.2) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений порядка восемь, то общее решение уравнения (2.2) имеет вид (2.12).

Отметим, что для получения общего решения уравнения ошибок (1.21) или (2.1) необходимо подставить (2.12) в равенство $M = N + 1$ и учесть, что $p = k/2$, $q = 1/2$.

Замечание. Приведенное общее решение (2.12), (2.8) кватернионного уравнения ошибок (2.2) исключает (в силу (2.7)) случай скалярных p и q . Общее решение для этого случая очевидно, т.к. кватернионное уравнение (2.2) в этом случае распадается на четыре скалярных независимых однородных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим позиционную коррекцию ($l=0$), являющуюся частным случаем закона коррекции (1.15). Уравнение ошибок (1.21) в этом случае принимает вид

$$2M' = k \circ (1 - M) \quad (2.13)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$M = e^{-1/2 k t} \circ c + 1 \quad (2.14)$$

где c — кватернионная постоянная, определяемая через начальные условия движения.

3. Устойчивость и «динамика» процесса управления ориентацией. Установим условия асимптотической устойчивости процесса приведения базиса X к Z , используя явное решение уравнений ошибок и критерий Гурвица.

Нетрудно проверить, что

$$e^{zt} = e^{z_0 t} [\cos(|z_0|t) + |z_0|^{-1} \sin(|z_0|t) (z_1 i_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3)] \quad (3.1)$$

где z_j — компонента кватерниона z , $|z_0| = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{1/2}$.

Отсюда видно, что для асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.2) необходимо и достаточно, чтобы скалярные части z_{i0} корней уравнения (2.4) были отрицательны. Из формул (2.8) следует, что z_{i0} будут отрицательными, если $p_0 > 0$ и $p_0/2 > \Delta^{1/2}$ или $p_0^2/4 > \Delta$. Так как $f(0) = -a_2 a^2 < 0$, то для выполнения неравенства $\Delta < p_0^2/4$ достаточно потребовать, чтобы $f(p_0^2/4) > 0$. Последнее условие может быть записано в виде

$$q c p_0^4 + a c p_0^3 + (a^2 q_0 - b^2 - c^2) p_0^2 + a^3 c p_0 - a^2 c^2 > 0 \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2), дополненное соотношениями (2.11), и неравенство $p_0 > 0$ являются достаточными условиями асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.2) или решения $M = 1$ уравнения ошибок

(2.1) ((1.21)), накладываемыми на компоненты кватернионных коэффициентов p и q (k и l).

Воспользуемся теперь для получения необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости критерием Рауса — Гурвица. Рассматривая кватернионное уравнение (2.2) как линейную систему дифференциальных уравнений восьмого порядка, можно показать, что ее характеристическое уравнение имеет вид

$$[s^4 + 2p_0s^3 + (2q_0 + p \circ \bar{p})s^2 + (p \circ \bar{q} + q \circ \bar{p})s + q \circ \bar{q}]^2 = 0 \quad (3.3)$$

Условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (3.3) имеют вид

$$\begin{aligned} p_0 > 0, \quad 2p_0(2q_0 + p \circ \bar{p}) - (p \circ \bar{q} + q \circ \bar{p}) > 0 \\ 2p_0(2q_0 + p \circ \bar{p})(p \circ \bar{q} + q \circ \bar{p}) - 4p_0^2q \circ \bar{q} - (p \circ \bar{q} + q \circ \bar{p})^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Условия (3.4) являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.2) или решения $M=1$ уравнения ошибок (1.21).

Для позиционной коррекции ($l=0$) уравнение ошибок имеет вид (2.13), а его общее решение — вид (2.14). Из (2.14) и (3.1) следует, что для асимптотической устойчивости частного решения $M=1$ уравнения ошибок (2.13) необходимо и достаточно выполнение неравенства $k_0 > 0$, где k_0 — скалярная часть кватерниона k .

Для построения оптимальной в том или ином смысле системы управления ориентацией необходимо решение задачи синтеза оптимальных значений коэффициентов коррекции k и l (p и q). Приведем одно из возможных решений этой задачи.

Рассматриваем систему управления ориентацией с коррекцией вида (1.15). Считаем, что коэффициенты коррекции $k=2p$, $l=2q$ удовлетворяют условиям асимптотической устойчивости (3.4). Поставим следующую задачу: найти такие значения коэффициентов коррекции p и q , удовлетворяющие условиям асимптотической устойчивости (3.4), для которых интеграл

$$I = q_* \int_0^{\infty} |N|^2 dt = q_* \int_0^{\infty} (N_0^2 + N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) dt, \quad q_* = |q|^{1/2}$$

принимает наименьшее значение на решениях системы (2.2), удовлетворяющих начальным условиям $N(0) = \text{const}$, $N'(0) = 0$.

Обозначим

$$\alpha_1 = 2p_0, \quad \alpha_2 = |p|^2 + 2q_0, \quad \alpha_3 = p \circ \bar{q} + q \circ \bar{p}, \quad \alpha_4 = |q|^2 \quad (3.5)$$

Тогда поставленная задача сводится к отысканию минимума функции

$$I = |p|^2 2(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3) / (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4 - \alpha_3^2)$$

при выполнении условий (3.4), принимающих в обозначениях (3.5) вид

$$\alpha_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0$$

Использование аппарата условного экстремума показывает, что минимум достигается при $p=p_0$, $q=q_0$ (p и q скалярны) и $p_0^2 - q_0 = 0$.

4. Применение результатов. Полученные результаты представляют не только теоретический интерес, но и имеют важные приложения. Так, они могут быть использованы при построении инерциальных систем управления с использованием принципа бескардановых систем. Примеры такого рода систем приведены в [1].

Использование полученных результатов позволяет построить эффективные в аналитическом и вычислительном отношениях уравнения и алгоритмы функционирования комплексной бесплатформенной системы ориентации, включающей в свой состав датчики классической БИНС (три акселерометра и три гироскопа, жестко закрепленные на борту объекта), датчик воздушной скорости, датчики углов атаки и скольжения, индукционный датчик магнитного курса и бортовой вычислитель. Такой состав датчиков позволяет использовать для определения параметров ориентации объекта уравнения с позиционной и интегральной коррекцией, имеющие вид (1.18) или (1.19).

Другое применение полученных результатов связано с задачей асимптотического корректирования гироскопических систем, решаемой в рамках прецессионной теории гироскопов. Динамика прецессионного движения гиросистем (гиромагнитика, гироскопа, гиригоризонткопаса и др.) может быть описана с помощью кватернионных уравнений, имеющих вид кватернионных кинематических уравнений абсолютного или относительного углового движения твердого тела [4]. При этом проекции абсолютной угловой скорости гироскопа (гиросферы), входящие в уравнения прецессионного движения, связаны с моментами внешних сил, действующих на гиросистему. Поэтому задачи синтеза корректирующих моментов, придающих гиросистемам заранее заданные свойства, решаемые в рамках прецессионной теории, относятся к классу кинематических задач управления ориентацией твердого тела и при их решении могут быть использованы полученные в этом классе задач результаты.

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть обобщены на кинематическую задачу управления движением свободного твердого тела, представляющую интерес с точки зрения приложений в связи с построением инерциальных систем управления на бесплатформенных принципах и в связи с построением систем наведения подвижных объектов. Для этого необходимо использовать аппарат бикватернионов и бикватернионные кинематические уравнения движения свободного твердого тела [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в управлении угловым положением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 24–31.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Кинематические задачи ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 36–43.
4. Челноков Ю. Н. О применении кватернионов в прецессионной теории гироскопов // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 3–10.
5. Челноков Ю. Н. Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.

Саратов

Поступила в редакцию
27.VI.1989