МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1991

УДК 539.3

Л. Г ЕНИКЕЕВА, А. А. ЛОКШИН

ТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ЖЕСТКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ РАЗГРУЗКИ

В данной заметке выводится точное уравнение для сферической ударной волны в однородной изотропной упругопластической среде при следующих ограничениях на уравнение состояния среды: большие значения интенсивности деформаций распространяются с большими скоростями; разгрузка среды является жесткой для некоторой комбинации компонент деформаций. Идея решения состоит в следующем. Ударный фронт (распространяющийся по невозмущенной среде) в рассматриваемой постановке оказывается одновременно фронтом волны разгрузки. В то же время за фронтом (в силу жесткости разгрузки для некоторой комбинации деформаций) уравнения движения легко интегрируются. В результате соотношения на разрыве непосредственно приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению для фронта волны. В [1] (гл. IV, п. 19) рассматривалась сходная задача в частном случае схемы Прандтля. Однако построенное там решение является ошибочным, поскольку выражение для смещения, полученное в области частично жесткой разгрузки, подставляется затем в уравнения движения в области нагружения ([1], с. 170).

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное однородное упругопластическое пространство со сферической полостью радиуса r_0, центр которой расположен в начале координат. Плотность среды обозначим через ρ. В дальнейшем будет рассматриваться сферически-симметричная задача; пусть r, φ, θ — сферические координаты, $u=u(t, r)$ — радиальное смещение. Тогда, как известно, отличными от нуля будут следующие компоненты тензоров деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{rr}=\partial u/\partial r,\ \varepsilon_{\varphi\varphi}=\varepsilon_{\theta\theta}=u/r;\ \sigma_{rr}=\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta} \tag{1.1}$$

Будем считать, что при активном (сферически-симметричном) нагружении поведение среды описывается определяющими соотношениями деформационной теории пластичности (см. [1], с. 156):

$$\sigma_{rr}=-F(u/r-\partial u/\partial r)+3Ku/r \tag{1.2}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta}={}^1/_2[F(u/r-\partial u/\partial r)+(u/r+\partial u/\partial r)3K]$$

где $F\geqslant 0$ — некоторая нелинейная функция, $F'>0$, $F''\geqslant 0$; $K=\mathrm{const}>0$.

В области разгрузки будем предполагать, что некоторая комбинация деформаций ведет себя жестко, а именно

$$\partial_t(u/r+\varkappa\partial u/\partial r)=0,\ \varkappa=\mathrm{const} \tag{1.3}$$

Кроме того, постулируем, что при разгрузке $\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{rr}$. Поставим теперь следующую задачу: определить фронт волны разгрузки, возникающей в первоначально ненапряженной, покоящейся среде при приложении к сферической полости скачкообразной нагрузки

$$v(t, r)=v_0(t) \tag{1.4}$$

Здесь $v=\partial u/\partial t$ — радиальная составляющая скорости материального элемента. Предполагается, что функция $v_0(t)$ удовлетворяет следующим условиям

$$v_0(t)\geqslant 0;\quad v_0(t)=0\quad (t<0)$$
$$v_0(0)>0;\quad v_0'(t)<0\quad (t>0) \tag{1.5}$$

2. Динамическое и кинематическое условия совместности на фронте. Условие $F''>0$ соответствует случаю, когда бо́льшие интенсивности деформаций распространяются с бо́льшими скоростями [1]. Поэтому для функции $v_0(t)$, обладающей свойствами (1.5), по невозмущенной покоящейся среде будет распространяться ударная волна. Фронт этой волны будет одновременно являться фронтом волны разгрузки. (Для простоты предполагаем, что вся область на плоскости t, r, лежащая за фронтом, является областью разгрузки.)

Пусть $x=\varphi(t)$ — уравнение ударного фронта. Запишем условия динамической и кинематической совместности на фронте

$$[\sigma_{rr}]=-\rho\varphi'(t)[v],\quad [v]=-\varphi'(t)[\varepsilon_{rr}] \tag{2.1}$$

Далее, ясно, что скачки деформаций и напряжений на фронте являются скачками нагружения. Кроме того, на фронте в силу сохранения сплошности среды должно выполняться равенство $u=0$. Поэтому из (1.1), (1.2) имеем

$$[\sigma_{rr}]=-F(-[\varepsilon_{rr}]) \tag{2.2}$$

Исключая из (2.1), (2.2) скачки $[\sigma_{rr}]$ и $[\varepsilon_{rr}]$, получаем

$$F([v]/\varphi'(t))=\rho\varphi'(t)[v] \tag{2.3}$$

3. Вывод искомого обыкновенного дифференциального уравнения для фронта. Чтобы получить из (2.3) обыкновенное дифференциальное уравнение для $\varphi(t)$, воспользуемся теперь условием частичной жесткости разгрузки (1.3), которое перепишем в виде $v/r+\varkappa v_r'=0$ откуда с учетом (1.4) получаем при $r_0\leqslant r<\varphi(t)$:

$$v(t,r)=v_0(t)\exp[-(r^2-r_0^2)\varkappa/2] \tag{3.1}$$

Следовательно, для скачка скорости на фронте справедливо равенство

$$[v]=v_0(t)\exp[-(\varphi^2(t)-r_0^2)\varkappa/2] \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (2.3), получаем искомое дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$:

$$F\{(v_0(t)/\varphi')\exp[-(\varphi^2-r_0^2)\varkappa/2]\}=\rho\varphi' v_0(t)\exp[-(\varphi^2-r_0^2)\varkappa/2] \tag{3.3}$$

В частности, если

$$F(\xi)=A\xi^m,\quad m=\text{const}>1,\quad A=\text{const}>0 \tag{3.4}$$

то уравнение (3.3) приобретает вид

$$(\varphi^{\cdot})^{m+1}\exp[(\varphi^2-r_0^2)\varkappa(m-1)/2]=Av_0^{m-1}(t) \tag{3.5}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее очевидному условию $\varphi(0)=r_0$, дается формулой

$$\int_{r_0}^{\varphi}\exp[(\varphi^2-r_0^2)\varkappa(m-1)/2(m+1)]\,d\varphi=A^{1/(m+1)}\int_0^t v_0^{(m-1)/(m+1)}(t)\,dt \tag{3.6}$$

4. Поле напряжений в области за фронтом. В силу сферической симметрии задачи уравнение движения среды имеет вид ([1], с. 154): $\partial\sigma_{rr}/\partial r+$

$+2(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})/r=\rho\partial v/\partial t$. Вспомним, что в области разгрузки мы приняли гипотезу о том, что $\sigma_{rr}=\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta}$. Поэтому последнее уравнение (в силу нашего предположения о том, что за фронтом имеет место разгрузка) перепишется следующим образом: $\partial\sigma_{rr}/\partial r=\rho\partial v/\partial t$. Отсюда, принимая во внимание выражение (3.1) для $v(t, r)$ находим σ_{rr}:

$$\sigma_{rr}(t,r)=\rho v_0'(t)\int\limits_{\varphi(t)}^{r}\exp[-(r^2-r_0^2)\varkappa/2]\,dr+[\sigma_{rr}] \tag{4.1}$$

Однако из (2.1) и (3.2) следует, что

$$[\sigma_{rr}]=-\rho\varphi'(t)v_0(t)\exp[-(\varphi^2(t)-r_0^2)\varkappa/2]$$

Подставляя последнее выражение в (4.1), окончательно получаем поле напряжений σ_{rr} в области разгрузки

$$\sigma_{rr}(t,r)=-\rho\partial_t\left\{v_0(t)\int\limits_{r}^{\varphi(t)}\exp[-(r^2-r_0^2)\varkappa/2]\,dr\right\} \tag{4.2}$$

Здесь $\varphi(t)$ – решение уравнения (3.3), удовлетворяющее условию $\varphi(0)=r_0$. Вопрос о том, каким дополнительным условиям должна удовлетворять функция $v_0(t)$ для того, чтобы поле напряжений (4.2) действительно представляло собой волну разгрузки при всех $t>\varphi^{-1}(r)$ в настоящее время остается открытым.

5. Дальнейшие результаты в случае степенной нелинейности. Предположим, что вместо граничного условия (1.4) задано следующее условие

$$\sigma_{rr}(t, r_0)=-p_0(t) \tag{5.1}$$

где функция $p_0(t)$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (1.5), наложенным на функцию $v_0(t)$. Будем, кроме того, считать, что нелинейная функция F имеет вид (3.4). Попробуем исключить величину $v_0(t)$ из уравнения фронта. Имеем из (4.2), (5.1):

$$p_0(t)/\rho=\partial_t\left\{v_0(t)\int\limits_{r_0}^{\varphi(t)}\exp[-(r^2-r_0^2)\varkappa/2]\,dr\right\}$$

Отсюда, принимая во внимание условие $\varphi(0)=r_0$, находим

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t p_0(t)\,dt=v_0(t)\int\limits_{r_0}^{\varphi(t)}\exp[-(r^2-r_0^2)\varkappa/2]\,dr \tag{5.2}$$

Однако, из (3.5) вытекает, что $v_0(t)=A^{-1/(m-1)}(\varphi')^{(m+1)/(m-1)}\exp[(\varphi^2-$ $-r_0^2)/\varkappa/2]$, поэтому равенство (5.2) перепишется в виде

$$A^{1/(m-1)}\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t p_0(t)\,dt=\frac{(\varphi')^{(m+1)/(m-1)}}{\exp[-\varkappa\varphi^2/2]}\int\limits_{r_0}^{\varphi}\exp[-\varkappa r^2/2]\,dr$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах, а именно

$$A^{1/(m+1)}\int\limits_0^t dt\left(\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t p_0(\tau)\,d\tau\right)^{(m-1)/(m+1)}=$$

$$=\int\limits_{r_0}^{\varphi}\left(\int\limits_{r_0}^{\varphi}\exp[-\varkappa r^2/2]\,dr\Big/\exp[-\varkappa\varphi^2/2]\right)^{(m-1)/(m+1)}d\varphi$$

Полученное соотношение более удобно для приложений, чем (3.6), поскольку именно величина $p_0(t)$ во многих задачах может быть задана исходя из физических соображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В. К.* Волновые задачи пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.

Навои, Москва

Поступила в редакцию
14.VIII.1989