

УДК 539.3

© 1991 г.

В. М. МАКЕЕВ, Ю. А. РОССИХИН

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ СЛАБО АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Методом возмущений исследуется трансформация объемной волны чистого сдвига, бегущей вдоль свободной границы изотропного упругого полупространства, в особую поверхностную волну [1], амплитуда которой не затухает при удалении от поверхности, в случае, когда материал полупространства приобретает слабую анизотропию. В качестве малого параметра используется величина, характеризующая отклонение анизотропных модулей упругости от изотропных [2]. На примере гексагонального слабо анизотропного кристалла показана возможность существования в полупространстве областей распространения трансформированных объемных волн. Для получения характеристик таких волн используется метод растянутых параметров [3].

**1. Постановка задачи.** Пусть упругое анизотропное полупространство занимает область  $y_1 > 0$  и ограничено свободной от напряжений плоскостью  $y_1 = 0$ . Динамическое поведение такого полупространства описывается следующей системой уравнений

$$\lambda_{ijkl} u_{k,j} = \rho u_{i,t}, \quad \lambda_{ijkl} u_{k,t} |_{y_1=0} = 0 \quad (1.1)$$

где  $\lambda_{ijkl}$  — тензор модулей упругости,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\rho$  — плотность,  $t$  — время, запятая после нижнего индекса означает дифференцирование по времени или координате.

Поставим вопрос о том, как найти в кристалле те плоскости и направления в этих плоскостях, вдоль которых распространяются особые поверхностные волны, удовлетворяющие краевой задаче (1.1).

Вообще говоря, поиск волн в анизотропной среде, выходящих на свободную поверхность и обладающих заданными свойствами, несмотря на линейность уравнений (1.1), представляет собой довольно сложную вычислительную задачу, поскольку нужно перебрать большое количество плоскостей и направлений в этих плоскостях, прежде, чем обнаружится нужная пара «плоскость — направление». Вычислительные трудности могут убывать или возрастать в зависимости от вида симметрии кристалла, а также от того, выходит или нет область существования разыскиваемого типа решения на ось или плоскость симметрии кристалла.

Облегчить задачу поиска поверхностных волн с заданными свойствами можно путем введения слабо анизотропной модели [2]:

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}^{(0)} + \varepsilon \mu \lambda_{ijkl}^{(1)} \quad (1.2)$$

где  $\lambda_{ijkl}^{(0)}$  — тензор модулей упругости изотропного материала,  $\lambda_{ijkl}^{(1)}$  — некоторый тензор четвертого ранга,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\varepsilon$  — малый параметр. Такая модель при подходящем выборе упругих параметров является хорошим приближением к исходному кристаллу [4].

Так как особая поверхностная волна всегда поляризована в свободной от напряжений граничной плоскости, то слабо анизотропная модель (1.2)

путем трансформации изотропной объемной волны чистого сдвига позволяет быстро и эффективно находить области существования особых поверхностных волн, а затем прямой численный анализ дисперсионного уравнения, к которому приводит краевая задача (1.1), дает возможность уточнить положение указанных областей и завершить построение искомых решений.

Решение системы (1.1) будем искать в виде суперпозиции трех синфазных волн, распространяющихся вдоль оси  $y_2$ :

$$u_i = \sum_{n=1}^3 A_{i(n)} \exp[-i\omega t + i\omega g^{(0)-1}(y_1 v_{1(n)} + y_2 v_2)], \quad v_2 = i g^{(0)} g^{-1} \quad (1.3)$$

где  $A_{i(n)}$ ,  $g^{(0)}$ ,  $g$ ,  $v_{i(n)}$  — пока неизвестные величины.

Для удобства исследования вводятся углы Эйлера, связывающие систему координат  $y_i$  с системой осей симметрии анизотропного материала  $x_i$  следующим образом:  $\theta$  — угол между осями  $x_3$  и  $y_3$  (угол нутации),  $\psi$  — угол между осью  $x_1$  и линией узлов (угол прецессии),  $\varphi$  — угол между направлением линии узлов и осью  $y_1$  (угол собственного вращения) [5].

Представим амплитуды  $A_i$ , компоненты нормалей  $v_i$  и скорость волны  $g$  вдоль свободной поверхности в виде рядов по  $\varepsilon$ :

$$A_i = \sum_{h=0}^{\infty} A_i^{(h)} \varepsilon^h, \quad v_i = \sum_{h=0}^{\infty} v_i^{(h)} \varepsilon^h, \quad g = \sum_{h=0}^{\infty} g^{(h)} \varepsilon^h \quad (1.4)$$

и разложим вектор амплитуды по трем взаимно ортогональным единичным векторам  $\mathbf{v}^{(0)} = \{0, i, 0\}$ ,  $\mathbf{e}^1 = \{0, 0, i\}$ ,  $\mathbf{e}^2 = \{i, 0, 0\}$ :

$$A_i^{(h)} = h^{(h)} v_i^{(0)} + p^{(h)} e_i^1 + q^{(h)} e_i^2 \quad (1.5)$$

В нулевом приближении решение (1.3) представляет собой волну чистого сдвига, распространяющуюся со скоростью  $g^{(0)} = (\mu/\rho)^{1/2}$ .

В любом приближении, отличном от нулевого, амплитуда квазипродольной волны с учетом (1.4), (1.5) вычисляется по формулам

$$A_{i(3)}^{(n)} = \sum_{s=0}^n \beta_i^{(s)} h_i^{(n-s)}, \quad \beta_i^{(s)} = \kappa^{-1} c_{(3)}^{(0)2} \sum_{m=1}^s L_{ih}^{(m)} \beta_h^{(s-m)} \quad (s=1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

$$L_{ih}^{(m)} = -\mu^{-1} \lambda_{ijkl}^{(0)} \sum_{p=0}^m v_{j(3)}^{(p)} v_{l(3)}^{(m-p)} - s_{ih(3)}^{(m)}$$

$$\beta_h^{(0)} = v_{h(3)}^{(0)}, \quad v_{1(3)}^{(0)} = -(1 - g^{(0)2} c_{(3)}^{(0)2})^{1/2}, \quad v_{2(3)}^{(0)} = v_2^{(0)}, \quad v_{3(3)}^{(0)} = 0$$

$$\kappa = c_{(3)}^{(0)2} g^{(0)2} - 1, \quad s_{ih(n)}^{(p)} = \lambda_{ijkl}^{(1)} \sum_{r=0}^{p-1} v_{j(n)}^{(r)} v_{l(n)}^{(p-r)}$$

а приближения для скоростей определяются из уравнений

$$\beta_i^{(s)} v_{i(3)}^{(0)} = 0 \quad (1.7)$$

где  $c_{(3)}^{(0)}$  — скорость объемной волны сжатия. Здесь и в дальнейшем нижние индексы 3 и  $\alpha=1, 2$ , стоящие в скобках, относятся в нулевом приближении к продольной и двум слившимся поперечным волнам соответственно, а в остальных приближениях — к квазипродольной и двум отдельным квазипоперечным волнам. При этом индексы  $\alpha=1, 2$  ставятся только у тех ве-

личин, которые принимают различные значения на квазипоперечных объемных волнах.

Первые приближения уравнений (1.1) для квазипоперечных волн дают два условия существования

$$\lambda_{1232}^{(1)} = 0, \quad q_{(\alpha)}^{(0)} = 0, \quad \lambda_{1212}^{(1)} - \lambda_{3232}^{(1)} \neq 0 \quad (1.8)$$

$$\lambda_{1232}^{(1)} = 0, \quad \lambda_{1212}^{(1)} - \lambda_{3232}^{(1)} = 0 \quad (1.9)$$

которые накладывают ограничения на направления распространения этих волн  $\varphi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  и на их амплитуды.

По направлениям, удовлетворяющим условиям (1.8) распространяются особые поверхностные волны, поляризованные в свободной от напряжений плоскости [1].

$$A_{i(3)}^{(1)} = 0, \quad h_{(\alpha)}^{(1)} = -1/2\kappa^{-1}\lambda_{2232}^{(1)}P^{(0)}, \quad p_{(\alpha)}^{(1)} = 1/2P^{(1)} \quad (1.10)$$

$$q_{(\alpha)}^{(1)} = 0, \quad v_{1(1)}^{(1)} + v_{1(2)}^{(1)} = -2v_2^{(0)}\lambda_{1323}^{(1)}$$

где  $P^{(0)}$ ,  $P^{(1)}$  — произвольные величины. Из (1.10) следует, что по направлениям, удовлетворяющим условиям (1.8), распространяются особые поверхностные волны, поляризованные в свободной от напряжений плоскости [1].

При выполнении условия (1.9) характеристики волн определяются соотношениями

$$h_{(3)}^{(1)} = \{[\lambda_{1132}^{(1)} - \kappa^{-1}(\kappa - 1)\lambda_{2232}^{(1)}\tau - 2v_2^{(0)}(v_{1(1)}^{(1)} - v_{1(2)}^{(1)})]\}p^*$$

$$h_{(\alpha)}^{(1)} = [-\kappa^{-1}(a_{(\alpha)}\lambda_{2232}^{(1)} + \lambda_{2212}^{(1)}) + v_2^{(0)}v_{1(\alpha)}^{(1)}]p^*$$

$$p_{(\alpha)}^{(1)} = (-1)^{\alpha+1}[a_{(\alpha)}p^{**} + (a_{(1)}U_{(2)} - a_{(2)}U_{(1)} - a_{(1)}a_{(2)}R)p^*\tau^{-1}]$$

$$q_{(\alpha)}^{(1)} = (-1)^{\alpha+1}[p^{**} + (U_{(2)} - U_{(1)} - a_{(\alpha+1)}R)p^*\tau^{-1}]$$

$$a_{(1)}v_{1(1)}^{(1)} - a_{(2)}v_{1(2)}^{(1)} = -v_2^{(0)}\tau\lambda_{1323}^{(1)}, \quad g^{(1)} = 1/2g^{(0)}\lambda_{1212}^{(1)}$$

$$2g^{(0)-1}g^{(2)}a_{(\alpha)}^{2-j} + w_{j(\alpha)}v_{1(\alpha)}^{(1)2} + r_{j(\alpha)}v_{1(\alpha)}^{(1)} + \omega_{j(\alpha)}^{(1)} = 0 \quad (j=1, 2)$$

$$a_{(1)}v_{1(1)}^{(2)} - a_{(2)}v_{1(2)}^{(2)} + (a_{(1)}U_{(2)} - a_{(2)}U_{(1)})(v_{1(1)}^{(1)} - v_{1(2)}^{(1)})\tau^{-1} = Q$$

$$\Phi_{1(\alpha)}a_{(\alpha)} + \Phi_{2(\alpha)} = 0 \quad (1.11)$$

$$\Phi_{j(\alpha)} = 2g^{(0)-1}g^{(3)}a_{(\alpha)}^{2-j} + r_{j(\alpha)}^{(2)}v_{1(\alpha)}^{(2)} + \omega_{j(\alpha)}^{(2)}, \quad a_{(\alpha)} = -B_{2(\alpha)}B_{1(\alpha)}^{-1}$$

$$B_{1(\alpha)} = -2v_2^{(0)}v_2^{(2)} - v_{h(\alpha)}^{(1)}v_{h(\alpha)}^{(1)} + s_{ih(\alpha)}e_i^1e_k^1 - \kappa^{-1}(s_{ih}^{(1)}v_i^{(0)}e_k^1)^2$$

$$B_{2(\alpha)} = s_{ih(\alpha)}^{(2)}e_i^1e_k^2 + s_{ih}^{(1)}e_i^1v_k^{(0)}(v_2^{(0)}v_{1(\alpha)}^{(1)} - \kappa^{-1}s_{ih}^{(1)}v_i^{(0)}e_k^2)$$

$$U_{(\alpha)} = [(r_{1(\alpha)}^{(2)} - a_{(\alpha)}r_{2(\alpha)}^{(2)})v_{1(\alpha)}^{(2)} + \omega_{1(\alpha)}^{(2)} - a_{(\alpha)}\omega_{2(\alpha)}^{(2)}][B_{1(\alpha)}(1 + a_{(\alpha)}^2)]^{-1}$$

$$p^* = P^{(0)}\tau^{-1}, \quad p^{**} = P^{(1)}\tau^{-1}, \quad \tau = a_{(1)} - a_{(2)}, \quad a_{(3)} = a_{(1)}$$

Здесь величины  $w_{j(\alpha)}$ ,  $r_{j(\alpha)}^{(1,2)}$ ,  $\omega_{j(\alpha)}^{(1,2)}$ ,  $R$ ,  $Q$  зависят от  $\varphi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  и из-за громоздкости не приводятся.

Эта волна, в отличие от предыдущей, не является в строгом смысле особой поверхностной волной, так как, во-первых, она произвольно поляризована, а во-вторых, может затухать с глубиной (см. п. 2). Поскольку в

направлении распространения она не затухает; то будем называть эту волну устойчивой поверхностной волной [6].

**2. Пример.** Рассматривается задача о распространении объемных волн в слабо анизотропном кристалле гексагональной симметрии, ось изотропии которого совпадает с осью  $x_3$ . Ненулевые компоненты  $\lambda_{ijkl}^{(1)}$  модулей упру-

гости в системе осей  $x_i$  обозначим следующим образом  $\lambda_{1133}^{(1)} = \lambda_{2233}^{(1)} = m_1$ ,

$\lambda_{3333}^{(1)} = m_2$ ,  $\lambda_{1313}^{(1)} = \lambda_{2323}^{(1)} = m_3$ . Тогда соотношения (1.8), (1.9) запишутся в следующем виде

$$\Delta^{(0)} \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0, \quad \Delta^{(0)} Y \neq 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta^{(0)} \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0, \quad \Delta^{(0)} Y = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta^{(0)} = \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - d, \quad Y = \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0$$

$$d = m_3 B^{-1}, \quad B = 2m_1 - m_2 + 4m_3$$

Ввиду симметрии задачи ограничимся изменением углов в пределах от 0 до  $\pi/2$ .

Сначала рассмотрим более общий случай (2.2), который разбивается на четыре подслучая: 1.  $\Delta^{(0)} = 0$ ,  $\varphi_0 \neq 0$ ,  $\theta_0 \neq \pi/2$ ; 2.  $\Delta^{(0)} = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ; 3.  $\Delta^{(0)} = 0$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ ; 4.  $\Delta^{(0)} \neq 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ . Условия 1, 2, 3 имеют смысл, если  $0 < d < 1$ .

Для уточнения характера поведения волны применяется растяжение параметров  $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$ ,  $\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots$ .

Решение (1.6), (1.7), (1.11) при выполнении условия 1 неоднозначно, так как

$$v_{1(1)}^{(1)} = -v_2^{(0)} m_3 dv \pm (\Delta^{(1)} Y^{-1})^{1/2}$$

$$v_{1(2)}^{(1)} = v_2^{(0)} m_3 (1 - 2d) v \mp \sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \theta_0 (\Delta^{(1)} Y^{-1})^{1/2}$$

$$\Delta^{(1)} = [m_3^2 (1 - 3d) v^2 + \kappa^{-1} m^2 d - 2B \sin \theta_0 \cos^2 \varphi_0 \Omega] \cos^4 \theta_0 \quad (2.3)$$

$$\Omega = \varphi_1 v \sin \theta_0 - \theta_1 \cos \theta_0, \quad m = m_1 + m_3, \quad v = \operatorname{tg} \varphi_0$$

где верхний знак соответствует одному типу поверхностных волн, нижний — другому.

Для удобства интерпретации двух типов волн введем двулистную риманову поверхность: верхний лист соответствует верхнему знаку в (2.3), нижний — нижнему, причем каждый из листов несет свой тип волн. Листы римановой поверхности склеиваются вдоль кривой.

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_{1\Delta}, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_{1\Delta}$$

$$\theta_{1\Delta} = \{d(1+v^2)^3 [1-d(1+v^2)]\}^{1/2} (R_1 v - R_2) T^{-1}$$

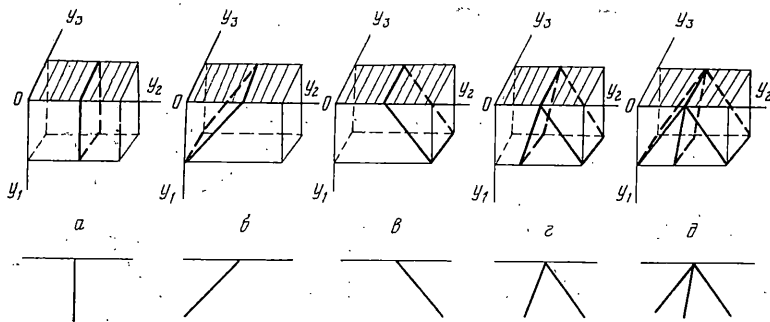
$$\varphi_{1\Delta} = R_1 - v(R_1 v - R_2) T^{-1}, \quad T = (1+v^2) [1-d(1+v^2)] + v^2$$

$$R_1 = m_3 v (1 - 3d), \quad R_2 = 1/2 R_1 v + m^2 d (2m_3 \kappa)^{-1} \quad (2.4)$$

Вдоль линии склейки (2.4) реализуется устойчивое решение, которое представляет собой суперпозицию трех типов волн, две из них (квазипродольная и одна из квазипоперечных волн) затухают с глубиной, а третья — нарастает.

Наряду с линией склейки существует еще одна линия, вдоль которой на каждом листе римановой поверхности решение также является устойчивым. Эта линия определяется уравнениями

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_{1W}, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_{1W} \quad (2.5)$$



Фиг. 1

где коэффициенты растяжения  $\varphi_{1W}$ ,  $\theta_{1W}$  определяются аналогично  $\varphi_{1A}$ ,  $\theta_{1A}$ , если  $R_1$ ,  $R_2$  заменить соответственно на  $R_1^{-1/2}dm_3vw^2 + 1/4m_3Yw(1+rv^{-2})$ ,  $R_2 + 1/8m_3Yw^2$ , где  $w=v-rv^{-1}$ ,  $r=lm_3^{-1}$ ,  $l=m_3-\kappa^{-1}m$ .

Волна вдоль направлений, определяемых из (2.5), на одном листе римановой поверхности является трехпарциальной, причем квазипоперечные составляющие не затухают с глубиной, а квазипродольная затухает (волна типа Гудье — Бишопа [7]). На втором листе римановой поверхности решение состоит из двух однородных квазипоперечных волн, то есть волн, не затухающих с глубиной (волна типа отражения). Эти волны условно изображены на фиг. 1, г, д.

Решения, полученные из (1.6), (1.7), (1.11), существуют в каждой точке линии (2.5), за исключением окрестности точки  $\varphi_0=0$  ( $v=0$ ).

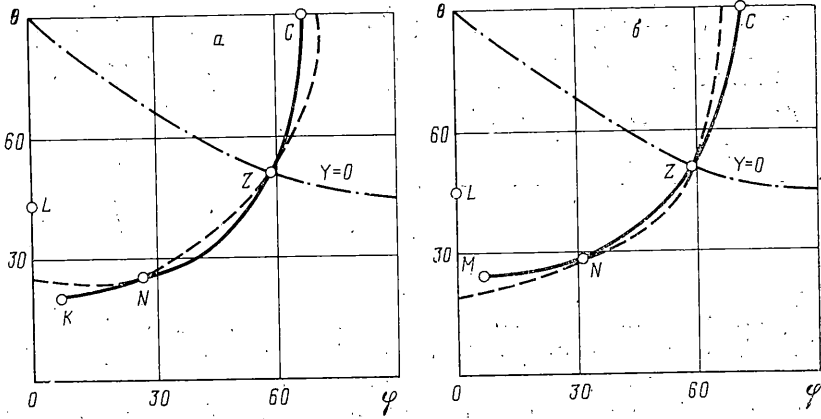
При подходе к точке  $\varphi_0=0$  волновые характеристики и параметры растяжения, начиная с первого приближения, неограниченно возрастают, причем с увеличением номера приближения сингулярность решения нарастает. Для регуляризации решения в окрестности этой точки применим преобразование сдвига особенности  $v=s+\varepsilon f(s)+\dots$ . Функция  $f(s)$  определяется из условия уничтожения главной особенности в первом приближении амплитуд и имеет вид  $f(s)=bs^{-2}$ ,  $b=1/4rl(1-d)^2$ . При таком выборе функции  $f(s)$  главная особенность уничтожается одновременно для всех характеристик волны. Можно показать, что в регуляризованных разложениях характеристик отношение любого последующего члена к предыдущему, начиная со второго, ограничено и имеет один и тот же порядок  $s^{-2}$ , что соответствует требованиям, предъявляемым к сходимости асимптотических рядов [3].

На кривой (2.5) существуют особые точки, которым на листах римановой поверхности может соответствовать вырождение решений. Местоположение этих точек определяется параметром  $r$ .

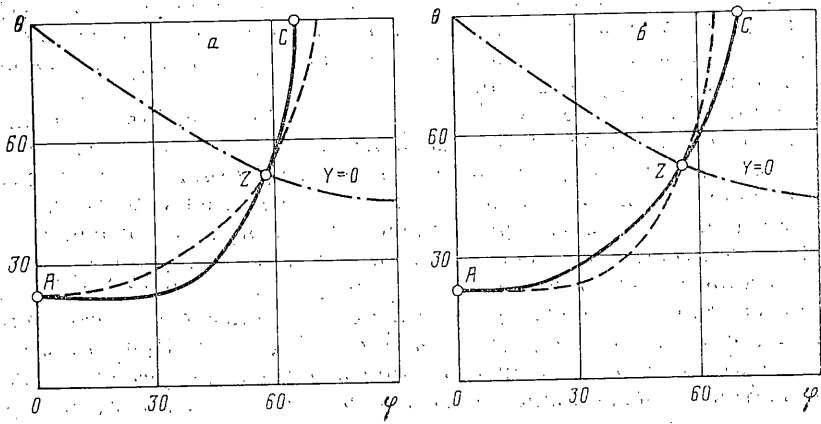
На фиг. 2, а—4, а изображается положение кривой (2.5) (сплошная линия) относительно линии склейки (штриховая линия) в случае  $\varepsilon m_3 > 0$ , а на фиг. 2, б—4, б — в случае  $\varepsilon m_3 < 0$ . При этом фиг. 2, а, б соответствуют условию  $r > 0$ , фиг. 3, а, б — условию  $r = 0$ , а фиг. 4, а, б — условию  $r < 0$ . Штрихпунктирная линия описывается уравнением  $Y=0$  и делит первый квадрант на две области, в каждой из которых функция  $Y$  сохраняет знак (в области над линией  $Y < 0$ , а под линией  $-Y > 0$ ).

Координаты граничной точки  $K(\varphi_K, \theta_K)$  соответствуют значению  $v=v_K=4/3(3\varepsilon b)^{1/4}$  и определяются из (2.5), а координаты граничной точки  $M(\varphi_M, \theta_M)$  находятся при значениях параметра  $s=s_M=(-\varepsilon b)^{1/4}$  (этому значению параметра соответствует  $v=v_M=0$ ) по формулам, аналогичным (2.5), если в них заменить параметр  $v$  на параметр  $s$ :

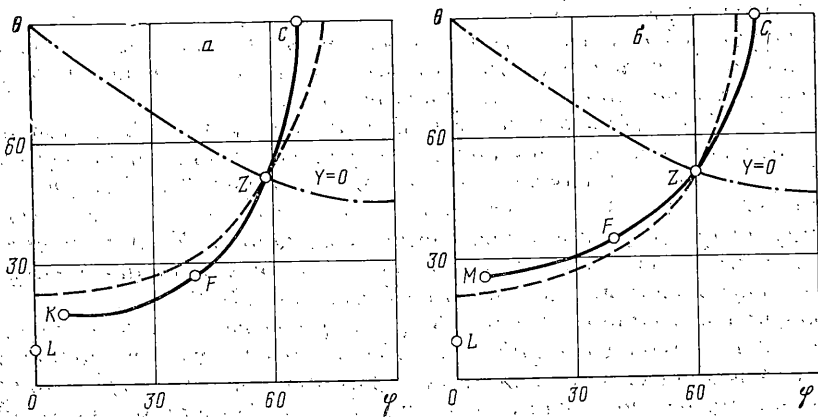
$$\begin{aligned} \varphi_K &= 1,2(3\varepsilon b)^{1/4}, \quad \theta_K = \arcsin d^{1/2} + 0,6(3\varepsilon b/r_1)^{1/2} \\ \varphi_M &= (-\varepsilon b)^{1/4}, \quad \theta_M = \arcsin d^{1/2} + 1,5(-\varepsilon b/r_1)^{1/2}, \quad r_1 = (1-d)/d \end{aligned} \quad (2.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из выражений (2.7) следует, что рассматриваемые устойчивые решения в общем случае не выходят на плоскости симметрии  $\varphi_0=0$ , что, как уже отмечалось, затрудняет поиск таких решений численным путем.

При  $r \neq 0$  вырождения решений в граничных точках не происходит; при  $r=0$  точки  $M$  и  $K$  сливаются с точкой  $A$ , координаты которой определяются из (2.4) при  $v=0$  и решения на листах римановой поверхности и на линии склейки одновременно вырождаются в особую поверхностную волну (подслучай 2). При этом амплитуды всех парциальных волн, кроме второй квазипоперечной волны, обращаются в ноль. Фронт этой волны перпендикулярен свободной поверхности, а вектор перемещений параллелен ей (фиг. 1, а).

На линии  $\theta=\pi/2$  кривая (2.5) при любом  $r$  ограничена точкой  $C$  (подслучай 3), координаты которой определяются из (2.5) при  $v=v_1=r_1^{1/2}$ . Решения, соответствующие обеим римановым поверхностям, в точке  $C$  вырождаются в волну чистого сдвига, фронт которой, в отличие от изотропного случая, наклонен к свободной поверхности (фиг. 1, б, в). В этом случае в ноль обращаются амплитуды всех парциальных волн, кроме первой квазипоперечной.

При  $r > 0$  существует точка касания линий (2.4) и (2.5), координаты которой определяются при значении параметра  $v=v_N=r^{1/2}$ . В точке  $N$  решение вырождается в двухпарциальную однородную волну типа отражения, причем в окрестности точки  $N$ , в отличие от окрестности точки  $Z$ , решения переходят с верхнего листа римановой поверхности на нижний и наоборот. При  $r=0$  точка  $N$  сливается с точкой  $A$ , а однородная поверхностная волна переходит в особую поверхностную волну. При  $r=r_1$  точка  $N$  сливается с точкой  $C$  и решение вырождается в волну чистого сдвига. При  $r < 0$ , а также при  $r > r_1$  точка  $N$  исчезает.

Если коэффициенты  $m_i$  удовлетворяют условию  $r < 0$ , то в точке  $F$ , координаты которой определяются из (2.5) при  $v=v_2=(-r)^{1/2}$ , на одном листе римановой поверхности реализуется волна типа Гудье — Бишопа, а на другом листе — волна типа отражения вырождается в особую поверхностную волну. Это вырождение, в отличие от вырождения в точках  $A$  и  $C$ , связано с совпадением двух квазипоперечных волн (акустическое вырождение). Если  $r=0$ , то точка  $F$  совпадает с точкой  $A$ , если  $r=-r_1$ , — с точкой  $C$ . При этом решения в точке  $F$  переходят в вырожденные решения, соответствующие точкам  $A$  и  $C$ . Если  $r < -r_1$  или  $r > 0$ , точка  $F$  исчезает.

Анализ решения типа отражения показывает, что характер расположения двух квазипоперечных парциальных волн относительно нормали к граничной плоскости и относительно друг друга зависит от интервалов изменения параметров  $d, r, v$ , а также от знака величины  $\epsilon m_3$ .

При этом парциальные волны могут располагаться как по обе стороны от нормали, так и справа или слева от нее. Изменение характера расположения волн происходит при следующих значениях параметров:  $d = \pm 1/3, 1/2$ ;  $r = 1-r_1, 2-r_1, 2(1-r_1), (1+d)d^{-1}-(8r_1)^{1/2}, -r_1$ ;  $v = v_1, v_2, \{1/2[r_2 \pm (r_2^2 - 4r_1 r)^{1/2}]\}^{1/2}, r_2^{1/2}$ , где  $r_2 = r + r_1 - 2$ .

Подслучай 4 соответствует распространению волны чистого сдвига вдоль оси изотропии гексагонального кристалла.

При выполнении условий (2.1) по направлениям  $\theta_0=0$  ( $\varphi$  — любое) распространяется волна чистого сдвига, а по направлениям  $\theta_L = \theta_0 + \epsilon \theta_1$ ,  $\varphi = 0$ , где

$$\theta_0 = \arcsin \left\{ d \left[ 1 + \frac{\kappa r}{\kappa - 1} \right] \right\}^{1/2}; \quad \theta_1 = - \frac{m_1 \kappa (m_1 \sin^2 \theta_0 + l)}{B(\kappa - 1)^2 \sin 2\theta_0}$$

распространяется особая поверхностная волна. Последнее направление отмечено на фиг. 2—4, а, б точкой  $L$ . Полученное в точке  $L$  решение совпадает с точностью до  $\epsilon^2$  с решением, описанным в [8] для гексагонального

кристалла конечной анизотропии. При  $r=0$  точка  $L$  совпадает с точкой  $A$ , а соответствующее ей решение — с решением в точке  $A$ . При значениях  $\epsilon m_3 > 0$  по направлениям, удовлетворяющим условию  $\theta > \theta_L$ ,  $\varphi = 0$ , распространяются устойчивые двухпарциальные волны, у которых одна квази-поперечная составляющая затухает с глубиной, другая — нарастает; по направлениям  $\theta < \theta_L$ ,  $\varphi = 0$  распространяются двухпарциальные однородные волны типа отражения. При  $\epsilon m_3 < 0$  эти волны меняют свое положение относительно точки  $L$  на линии  $\varphi = 0$ . При  $\varphi \neq 0$  волна в окрестности точки  $L$  становится оттекающей [9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альшиц В. И., Лоте Е. Упругие волны в триклинных кристаллах. III. // Кристаллография. 1979. № 24. Вып. 6. С. 1122–1130.
2. Россихин Ю. А. Волны в слабо анизотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 160–162.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 456 с.
4. Макеев В. М., Россихин Ю. А. Использование слабо анизотропных моделей для описания динамического поведения монокристаллов // Акуст. ж. 1990. Т. 36. № 1. С. 76–80.
5. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 488 с.
6. Фельсен Л. Квазиоптические методы в дифракции. // Квазиоптика. М.: Мир. 1966. С. 11–62.
7. Goodier J. N., Bishop R. E. D. A note on critical reflections of elastic waves at free surfaces // J. Appl. Phys. 1952 V. 23. N 1. P. 124–126.
8. Альшиц В. И., Лоте Е. О поверхностных волнах в гексагональных кристаллах // Кристаллография. 1978. № 23. Вып. 5. С. 901–913.
9. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука. 1981. 288 с.

Воронеж

Поступила в редакцию  
29.VI.1988