

УДК 539.374

© 1991 г.

О. Г. ЗАВИЛЕЙСКИЙ, Н. Н. МЯГКОВ

КВАЗИПЛОСКАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА
В УПРУГОВЯЗКОЙ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ СРЕДЕ

Предложены приближенные уравнения для решения задач распространения неоднородных нестационарных волн в нелинейной максвелловской среде, которая при небольших напряжениях упруга, а при достаточно больших — течет. Рассмотрен практически интересный случай, когда волна инициируется импульсом давления, действующим на некоторую область поверхности полупространства среды.

Предлагаемый подход основан на применении методов нелинейной теории волн и обусловлен возможностью введения ряда малых параметров, характеризующих течение. Так например, волны, возникающие в металлах при взрывном или ударном с умеренными скоростями нагружении, можно считать слабыми в смысле малости напряжения по сравнению с модулем сжатия металла [1].

Предложенные уравнения являются обобщением на квазиплоский случай одномерной модели распространения нелинейных волн в нелинейной максвелловской среде [2]. Учет неоднородности (дифракции) волны производится в приближении поперечной диффузии [3]. Рассмотрена задача о распространении осесимметричной двумерной ударной волны в металле, возникающей при контактном взрыве таблетки взрывчатого вещества.

1. Уравнения движения изотропной упруговязкой максвелловской среды [4]:

$$\begin{aligned} \rho \, du_i/dt - \partial \sigma_{ih} / \partial x_h - \partial \sigma_{ih}^{vis} / \partial x_h &= 0 \\ d\varepsilon_{ij}/dt &= \frac{1}{2} (\delta_{ih} - 2\varepsilon_{ih}) \partial u_h / \partial x_j + \frac{1}{2} (\delta_{jh} - 2\varepsilon_{jh}) \partial u_h / \partial x_i + \varphi_{ij} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} d\rho/dt + \rho \partial u_h / \partial x_h &= 0 \\ \rho T \, dS/dt &= \kappa \partial^2 T / \partial x_h^2 + \sigma_{im}^{vis} \partial u_i / \partial x_m - \frac{1}{2} \rho \varphi_{mj} \partial E / \partial \varepsilon_{mj} \\ \sigma_{ih}^{vis} &= \eta (\partial u_i / \partial x_h + \partial u_h / \partial x_i) + (\zeta - \frac{2}{3} \eta) \delta_{ih} \partial u_l / \partial x_l \\ \sigma_{ij} &= \rho (\delta_{ih} - 2\varepsilon_{ih}) \partial E / \partial \varepsilon_{hj} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где E — внутренняя энергия, u_i — скорости перемещения среды, ε_{ij} — тензор эффективных упругих деформаций, φ_{ij} — релаксационные члены, ответственные за кинетику деформирования, $i, j, l, k, m = 1, 2, 3$.

Внутренняя энергия (на единицу массы) для изотропной среды, как известно, есть функция инвариантов тензора деформаций и энтропии. Удобно представить эту зависимость в виде [5]:

$$E = E(\rho, D, \Delta, S) \quad (1.3)$$

где D и Δ — инварианты девиатора тензора эффективных деформаций Генки, ρ — плотность, S — энтропия. Зависимость от плотности характеризует степень всестороннего сжатия объема, от D и Δ — изменение его формы. Величины ρ, D, Δ выражаются через инварианты I_1, I_2, I_3 тензора ε_{ij} сле-

дующим образом

$$\rho = \rho_0 (\det \|\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}\|)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$D = I_1^2/3 - I_2 + 2I_1^3/3 - 7I_1I_2/3 + 3I_3 + O(\varepsilon^4)$$

$$\Delta = I_3 - I_1I_2/3 + 2I_1^3/27 + O(\varepsilon^4)$$

С помощью (1.2) вычисляются компоненты тензора напряжений для параметризации (1.3) с учетом (1.4):

$$\|\sigma_{ij}\| = -\rho^2 E_\rho I^e + \rho E_D (\|\varepsilon_{ij}\| - I_1 I^e/3 + \|\varepsilon_{ij}\|^2 - (I_1^2 - 2I_2) I^e/3) - \rho E_\Delta [(I_1^2/3 - 2I_2) I^e + 2I_1 \|\varepsilon_{ij}\| - 3\|\varepsilon_{ij}\|^2]/3 + O(\varepsilon^3) \quad (1.5)$$

Здесь $\|\cdot\|$ — матрица, I^e — единичная матрица. Предполагается, что в отсутствие деформаций ($\varepsilon_{ij} = 0$) и $S = S_0$ среда не напряжена ($\sigma_{ij} = 0$).

Рассматривается задача о распространении продольных волн в компактном материале, когда импульс давления действует на некоторую конечную область поверхности полупространства материала нормально к ней. Ось x_1 декартовой системы координат направлена нормально поверхности вглубь материала. Таким образом, уравнения (1.1), (1.2) дополняются граничными условиями на поверхности $x_1 = 0$ и рассматривается решение при $x_1 > 0$, $-\infty < t < +\infty$.

Во многих практических приложениях волны, возникающие в металлах в процессе взрывной или ударной деформации, можно считать слабыми в смысле малости изменения плотности в волне или малости напряжения по сравнению с модулем всестороннего сжатия материала. При этом напряжения могут значительно превышать предел упругости на адиабате Гюгонио. Малый параметр ε , использованный в (1.4), (1.5) для оценки точности разложений, очевидно $\varepsilon \sim \max(\Sigma \varepsilon_{ij}^2)^{1/2}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

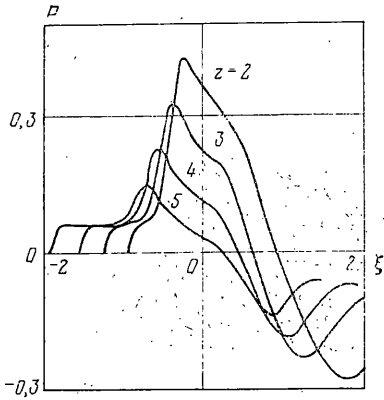
Для этого класса задач вместо системы (1.1), (1.2) можно предложить значительно более простую систему уравнений течения среды, являющуюся обобщением на квазиплоский случай одномерных уравнений распространения нелинейных волн в упруговязкой максвелловской среде с нелинейной кинетикой деформирования [2].

Вязкость и теплопроводность малы, энтропия в (1.1) есть величина второго порядка малости.

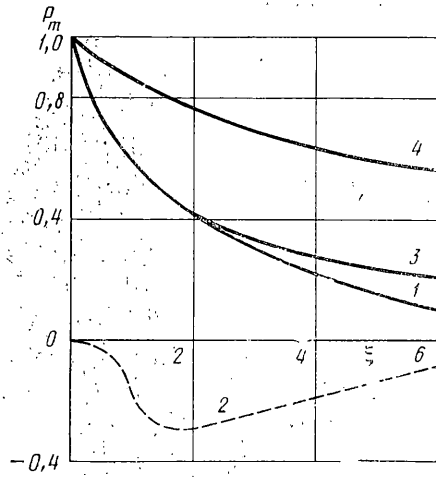
В работе для построения приближенного уравнения применяется развитый в настоящее время асимптотический метод многих масштабов для нелинейных волн [6]. Этот метод применяется для редукции [6] (или факторизации [10, 11]) сложных систем уравнений к одному уравнению (в случае факторизации — к системе независимых уравнений) для функций, являющихся аналогами обычных римановских инвариантов, т. е. постоянных вдоль своих характеристических направлений в акустическом приближении. В основе метода лежит предположение о медленности изменения этих функций, вызванного нелинейностью, вязкостью, кинетическими процессами в среде, расходимостью и т. д.

Для применения техники многомасштабных разложений к системе (1.1), (1.5) и редукции этой системы к более простой, вводится малый параметр $\nu = (c_1^2 - c_0^2)/2c_0^2 = 2\mu/(3K)$, где c_1 — фазовая скорость продольных упругих волн бесконечно малой амплитуды, $c_0^2 = K/\rho_0$, K — модуль всестороннего сжатия, μ — модуль сдвига. Значения ν для ряда металлов $\nu = 0,22$ (медь), $0,31$ (сталь), $0,23$ (алюминий), $0,29$ (титан). Введение этого малого параметра позволяет девиаторную часть тензора напряжений (1.5) рассматривать как величину второго порядка малости (среднее давление — величина первого порядка малости). Уравнение состояния (1.5) возьмем в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}/\rho_0 c_0^2 = -\{\rho' + 1/2(4 + \rho_0^3 c_0^{-2} \partial^2 E/\partial \rho^3|_0) \rho'^2 +$$



Фиг. 1

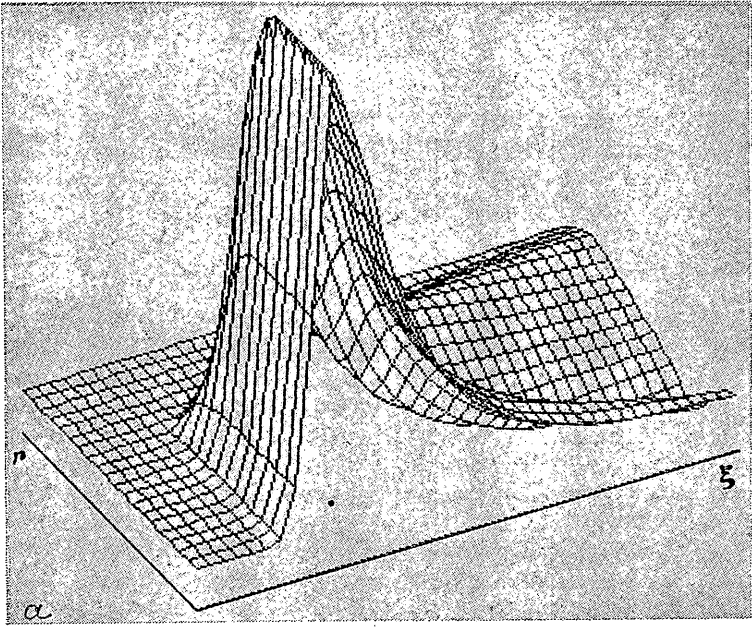


Фиг. 2

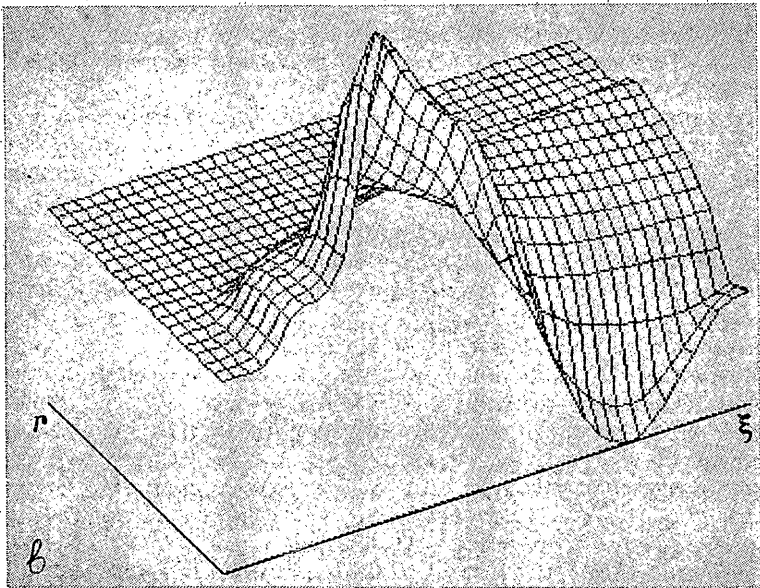
$$+\pi\rho_0^{-1}c_0^{-2}(S-S_0)\delta_{ij}+3\nu(\varepsilon_{ij}^{-1}/sI_1\delta_{ij}) \quad (1.6)$$

Здесь $\rho' = (\rho - \rho_0)/\rho_0$, $\partial E/\partial D|_0 = 2\mu/\rho_0$, $\partial^2 E/\partial \rho \partial S|_0 = \pi/\rho_0^2$. Индекс нуль соответствует ненапряженному состоянию. Вводится также малый параметр ε_1 , характеризующий поперечную расходимость (дифракцию) волны $\partial/\partial x_m' \sim \sim \varepsilon_1^{1/2}$, $m=2, 3$; $x_m' = x_m/(c_0 \Delta t)$, $\varepsilon_1^{1/2}$ пропорционально отношению длины волны к характерным размерам области нагружения при $x_1=0$. После обезразмеривания системы (1.1) с помощью ρ_0 , c_0 , температуры $T_0 = \partial E/\partial S|_0$ и характерного времени Δt из граничного условия, безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности: $\mu_1 = (\xi + 1/3\eta)/\rho_0 c_0^2 \Delta t$, $\mu_2 = \kappa T_0/\rho_0 c_0^4 \Delta t$. Так как кинетика деформирования среды учитывается только членами $\sim \varepsilon \nu$, достаточно ограничиться следующим видом релаксационных членов $\varphi_{ij} = -(\varepsilon_{ij}^{-1}/s I_1 \delta_{ij})/\tau(\varepsilon_{ij}, S)$, τ — безразмерное время релаксации. Необходимость учета кинетики деформирования как в упругой, так и в пластической области течения требует сохранения существенно нелинейного вида зависимости времени релаксации касательных напряжений τ от деформаций (или напряжений). При этом, как показывают оценки [2], в области упругих деформаций, где $\tau \gg 1$, $\varphi_{ij} \ll \varepsilon$, в области пластических деформаций $\varphi_{ij} \sim \varepsilon$, поэтому можно положить $\varphi_{ij} \ll \varepsilon$.

Решение (1.4) с (1.6) ищем в виде квазиплоской волны, распространяющейся вдоль оси x_1 . Напряжение, плотность, скорость ($u_i' = u_i/c_0$) в направлении распространения: σ_{ii}' , ρ' , $u_1' \sim \varepsilon + O(\varepsilon^2 + \varepsilon \nu + \varepsilon \mu_n + \varepsilon \varepsilon_1)$, касательные напряжения $\sigma_{ij}' \sim \varepsilon \nu \varepsilon_1^{1/2}$ ($i \neq j$); u_m' и $\varepsilon_{1m} \sim \varepsilon \varepsilon_1^{1/2}(1 + O(\varepsilon + \nu))$, $m=2, 3$. Так же, как и в акустике ограниченных звуковых пучков [3], следует положить, что вдоль характеристического направления распространения $\xi = \text{const}$ решение изменяется медленнее, чем в поперечных направлениях: $\varepsilon_1^{1/2} > (\varepsilon, \mu_n, \nu)$. Подчеркнем, что акустическое приближение $\sim \varepsilon$ соответствует, как это видно из приведенных оценок, плоской гидродинамической волне, а нелинейность, неоднородность и упруговязкие процессы учитываются в следующем приближении. Далее, решение (1.4), (1.6) разлагается в ряд по малым параметрам ε , ν , μ_i , μ_2 , ε_1 с точностью до квадратичных членов включительно и применяется стандартная техника многомасштабных разложений [6] по этим малым параметрам, аналогично тому, как это сделано в [2]. Формально отличие от [2] заключается в введении малого параметра ε_1 . Кроме указанного выше неравенства, процедура накладывает на малые параметры аналогичные ограничения [6]: все величины, линейные по малым параметрам, должны быть больше, чем лю-



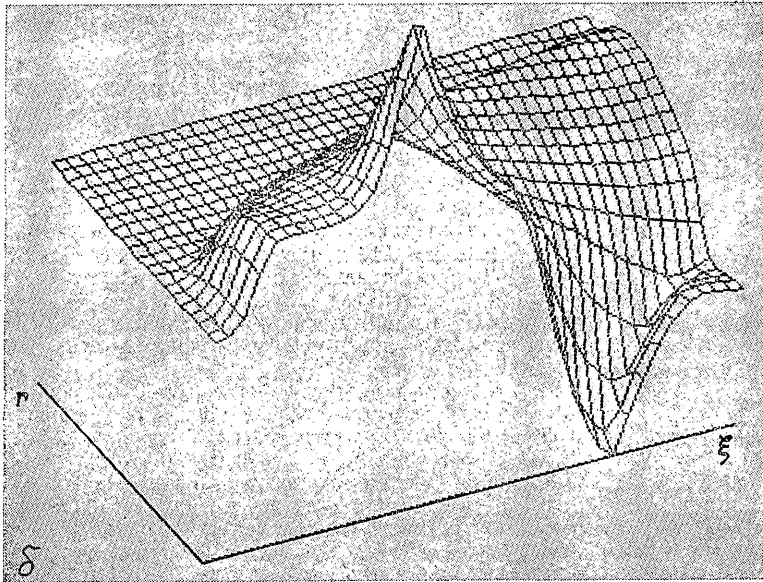
Фиг. 3а



Фиг. 3б

бые их квадратичные комбинации. В результате получается система уравнений

$$\begin{aligned}
 & \partial V / \partial z = 1/4 (\alpha + 2) V \partial V / \partial \xi - 1/2 \mu \partial^2 V / \partial \xi^2 - 3\nu \partial \psi / \partial \xi - \\
 & - 1/2 \epsilon_1 \int_{-\infty}^{\xi} \Delta_{\perp} V d\xi = 0, \quad \partial \psi / \partial \xi = 1/3 \partial V / \partial \xi - \psi / \tau(V, \psi)
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$



Фиг. 3а

где $V=2(-\sigma_{11}')$, $\psi=-(\epsilon_{11}^{-1}/3I_1)$, $z=\int (1+\rho')dx_1/(c_0\Delta t)\simeq(x_1/c_0\Delta t)(1+O(\epsilon))$ — лагранжевая координата по направлению x_1 ; $\xi=t/\Delta t-z$ — бегущая координата, Δ_{\perp} — поперечный лапласиан, для осесимметричной задачи $\Delta_{\perp}=\partial^2/\partial r'^2+\partial/r'\partial r'$, $r'=r/r_0$ ($r=(x_2^2+x_3^2)^{1/2}$) и $\epsilon_1=(c_0\Delta t/r_0)^2$; $\mu^{\sim}=\mu_1+(\pi/\rho_0 T_0)^2\mu_2$ — параметр, характеризующий поглощение за счет вязкости внутреннего трения и теплопроводности, $\pi=\beta\lambda T_0/q$ (q — теплоемкость при отсутствии напряжений, β — коэффициент объемного расширения, λ — коэффициент Ламэ); $\alpha=4+\rho_0^3 c_0^{-2}\partial^3 E/\partial\rho^3|_0$ параметр, характеризующий нелинейность материала, вычисляется с помощью известного двучленного уравнения состояния типа Тэта или Грюнайзена [1].

Уравнения (1.7) описывают распространение волны при нормальном ударе по границе $z=0$ однородного полупространства $z>0$. Уравнения (1.7) учитывают нелинейность материала, поглощение, нелинейную кинетику деформирования и дифракцию волны в поперечных направлениях. Решение (1.7) дает равномерно пригодное по крайней мере на расстояниях $z\lesssim O[\min(\epsilon^{-1}, \epsilon_1^{-1}, (\mu^{\sim})^{-1}, \nu^{-1})]$ первое приближение к решению точной исходной системы (1.1), (1.2).

Следует отметить, что систему (1.7) можно рассматривать как обобщение уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков [7] на среду с нелинейной кинетикой деформирования.

2. На основе полученных уравнений (1.7) численно решена модельная задача о распространении вглубь полупространства ударной волны, инициированной подрывом цилиндрической таблетки взрывчатого вещества на поверхности. Взрывчатое вещество — ТНТ с плотностью 1 г/см³ и скоростью детонации 5,1 км/сек, отношение толщины таблетки к ее радиусу $h_0/r_0=0,4$. Материал полупространства — сталь с параметрами $\rho_0=7,8$ г/см³, $K=170$ ГПа, $\mu=81$ ГПа, $(\alpha+2)/4=1,625$ — из уравнения состояния Тэта для стали.

Зависимость $\tau(V, \psi)$ выбрана в наиболее простом виде, предложенном в [8]:

$$\tau=\tau_*/(|\psi|-\psi_*) \quad (|\psi|>\psi_*), \quad \tau=\infty \quad (|\psi|\leq\psi_*) \quad (2.1)$$

В рассматриваемом случае $\tau_*=10^{-4}$, $\psi_*=3,14\cdot 10^{-3}$. Потребуем, чтобы решение $V(z, \xi, r')$ удовлетворяло следующим начальным и граничным условиям

$$V(z=0, \xi, r')=\epsilon\Phi(\xi)\theta(r')$$

$$V|_{\xi\rightarrow-\infty}=\partial V/\partial\xi|_{\xi\rightarrow+\infty}=0, \quad V|_{r'\rightarrow\infty}=\partial V/\partial r'|_{r'=0}=0$$

где выбрано

$$\theta(r') = \begin{cases} 1, & r' \leq 0,75 \\ (1 - 4(r' - 0,75)^2)^2, & 0,75 < r' < 1,25 \\ 0, & r' \geq 1,25 \end{cases}$$

$\varepsilon\Phi(\xi)$ соответствует решению задачи об отражении плоской детонационной волны от деформируемой стенки [9], причем соударение детонационного фронта с поверхностью полупространства происходит в момент $\xi = t = 0$, $\Phi(0) = 1$. Малый параметр $\varepsilon = 0,145$. Радиальным разлетом продуктов детонации пренебрегаем. Другие малые параметры задачи: $\nu = 0,31$, $\varepsilon_1 = (h_0/r_0)^2 = 0,16$ (характерная длительность волны $\Delta t = h_0/c_0$), значение вязкости $\mu \sqrt{\nu} \approx 10^{-3}$ выбиралось из соображений устойчивости численного решения. Для численного решения поставленной задачи была подобрана экономическая разностная схема расщепления с погрешностью аппроксимации $O(\Delta z^2 + \Delta \xi^2 + \Delta r'^2)$. Результаты расчетов представлены на фиг. 1–3, где обозначено $P = V/\varepsilon = -2\sigma_{11}/(\varepsilon_0 c_0^2)$.

На фиг. 1 показано изменение профиля волны на оси $r=0$ по мере ее распространения вглубь полупространства. Обращает внимание наличие мощной отрицательной фазы (см. также фиг. 3), это чисто двумерный эффект, являющийся следствием боковой разгрузки, и в случае недостаточной прочности материала на разрыв растягивающие напряжения могут привести к внешнему отколу. Учет кинетики деформирования – сильной зависимости τ от ψ – проявляется в виде образования упругого предвестника и зоны упругой разгрузки за гребнем волны, а также второго «предвестника», следующего уже по отрицательной фазе. В отличие от модели идеальной пластичности, выбор времени релаксации в виде (2.1) при $\psi > \psi_*$ приводит на поздних стадиях к увеличению ширины фронта пластической волны, этот эффект уширения ударного фронта за счет механизма релаксации хорошо известен [1].

На фиг. 2 показана зависимость P_m амплитуды ударной волны и волны разгрузки от расстояния при $r=0$ (кривые 1 и 2). Для сравнения приведена та же зависимость в одномерном случае ($\varepsilon_1=0$, кривая 3) и в одномерном случае без учета прочности ($\varepsilon_1=0$, $\nu=0$, кривая 4). Видно, что как прочность так и неоднородность оказывают существенное влияние на затухание ударной волны. Фиг. 3, $a-\varepsilon$, которые соответствуют $x=0,5$; 2,5; 4,5, дают представление об эволюции формы ударного импульса.

Из рассмотренной модельной задачи видно, что несмотря на относительную простоту полученных уравнений (1.7) по сравнению с полной системой (1.1), (1.2), они позволяют учесть все особенности течения.

В заключение авторы выражают благодарность А. Б. Панкратову за помощь в проведении численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
2. Малкин А. И., Мягков Н. Н. О нелинейных волнах в максвелловской среде // ПМТФ, 1986, № 5. С. 158–163.
3. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 174 С.
4. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 С.
5. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ, 1972, № 6. С. 124–144.
6. Лейбович С., Сибасс А. Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргера и Кортевега-де Вриза // Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 113–150.
7. Заболотская Е. А. Нелинейное распространение звуковых пучков в изотропном твердом теле // Проблемы нелинейной акустики: Симпоз. IUPAP – IUTAM по нелинейной акустике. Новосибирск, 1987. Ч. 1. С. 355–359.
8. Мерзиевский Л. А. Ширина фронта стационарной ударной волны в металлах // Физика горения и взрыва, 1987. Т. 23. № 3. С. 132–134.
9. Физика взрыва/Под ред. К. П. Станюковича. М.: Наука, 1975. 704 С.
10. T. Tatsumi, S. Tokunaga. One-dimensional shock turbulence in a compressible fluid // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. No. 3. P. 581–601.
11. Андрианкин Э. И., Малкин А. И. К теории распространения нелинейных волн // Горение и взрыв в Космосе и на Земле. М.: ВАГО, 1980. С. 148–151.