

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

Б. Я. КАНТОР, А. В. МАРТЫНЕНКО

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВ

Проведено обобщение проблемы устойчивости упругопластических систем и систем с кинематическими связями на класс задач о бифуркации форм равновесия с ограничениями в виде неравенств. Это позволяет математически строго использовать статический критерий Эйлера. Численные решения, полученные в рамках предлагаемого подхода, соответствуют данным экспериментальных исследований.

1. Исследованию устойчивости деформируемых систем посвящено большое число работ. Большинство задач устойчивости решено в рамках статической концепции Эйлера, путем разыскания бифуркации форм равновесия. Если использование подобного подхода при рассмотрении простых упругих систем не вызывает затруднений, то его распространение на задачи упругопластической устойчивости столкнулось с определенными противоречиями¹. Еще большие трудности вызвало исследование устойчивости систем с односторонними кинематическими связями. В этой области, несмотря на значительный интерес ученых, число публикаций крайне невелико. Характерным является и то, что работы, посвященные бифуркации форм равновесия подобных систем, эквивалентны подходу Эйлера — Кармана к проблеме упругопластической устойчивости.

Рассмотрим трехмерную сплошную среду, занимающую объем $V \subset R^3$, ограниченный поверхностью Ω . Равновесие среды может быть описано уравнениями в перемещениях (в общем случае нелинейными):

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + F_i = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

при заданных граничных условиях

$$u_i|_{\Omega_1} = U_i(\mathbf{X}), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j|_{\Omega_2} = s_i(\mathbf{X}), \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \quad (1.2)$$

где \mathbf{u} — векторное поле перемещений, σ_{ij} — тензор напряжений, F, S — векторы массовых и поверхностных сил соответственно, \mathbf{X} — радиус-вектор пространственного положения частицы сплошной среды, определенный в декартовой системе координат X_i , n_i — компонента единичного вектора нормали n . Запятая в индексах означает частное дифференцирование по соответствующей координате. Отыскиваемому векторному полю перемещений \mathbf{u} поставлено в соответствие тензорное поле деформаций ε_{ij} .

Пусть существуют произвольные подобласти ω ($\omega \subseteq V$), внутри которых на компоненты $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ или их производные наложены ограничения в виде неравенств (природа ограничений не имеет значения):

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{u}, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) \geq a(\mathbf{X}) \quad \forall X_i \in \omega \quad (1.3)$$

¹ Известна дискуссия между Ф. Энгессером и Ф. С. Ясинским о касательно-модульной и приведенно-модульной критической силе, разрешенная Ф. Р. Шенли, Ю. Н. Работновым и В. Д. Ключниковым в рамках концепции продолжающегося нагружения.

В пространстве ограничений введем монотонный оператор $\beta(X)$, удовлетворяющий условию Липшица, и единичную функцию Хевисайда $I(G(X)-a(X))$:

$$I = [1 + \text{sign}(G(X) - a(X))] / 2$$

$$I = 1 \quad \forall X_i \in \omega; \quad I = 0 \quad \forall X_i \in \Omega - \omega; \quad I = 1/2 \quad \forall X_i \in \Gamma = (\omega \wedge \Omega - \omega) \quad (1.4)$$

Известно [4], что оператор $\beta(X)$ всегда существует. Свойство непрерывности $\beta(X)$ на границе Γ области ω выполняется за счет равенства

$$\beta(X) = 0 \quad \forall X_i \in \Gamma = (\omega \wedge \Omega - \omega) \quad (1.5)$$

Используя функцию I и оператор β , введем ограничения (1.3) в уравнения равновесия (1.1):

$$\sigma_{ij,j}(u) + F_i + I\beta = 0 \quad (1.6)$$

оставляя неизменными граничные условия (1.2). Существование решения нелинейной системы уравнений (1.6) является следствием общей теории монотонных операторов [4].

Постановка краевой задачи (1.6), (1.2) тождественна исходной (1.1) — (1.3), но позволяет эффективно строить численные алгоритмы решения задач с ограничениями в виде неравенств [1].

Для решения задачи об устойчивости среды, описанной (1.1) — (1.6), будем исследовать ее равновесие в ϵ -окрестности точек основной ветви траектории нагружения. С этой целью проварьируем исходные соотношения. Тогда уравнения равновесного состояния, смежного с исходным, и граничные условия для (1.1) — (1.3) будут

$$\delta\sigma_{ij,j}(\delta u) + \delta F_i = 0 \quad (1.7)$$

$$\delta u_i|_{\Omega_1} = \delta U_i(X); \quad \delta\sigma_{ij}(\delta u) n_j|_{\Omega_2} = \delta s_i(X); \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$$

$$\delta G(X, \delta u, \delta\epsilon_{ij}, \delta\sigma_{ij}) \geq \delta a(X) \quad \forall X_i \in \omega \quad (1.8)$$

Варьируя (1.6) и присоединяя вариацию граничных условий, получим предлагаемую формулировку задачи устойчивости

$$\delta\sigma_{ij,j}(\delta u) + \delta F_i + \delta(I\beta) = 0$$

$$\delta u_i|_{\Omega_1} = \delta U_i(X); \quad \delta\sigma_{ij}(\delta u) n_j|_{\Omega_2} = \delta s_i(X); \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \quad (1.9)$$

При записи (1.7) — (1.9) использовано свойство бесконечной близости двух состояний равновесия, эквивалентное линейности операции варьирования.

Рассмотрим более подробно слагаемое $\delta(I\beta)$ и покажем, что

$$\delta(I\beta) = I\delta\beta + \beta\delta I = I\delta\beta \quad (1.10)$$

Действительно, свойства функции $I(G(X) - a(X))$ таковы, что она кусочно-постоянна в областях ω , $\omega - \Omega$ и имеет разрыв первого рода на Γ . Вариация такой функции равна нулю в областях ω , $\omega - \Omega$. Таким образом, области действия ограничений в смежном и исходном равновесных состояниях тождественны. На границе Γ выполняется условие (1.5), откуда и следует (1.10). Необходимо отметить, что только при выполнении равенства (1.10) возможна обратная свертка (1.9) и переход к уравнениям (1.7) с ограничениями (1.8). Условие (1.5) остается верным и для $\delta\beta$, в силу (1.7) — (1.10):

Чтобы не обращаться к вопросу о применимости рассматриваемого метода исследования устойчивости будем полагать, что система сил, действующих на тело, консервативна либо удовлетворяет условиям, сформу-

лированным в [2]. Тогда окончательно (1.9) запишем в виде

$$\delta\sigma_{ij,j}(\delta\mathbf{u}) + I\delta\beta = 0 \quad (1.11)$$

$$\delta u_i|_{\Omega_1} = 0, \quad \delta\sigma_{ij}(\delta\mathbf{u})n_j|_{\Omega_2} = 0, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$$

Система (1.11) всегда имеет тривиальное решение, т. е. продолжение процесса деформирования в направлении основной ветви нагружения. Наличие отличных от нуля δu_i , $\delta\epsilon_{ij}$, $\delta\sigma_{ij}$, удовлетворяющих (1.11), означает бифуркацию основного процесса деформирования. Продолжение решения вне окрестности точки бифуркации определяется соотношениями (1.2), (1.6) и может быть выполнено по алгоритму, примененному на докритической ветви.

2. Рассмотрим некоторые приложения изложенного подхода.

1. *Малые упругоэластические деформации.* Разложим тензоры напряжений и деформаций на девиаторные s_{ij} , e_{ij} и шаровые σ , θ части $\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\sigma$, $\epsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\theta$, δ_{ij} — символ Кронекера. Ради простоты изложения будем считать, что все компоненты e_{ij} изменяются пропорционально одному параметру λ . Тогда, согласно [3], имеют место следующие соотношения для процесса нагружения и процесса разгрузки соответственно

$$s_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\epsilon_u))e_{ij}, \quad s'_{ij} = 2\mu e'_{ij} + s_{ij}' - 2\mu e'_{ij} \quad (2.1)$$

где μ — постоянная Ламе; $\omega(\epsilon_u)$ — функция пластичности Ильюшина, зависящая от второго инварианта тензора деформаций ϵ_u ; s'_{ij} , e'_{ij} — тензоры, соответствующие началу процесса разгрузки. В обоих случаях (K — модуль всестороннего сжатия):

$$\sigma = K\theta \quad (2.2)$$

Очевидно, что в V могут быть определены области ω , где дифференциал по параметру $\epsilon_{u,\lambda} = \epsilon$ положителен и идет процесс нагружения

$$\epsilon > 0 \quad \forall X_i \in \omega \quad (2.3)$$

Полагая в (1.4) $a(X) = 0$ и $G(X) = \epsilon$, введем функцию $I(\epsilon)$:

$$I = [1 + \text{sign}(\epsilon)]/2 \quad (2.4)$$

Отождествляя оператор β с разностью тензоров напряжений при нагружении и разгрузке, внесем (2.1) — (2.3) в уравнения равновесия (1.1). В данном случае уравнение (1.6) переходит в следующее:

$$[2\mu(\epsilon_{ij} - \epsilon'_{ij}) + s'_{ij} + \delta_{ij}K\theta - [(2\mu(e_{ij}\omega(\epsilon_u) - e'_{ij}') + s'_{ij}')]]_{,j} + F_i = 0 \quad (2.5)$$

Граничные условия (1.2) будут $u_i|_{\Omega_1} = U_i(X)$, $s_{ij}n_j + K\theta n_i|_{\Omega_2} = S_i(X)$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$.

Задача устойчивости (1.11) принимает вид:

$$[2\mu\delta e_{ij} + \delta_{ij}K\delta\theta - [2\mu\delta e_{ij}\omega(\epsilon_u)]]_{,j} = 0 \\ \delta u_i|_{\Omega_1} = 0, \quad \delta s_{ij}n_j + K\theta n_i|_{\Omega_2} = 0, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \quad (2.6)$$

Подчеркнем, что предложенная методика решения задач устойчивости с ограничениями чисто формально привела к концепции продолжающегося нагружения [4] и ее обобщению на трехмерные тела, выполненному в [2]. Действительно, в силу свойства функции (2.4) согласно уравнению (2.6) направления процессов деформирования в исходном и смежном состояниях совпадают.

2. *Односторонний контакт тела с жестким штампом.* Пусть помимо поверхности Ω , ограничивающей упругий объем V , существует поверхность Λ , ограничивающая жесткий штамп. Введем гладкую функцию $z(X)$, определяющую зазор между поверхностями Ω и Λ . Тогда при де-

формировании тела могут быть определены области контакта ω :

$$\omega = \Omega \cup \Lambda, \quad \omega \subset \Omega \quad (2.7)$$

для которых

$$u_n = u_i n_i \geq z(X) \geq 0 \quad \forall X_i \in \omega \quad (2.8)$$

Отождествим оператор β_1 с контактным давлением, определяемым согласно гипотезе Фусса – Винклера (k_w – коэффициент постели):

$$\beta_1 = k_w (u_n - z) \quad (2.9)$$

Функцию $I(u_n - z)$ представим в виде

$$I = [1 + \text{sign}(u_n - z)] / 2 \quad (2.10)$$

Уравнение (1.6) примет вид

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + F_i + I k_w (u_n - z) = 0 \quad (2.11)$$

Граничные условия (1.2) остаются прежними. Запишем уравнения устойчивости

$$\delta \sigma_{ij,j}(\delta \mathbf{u}) + I k_w \delta u_n = 0 \quad (2.12)$$

В силу (1.8), (2.8) вариация u_n – положительно определенная функция

$$\delta u_n \geq 0 \quad (2.13)$$

Ограничение (2.13) внесем в (2.12), умножая его второе слагаемое на оператор $\beta_2 = \text{sign}(\delta u_n)$.

Таким образом, задача устойчивости тела при односторонних кинематических ограничениях формулируется в виде уравнения

$$\delta \sigma_{ij,j}(\delta \mathbf{u}) + I k_w \text{abs}(\delta u_n) = 0 \quad (2.14)$$

и однородных граничных условий (1.11).

Заметим, что пренебрежение ограничениями в виде неравенств (2.8), (2.13) эквивалентно случаю классического (двухстороннего) контакта.

3. *Контакт с трением.* Предположим, что в области контакта ω , определенной (2.7), (2.8), заданы условия трения. Для начала рассмотрим случай, когда происходит скольжение с трением. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \text{abs}(\sigma_{it}) &= k_t \sigma_n \quad \forall X_i \in \omega \\ \sigma_n &= \sigma_{ij} n_i n_j, \quad \sigma_{it} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

и существует такое $k_c = 0$, что

$$u_t = u - u_n n = k_c \sigma_{it} \quad \forall X_i \in \omega \quad (2.16)$$

Здесь k_t – коэффициент трения скольжения, k_c – коэффициент.

Уравнения (2.11), (2.14) с учетом сил трения (2.15), (2.16) примут вид соответственно

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + F_i + I k_w (u_n - z) (1 + k_t \text{sign}(u_t)) &= 0 \\ \delta \sigma_{ij,j}(\delta \mathbf{u}) + I k_w \text{abs}(\delta u_n) (1 + k_t \text{sign}(u_t)) &= 0 \end{aligned}$$

Граничные условия (1.2), (1.11) сохраняются без изменений.

Если считать, что существует некоторая величина $T = k_t \sigma_n \geq 0$, которая вычлениает в ω зоны сцепления ω' , то дополняя (2.15), (2.16) условием

$$\text{abs}(\sigma_{it}) < T \Rightarrow \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow u_t = 0 \quad \forall X_i \in \omega' \quad (2.18)$$

можно описать контакт с трением по Кулону.

Вводя функцию $I'(\text{abs}(\sigma_{ii}) - T)$, определяющую границы $\omega' = [1 + \text{sign}(\text{abs}(\sigma_{ii}) - T)]/2$ и оператор β' , аналогичный (2.9): $\beta' = k_w' u_i$, запишем уравнения (2.11), (2.14) с учетом ограничений (2.15)–(2.18), отражающих влияние сил трения

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + F_i + I[k_w(u_n - z) + (1 - I')T \text{sign}(u_t) + I'k_w' u_t] = 0$$

$$\delta\sigma_{ij,j}(\delta\mathbf{u}) + I[k_w \text{abs}(\delta u_n) + I'k_w' \delta u_t] = 0$$

а также граничные условия (1.2), (1.11).

Наконец, при полном отсутствии проскальзывания, когда из условий трения верно лишь (2.18) и границы областей ω , ω' совпадают, имеем

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + F_i + I[k_w(u_n - z) + k_w' u_t] = 0$$

$$\delta\sigma_{ij,j}(\delta\mathbf{u}) + I[k_w \text{abs}(\delta u_n) + k_w' \delta u_t] = 0$$

с граничными условиями (1.2), (1.11).

Следует подчеркнуть, что хотя введение сил трения накладывает ограничения на касательные компоненты вектора перемещения, однако, в отличие от одностороннего контакта, эти ограничения имеют классический (двухсторонний) характер и определяются равенствами (2.15), (2.16), (2.18).

3. Проиллюстрируем рассмотренные случаи ограничений на примере задач об устойчивости стержней, пластин и оболочек, т. е. того класса объектов, изучаемого механикой твердого деформируемого тела, для которого накоплен богатый теоретический и экспериментальный материал.

Число работ по устойчивости упругопластических систем значительно. Достаточно полную библиографию можно найти, например в [5]. Отметим, что все исследователи подчеркивают близость экспериментальных данных и теоретических результатов, полученных по деформационной теории пластичности, где зоны догружения и разгрузки неизменны при переходе от исходного к бесконечно близкому (смежному) равновесному состоянию. Суть этого явления проанализирована и объяснена в [4]. В п. 2 было показано, что концепция продолжающегося нагружения [2, 4] формально вытекает из исследования (в ε -окрестности точки на траектории основного процесса деформирования) уравнений равновесия, дополненных условиями нагружения (разгрузки).

Устойчивость систем с односторонними кинематическими связями мало изучена. Теоретические решения таких задач имеют приближенный характер, их результаты плохо согласуются с данными экспериментов.

Рассмотрим тонкую шарнирно опертую по торцам цилиндрическую оболочку, помещенную с зазором $z = \text{const}$ в сплошную жесткую обойму. Оболочка нагружена осевой сжимающей силой. Устойчивость подобной конструкции экспериментально изучена в [6]. При нагружении в пределах упругости возникала только несимметричная форма потери устойчивости с сильным изгибом средней части оболочки. Наблюдаемая величина отношения критического напряжения сжатия σ^* оболочки в обойме к классическому значению σ_0 : $\sigma' = \sigma^*/\sigma_0$, $\sigma_0 = Eh/(R(3(1-\nu^2))^{1/2})$ лежит в диапазоне $\sigma' = 1,1 - 1,75$ и сильно зависит от зазора. Здесь E , ν , h , R — модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и радиус оболочки соответственно.

Для проведения теоретических исследований уравнения (2.11), (2.14) запишем в виде

$$L_i(Y) = Aq_j + I\beta B \quad (i=1, \dots, 6, j=1, 2) \quad (3.1)$$

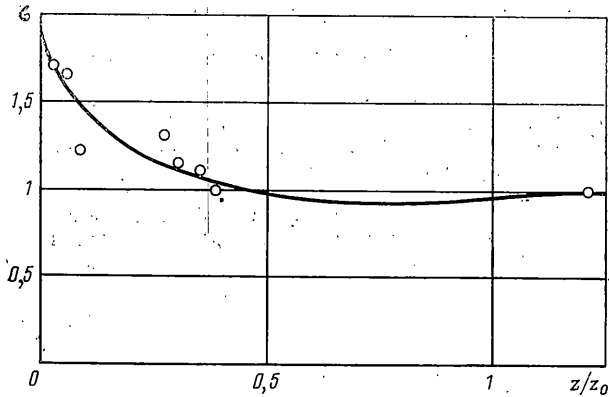
$$L_i^*(\delta Y) = I \text{abs}(\delta\beta) B \quad (i=1, \dots, 8) \quad (3.2)$$

где L_i — квадратично-нелинейный дифференциально-матричный оператор [7]; L_i^* — линейризованный дифференциально-матричный оператор L_i [7]; Y , δY — искомые векторы решения; q_j — известная поверхностная нагрузка; A , B — векторы-столбцы; I — функция, определенная в п.2. Оператор β по сравнению с (2.10) модифицирован следующим образом

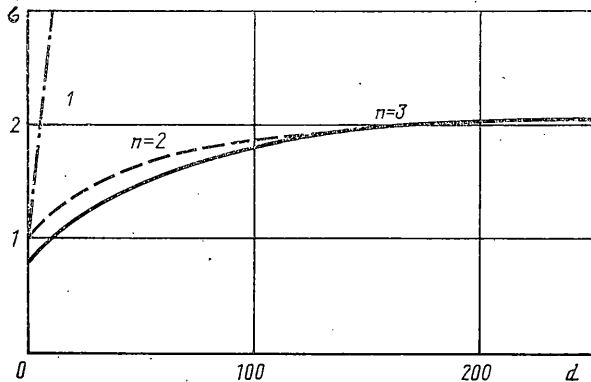
$$\beta = kE(w - z)/h \quad (3.3)$$

где k — коэффициент трансверсального обжатия оболочки; w — нормальные перемещения точек срединной поверхности. Оператор β является асимптотически точным выражением контактного давления [8].

Системы уравнений (3.1), (3.2), дополненные условиями шарнирного опирания оболочки, линейризовывались по Ньютону — Канторовичу и решались методом орто-



Фиг. 1



Фиг. 2

гональной прогонки. При решении уравнений устойчивости (3.2) в кольцевом направлении использовано разложение в ряд Фурье.

На фиг. 1 показаны результаты расчета для оболочки с $R/h=90$, $L/R=2$, $E=108$ ГПа, $\nu=0,3$. Величина зазора изменялась в пределах $0 \leq z \leq z^0 = R\sigma^0\nu/E$. Относительная жесткость основания принималась равной $d = k_v R^2 / (Eh) = 150$, что соответствует величине $k=0,02$, определенной при решении тестовых задач [9]. Результаты [6] отмечены точками. Характерной особенностью связей $z-\sigma'$ является быстрое падение величины критической нагрузки σ^* при увеличении зазора от 0 до $z^0/2$. При $z=z^0$ наблюдается снижение σ^* на 5% по сравнению с величиной σ^0 . Кривая на фиг. 1 построена для случая учета моментности исходного докритического состояния. Если моментность не учитывать, то величина σ^* не изменится в диапазоне $0 \leq z \leq z^0$ и равна σ^* ($z=0$), что не соответствует результатам эксперимента.

На фиг. 2 показана зависимость σ' от жесткости основания d для случая нулевого зазора $z=0$. Видно, что с переходом на каждую новую ветвь по числу волн в окружном направлении n кривизна кривой $\sigma'-d$ быстро убывает и асимптотически стремится к определенной величине, в отличие от случая двухстороннего основания (штрихпунктир), где $\lim \sigma' = \infty$ при $d \rightarrow \infty$. Это связано с быстрым нарастанием окружного сжимающего усилия и потерей устойчивости по комбинированной форме, что отвечает [6]. С ростом d исчезают различия между решениями, построенными с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктир) моментности докритического состояния, так как в этом случае зона краевого эффекта значительно сужается и практически вся оболочка находится в безмоментном состоянии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольтер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
2. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

4. *Клюшников В. Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
5. *Гудрамович В. С.* Устойчивость упругопластических оболочек. Киев: Наук. думка, 1987. 216 с.
6. *Ермичев А. И.* Устойчивость цилиндрических оболочек с односторонними связями // Изв. вузов, Машиностроение. 1984. № 1. С. 20–24.
7. *Мяченков В. И., Мальцев В. П.* Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1984. 280 с.
8. *Кантор Б. Я., Богагыренко Т. Л.* Методы решения контактных задач нелинейной теории оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 1. С. 18–21.
9. *Львов Г. И.* Исследование контактного взаимодействия нелинейно-упругих оболочек конечной сдвиговой жесткости со штампом // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 3. С. 49–54.

Харьков

Поступила в редакцию
14.IX.1989