**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1991**

УДК 539.3

Ю. А. УСТИНОВ

О ПРИНЦИПАХ ВЫБОРА ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ НА КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТАХ

Рассматривается вопрос о взаимоотношении принципов предельного поглощения, предельной амплитуды и энергетического излучения Мандельштама для выбора единственного решения, при исследовании колебаний полуограниченных тел на критических частотах, когда групповая скорость обращается в нуль. На примере антиплоской задачи исследован вопрос эквивалентности указанных принципов для смещений и напряжений. Показано, что согласно первым двум принципам в общем случае стационарного решения не существует, в то время как энергетический принцип излучения позволяет построить единственное стационарное решение. Установлено также, что для некоторых полевых характеристик решения все три принципа приводят к одинаковым результатам.

1. Проблеме выбора единственного решения при исследовании распространения стационарных волн в неограниченных средах (акустических, электромагнитных и упругих) посвящено значительное количество работ. Достаточно подробная библиография по этому вопросу имеется в [1]. Большая часть их посвящена краевым задачам, в которых среда является внешностью ограниченной области. Для полуограниченных тел в связи с исследованием колебаний поперечно-неоднородной полосы эти проблемы наиболее полно исследованы в [1]. Им дана подробная классификация известных принципов, на основе которых можно выделить единственное физически осмысленное решение, и проведен их сопоставительный анализ.

Используя материалы монографии [1], напомним содержание этих принципов.

Принцип предельного поглощения. Согласно этому принципу стационарное решение для идеальной среды рассматривается как предел решения для среды с внутренним трением, пропорциональным ε, при $\varepsilon\to 0$.

Принцип предельной амплитуды. Согласно этому принципу решение стационарной задачи рассматривается как предел решения нестационарной при $t\to\infty$ (t — время).

Энергетический принцип излучения Мандельштама. Обычно формулируется следующим образом. Пусть имеется неограниченный волновод, подверженный воздействию внешних сил, локализованных в некоторой ограниченной области объема или поверхности волновода и изменяющихся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$ (ω — круговая частота). Считаются физически осмысленными те решения, для которых

$$P(\mathbf{u})>0,\ x_1>a;\ P(\mathbf{u})<0,\ x_1<-a \tag{1.1}$$

где $-\infty<x_1<\infty$ координата вдоль оси цилиндра, $\mathbf{u}$ — решение краевой задачи, $P(\mathbf{u})$ — поток энергии, область $|x_1|>a$ характеризуется отсутствием внешних воздействий. В случае полуограниченного волновода $x_1\geqslant 0$, возбужденного с торца $x_1=0$, принцип Мандельштама эквивалентен выполнению первого из неравенств (1.1).

Принцип излучения Зомерфельда [3]. Согласно этому принципу фазовые скорости однородных волн должны быть направлены от источника колебаний. Остановимся более подробно на последних принципах.

В качестве конкретного объекта возьмем упругий цилиндр с осью $-\infty<x_1<\infty$ и поперечным сечением $x_2, x_3 \in D$. Хорошо известно [1, 4, 5], что общее решение вне области $|x_1|\leqslant a$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}=e^{-i\omega t}\left[\sum_{s=1}^{\varkappa}(C_s{}^+\mathbf{u}_s{}^+ + A_s{}^-\mathbf{u}_s{}^-)+\sum_r C_r{}^+\mathbf{u}_r{}^+\right], \quad x_1>a$$

$$\mathbf{u}=e^{-i\omega t}\left[\sum_{s=1}^{\varkappa}(A_s{}^+\mathbf{u}_s{}^+ + C_s{}^-\mathbf{u}_s{}^-)+\sum_r C_r{}^-\mathbf{u}_r{}^-\right], \quad x_1<-a \qquad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{u}_k{}^\pm=\varphi_k{}^\pm(x_2, x_3)e^{i\alpha_k{}^\pm x_1}$ — однородные элементарные решения, $\alpha_s{}^+$, $\alpha_s{}^-$ — вещественные собственные значения спектральной задачи на сечении, полученной в результате отделения переменной x_1, $\alpha_r{}^+(\mathrm{Im}\,\alpha_r{}^+>0)$; $\alpha_r{}^-(\mathrm{Im}\,\alpha_r{}^-<0)$ — комплексные соответственные значения, $\varphi_k{}^+$, $\varphi_k{}^-$ — соответствующие собственные вектор-функции, $A_s{}^+$ — постоянные, характеризующие интенсивность источников колебаний при $x_1=\infty$, $A_k{}^-$ — постоянные, характеризующие интенсивность источников колебаний при $x_1=-\infty$, $C_s{}^\pm$, $C_r{}^\pm$ — постоянные, определяемые источниками колебаний, расположенными в области $|x_1|\leqslant a$.

Элементарные решения обладают следующим свойствам

$$P(\mathbf{u}_s{}^\pm)=\pm p_s, \quad p_s>0; \quad P(\mathbf{u}_r{}^\pm)=0 \qquad (1.3)$$

Энергетический принцип излучения Мандельштама в виде неравенств (1.1) дает только необходимые условия отсутствия источников колебаний в бесконечно удаленных точках волновода. Действительно, согласно (1.3), для полуцилиндров $x_1>a$:

$$P(\mathbf{u})=\sum_{s=1}^{\varkappa} p_s(|C_s{}^+|^2-|A_s{}^-|^2) \qquad (1.4)$$

для полуцилиндра $x_1<-a$:

$$P(\mathbf{u})=\sum_{s=1}^{\varkappa} p_s(|A_s{}^+|^2-|C_s{}^-|^2) \qquad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) видно, что при $A_s{}^-\neq 0$, $A_s{}^+\neq 0$ всегда можно подобрать комбинацию амплитуд так, чтобы выполнялись неравенства (1.1). Слагаемым, содержащим $A_s{}^+$, $A_s{}^-$ можно придать различную интерпретацию. Например, их наличие в решении можно объяснить наличием источников колебаний на бесконечности или отражающими поверхностями. Если $|A_s{}^-|=|C_s{}^+|$, $|A_s{}^+|=|C_s{}^-|$, то поверхности полностью отражают приносимую энергию и являются в этом смысле идеальными. Таким образом, достаточным условием отсутствия на бесконечности источников колебаний и отражателей в идеальном волноводе является требование, чтобы общее решение (1.2) не содержало однородных элементарных решений, потоки энергий которых были бы направлены к источнику колебаний. Эти необходимые и достаточные условия выбора единственного решения на примере плоского волновода впервые четко были сформулированы в [1].

Принцип излучения Зоммерфельда обладает двумя существенными недостатками. Во-первых, он не применим при критических частотах, поскольку в этом случае фазовая скорость может обращаться в бесконечность, и во-вторых, в упругих волноводах, когда фазовая и групповая скорости имеют противоположные знаки.

Сопоставительный анализ первых трех принципов, проведенный в [1], показал, что если частота не является критической, то они эквивалентны. Напомним, что критической, или резонансной, называется частота, при которой групповая скорость $c_s=\omega'(\alpha_s)=0$, при этом соответствующее волновое число α_s всегда является кратным, а соответствующее ему решение спектральной задачи имеет жорданову цепочку. Встречаются также случаи, когда волновое число является кратным и ему могут соответствовать несколько жордановых цепочек, однако групповые скорости, соответствующие собственным векторам, не обращаются в нуль. В упругом цилиндре и акустическом волноводе такой спектральной парой (α, ω), в частности, является пара $\alpha=0$; $\omega=0$. Поскольку при нерезонансных частотах поток энергии каждой однородной моды пропорционален ее групповой скорости, вопрос о применении энергетического принципа излучения на критических частотах до последнего времени оставался открытым. На возможность его использования и в резонансном случае впервые было указано в [5], где дан способ построения полной системы резонансных элементарных решений, переносящих энергию. Однако, как будет показано ниже на простом примере, на критических частотах энергетический принцип излучения не эквивалентен первым двум.

2. Рассмотрим нестационарную задачу для акустического волновода с внутренним трением. В качестве конкретного объекта можно представить антиплоскую задачу для бесконечного слоя $-\infty<x_1<\infty$, $|x_2|\leqslant h$, $-\infty<x_3<\infty$ из вязкоупругого материала, колебания в котором возбуждаются некоторой системой массовых или поверхностных сил, сосредоточенных в сечении. Абстрактной математической моделью, описывающей нестационарные колебания, будет дифференциальное уравнение вида

$$(1+\varepsilon\partial/\partial t)(u''-Au)-c^{-2}u^{\bullet\bullet}=Q\delta(x_1)e^{-i\omega t} \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$u=0,\quad u^{\bullet}=0\quad \text{при}\quad t=0 \tag{2.2}$$

Здесь $u=u(x_1)$ — вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве $H=L_2(D)$, D — поперечное сечение волновода, c — скорость звука, ε — малый параметр, характеризующий внутреннее трение, $Q=Q(x_2, x_3)$ — интенсивность внешних воздействий, сосредоточенных в сечении $x_1=0$, A — неограниченный положительный (положительно определенный) оператор, u' — производная по x_1, $u^{\bullet}$ — производная по времени.

Применительно к антиплоской задаче с границами, свободными от напряжений (исключение составляют линии $x_1=0$, $x_2=\pm h$, в которых могут быть приложены внешние касательные усилия

$$\mu^{-1}\sigma_{23}(0, \pm h, x_3)=Q_0^{\pm}\delta(x_2\pm h))$$

$$Au=\{-\partial^2u/\partial x_2^2,\quad \partial u/\partial x_2|_{x_2=\pm h}=0\}$$

где μ — модуль сдвига, $\tau_0=\mu Q_0$ — интенсивность внешних касательных усилий.

Обозначим через $\lambda_k(A)=\gamma_k^2$ $(k=0, 1, \ldots, \lambda_0=0)$ собственные значения, φ_k — собственные функции оператора A, которые при условии $(\varphi_k, \varphi_l)_H=\delta_{kl}$, составляют ортонормированный базис пространства H:

Для полосы $H=L_2(-h, h)$, $\gamma_k=\pi k/2h$, $\varphi_0=(2h)^{-1/2}$, $\varphi_k=h^{-1/2}\cos\gamma_k x_2$ $(k=2, 4, \ldots)$, $\varphi_k=h^{-1/2}\sin\gamma_k x_2$ $(k=1, 3, \ldots)$, $(\varphi_k, \varphi_l)=\int\limits_{-h}^{h}\varphi_k\varphi_l\,dx_2$

Для идеального волновода $(\varepsilon=0)$ частота будет критической, если $\omega=\omega_l=c\gamma_l$.

Решение задачи (2.1), (2.2) будем отыскивать в виде

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x_1, t)\varphi_k \tag{2.3}$$

При подстановке (2.3) в (2.1), (2.2) для каждой гармоники получаем задачу Коши

$$\begin{gathered}(1+\varepsilon\partial/\partial t)(u_k''-\gamma_k^2 u_k)-c^{-2}u_k^{\cdot\cdot}=Q_k\delta(x_1)e^{-i\omega t}\\ u_k=0, \quad u_k^{\cdot}=0 \quad \text{при} \quad t=0\\ Q_k=(Q, \varphi_k)_H\end{gathered} \tag{2.4}$$

Применяя преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по x_1, получаем

$$u_k=-\frac{c^2Q_k}{4\pi^2 i}\int_\Gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x_1+pt}}{(p+i\omega)\Delta}\,d\alpha\,dp$$

$$\Delta=(1+\varepsilon p)(c^2\alpha^2+\omega_k^2)+p^2$$

$$p\in\Gamma=(\delta-i\infty,\ \delta+i\infty),\ \delta>0$$

Используя теорему Коши, вычислим вначале внутренний интеграл Получаем

$$u_k=-\frac{c^2Q_k}{4\pi i}\int_\Gamma F_k(x_1, p)\,dp, \qquad F_k=\frac{e^{-\beta_k|x_1|+pt}}{(p+i\omega)(1+\varepsilon p)\beta_k}$$

$$\beta_k=c^{-1}(\omega_k^2+p^2/(1+\varepsilon p))^{1/2} \tag{2.5}$$

Исследуем поведение интеграла (2.5) при $t\to\infty$ и малых значениях параметра ε. Заметим, что подынтегральная функция имеет полюс в точке $p=-i\omega$ и три точки ветвления

$$p_k^{\pm}=\left(1-{}^1/_4\frac{\varepsilon^2\omega_k^2}{4}\right)^{1/2}-{}^1/_2\varepsilon\omega_k^2=\pm\varepsilon\omega_k^2-{}^1/_2\varepsilon\omega_k^2+O(\varepsilon^2)$$

$$p_\varepsilon=-\varepsilon^{-1}$$

Исследуем вначале случай, когда $\omega=\omega_l\neq 0$. Рассмотрим интеграл

$$I_l=-\frac{Q_l}{4\pi i}\int_{\Gamma_1}F_l(x_1, p)\,dp \tag{2.6}$$

Контур Γ_1 изображен на фигуре. Деформируя левую часть контура в бесконечность, на основании теоремы Коши получаем

$$\begin{gathered}u_l=u_l^\circ+I_l^++I_l^-+I_l^\varepsilon, \quad |x_1|<ct\\ u_l=0, \quad |x_1|>ct\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$u_l^\circ=-{}^1/_4Q_l(1+i)\alpha_l^{-1}(1-i\varepsilon\omega_l)^{-1/2}\exp(-\beta_l|x_1|+i(\alpha_l|x_1|-\omega t))$$

$$\beta_l=c^{-1}(\varepsilon\omega_l^3/2)^{1/2}$$

I_l^+, I_l^-, I_l^ε — интегралы по петлям, уходящим в бесконечность.

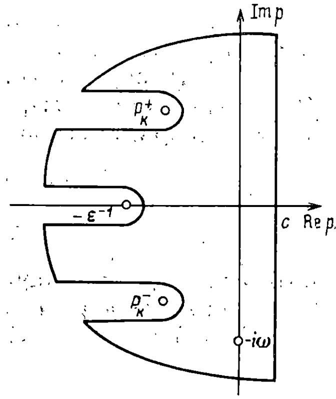
Для получения асимптотических разложений этих интегралов при $t\to\infty$ можно использовать лемму Ватсона (см. [6], стр. 156), согласно которой первые члены их асимптотических разложений будут иметь вид

$$I_l^+=-{}^1/_2 c\pi^{-1/2}(2i\omega_l)^{-3/2}t^{-1/2}\exp\left(-(i\omega_l-{}^1/_2\varepsilon\omega_l^2)t\right)(1+O(\varepsilon))$$

$$I_l^-=cQ_l(\varepsilon\omega_l^2)^{-1}(2i\omega_l)^{-1/2}t^{-1/2}\exp(-i\omega_l+{}^1/_2\varepsilon\omega_l^2)t)(1+O(\varepsilon)) \qquad (2.8)$$

$$I_l^\varepsilon=O(\varepsilon e^{-t/\varepsilon})$$

Из выражений (2.7), (2.8) вытекает, что при $\varepsilon\neq0$ $\lim u_l=u_l^\circ$ $(t\to\infty)$. Последняя представляет собой неоднородную волну с коэффициентом поглощения β_l, фазовой скоростью ω_l/α_l и амплитудой порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Поэтому выражение (2.7) при $\varepsilon\to0$ не имеет конечного предела, если $Q_l\neq0$, а следовательно, не имеет конечного предела и решение исходной задачи (2.1), (2.2).



Если в (2.6) положить $\varepsilon=0$, а затем вычислить асимптотику интеграла с учетом, что в этом случае полюс $p=-i\omega$ и точка ветвления p_l^- сливаются, то на основании леммы Ватсона получим

$$u_l=-{}^1/_4 cQ_l(1+i)(\pi\omega_l)^{-1/2}t^{1/2}\exp(-i\omega_l t)(1+O(t^{-1/2}))$$

Таким образом, при $\omega=\omega_l\neq0$ как из принципа предельного поглощения, так и из принципа предельной амплитуды вытекает, что решение не имеет стационарного предела, если $Q_l\neq0$. Однако следует заметить, что производная по переменной x_1 имеет стационарный предел и при $Q_l\neq0$. В задаче о полосе в этом случае конечный предел будет иметь напряжение σ_{13}.

Рассмотрим теперь стационарную задачу, отбросив начальные условия (2.2) и положив $\varepsilon=0$. Отыскивая по-прежнему решение в виде (2.3), используя результаты работы [5], можно показать, что на критической частоте $\omega=\omega_l$ соответствующая гармоника, удовлетворяющая принципу излучения Мандельштама, имеет вид

$$u_l=-{}^1/_2 Q_0(|x_1|-i)e^{-i\omega_l t} \qquad (2.9)$$

В этом легко убедиться, поскольку средний за период поток энергии стационарного решения уравнения (2.1) через сечение $x_1=\mathrm{const}$, определяется по формуле

$$P(u)={}^1/_2[(u', u)_H+\overline{(u', u)_H}]$$

Остальные гармоники имеют вид

$$u_k={}^1/_2\alpha_k^{-1}Q_k\exp(i(\alpha_k|x_1|-\omega_l t)),\quad \alpha_k=(c^2\gamma_k^2-\omega_l^2)^{1/2}/c \qquad (2.10)$$

Выражения (2.9), (2.10) в совокупности показывают, что в резонансном случае существует стационарное решение, удовлетворяющее энергетическому принципу излучения, оно неограниченно растет при $|x_1|\to\infty$. Однако, это решение не может быть получено в результате предельных переходов при применении как принципа предельного поглощения, так и принципа предельной амплитуды.

Обратимся вновь к задаче (2.1), (2.2) и исследуем случай спектральной пары $\alpha=0$, $\omega=0$. В этом случае $\alpha=0$ является двукратным собственным значением.

В выражении (2.3) выделим нулевую гармонику ($\gamma_0=0$) и определим ее на основе решения краевой задачи (2.4) при $\omega\neq 0$. Учитывая, что в этом случае точки ветвления p_0^+, p_0^- — сливаются в полюс первого порядка, получим

$$
\begin{aligned}
u_0 &= -{}^1/_2(i\omega)^{-1}Q_0c(1-\exp(-\beta_0|x_1|+i\omega(|x_1|/c-t))+\\
&\quad +O(\varepsilon)), \quad |x_1|<ct\\
u_0 &= 0, \quad |x_1|>ct
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Здесь $\beta_0=\varepsilon\omega^2/2c$ — коэффициент поглощения звуковой волны.

Как видно, решение (2.11) содержит слагаемое не пропорциональное $e^{-i\omega t}$. Следовательно, оно не может быть получено при формальном построении стационарного решения в том числе и при $\varepsilon=0$.

Рассмотрим теперь выражения (2.11) при $\omega\to 0$ и $\varepsilon=0$. Получаем физически осмысленное выражение

$$
u_0={}^1/_2Q_0(ct-|x_1|), \qquad |x_1|<ct
$$

$$
u_0=0, \quad |x_1|>ct
$$

описывающее две нестационарные волны, расходящиеся от сечения $x_1=0$ и возникшие в результате мгновенного приложения нагрузки. Предельное решение задачи (2.1), (2.2) в этом случае принимает вид

$$
u=-\frac{Q_0}{2}\left[(|x_1|-ct)\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{-1}e^{-\gamma_k|x_1|}\varphi_k I\right], \qquad |x_1|<ct \tag{2.12}
$$

$$
u=0, \quad |x_1|>ct
$$

Таким образом, и в этом случае совместное применение принципов предельного поглощения и предельной амплитуды приводит к нестационарному решению.

Если отказаться от первых двух принципов и рассматривать исходную задачу как статическую, т. е. положить в уравнении (2.1) $\varepsilon=0$, $\omega=0$ и пренебречь динамическими членами, то ее решение можно представить в виде

$$
u=-\frac{Q_0}{2}\left[(|x_1|-i)\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{-1}e^{-\gamma_k|x_1|}\varphi_k\right]
$$

Это решение для любого цилиндра конечной длины удовлетворяет условию равновесия.

Таким образом, и в этом случае разные взгляды на стационарное решение приводят к различным выражениям для смещений. Однако для производной u', которой пропорционально напряжение σ_{13}, при $|x_1|<ct$ получаются одинаковые выражения

$$
u'=-\frac{Q_0}{2}\left(\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\gamma_k|x_1|}\varphi_k\right)\operatorname{sign}x_1
$$

Аналогичные выводы получаются и для волноводов, описываемых трехмерными уравнениями теории упругости. Однако техника доказательства оказывается существенно более сложной и изложение ее выходит за рамки данной статьи.

Возникает естественный вопрос: что будет, если отказаться от модели полуограниченного тела и на основе метода однородных решений рассмотреть краевую задачу, например, для цилиндра конечной длины? Можно показать, что предельные решения, вытекающие из принципов предельного поглощения и предельной амплитуды, совпадают с решением стационарной задачи, если последнее существует. Хорошо известно, что оно существует, если частота вынужденных колебаний не совпадает с собственной частотой данного тела. При этом критические частоты проявляются только в форме элементарных решений, с помощью которых формируется общее решение. Однако существуют примеры, когда множество критических частот оказывается подмножеством собственных частот, не зависящих от длины цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Мальдельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 439 с.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* О принципе излучения // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 2. С. 243—248.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
5. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* О потоке энергии при резонансах полуограниченных тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 2. С. 309—312.
6. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
6.VI.1990