

УДК 539.3

© 1991 г.

Л. М. ФИЛИПОВА, А. Н. ЦВЕТКОВ, М. И. ЧЕБАКОВ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОГО БАНДАЖА
С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ
УПРУГИМ КОНЕЧНЫМ ЦИЛИНДРОМ

Изучено влияние предварительного осевого растяжения или сжатия кругового упругого цилиндра конечной длины на его контактную жесткость и распределение контактных напряжений при взаимодействии с жестким бандажом меньшего радиуса. Предполагается, что бандаж расположен на боковой поверхности цилиндра симметрично и без трения, а торцы цилиндра взаимодействуют с жесткой гладкой поверхностью. Используется модель нелинейного упругого изотропного несжимаемого материала общего вида [1-3]. Задача сведена к парному ряду уравнений, для решения которого используется метод преобразования его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов [4, 5]. После обращения главной сингулярной части матрицы полученная система второго рода решается методом редукции. Численные результаты получены для материала Муни.

1. В цилиндрической системе координат (r, z) рассмотрим сплошной круговой цилиндр $r \leq R, |z| \leq b$ из нелинейного упругого изотропного несжимаемого материала. Цилиндр предварительно подвергнут однородному осевому растяжению или сжатию и закреплен торцами между гладкими жесткими поверхностями таким образом, что отсутствуют нормальные перемещения и трение. На описанную деформацию, которая считается конечной, накладывается малая осесимметричная деформация, вызванная внедрением в поверхность цилиндра при $|z| \leq a$ жесткого бандажа, при этом трение между цилиндром и бандажом отсутствует, а бандаж имеет радиус $R - \delta, \delta > 0$.

Используя [1-3], для добавочной деформации получим линеаризованные уравнения

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0$$

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

$$\partial u / \partial r + u / r + \partial w / \partial z = 0 \quad (4.1)$$

$$\mu = \lambda^{-4} \Pi_{11} + 2\lambda^{-1/2} \Pi_1 - 2\lambda^{1/2} \Pi_{13} + \lambda^2 \Pi_{33} \quad (4.2)$$

$$\gamma = \frac{\lambda \Pi_3 - \lambda^{-1/2} \Pi_1}{\lambda^3 - 1}, \quad \kappa = \frac{\lambda^4 \Pi_3 - \lambda^{5/2} \Pi_1}{\lambda^3 - 1}$$

$$\Pi_s = \partial \Pi / \partial \lambda_s, \quad \Pi_{ks} = \partial^2 \Pi / \partial \lambda_s \partial \lambda_k \quad (k, s = 1, 2, 3)$$

Здесь u, w — радиальная и осевая составляющие вектора добавочных перемещений, σ — добавочное нормальное напряжение в сечениях цилиндра $z = \text{const}$, $\Pi = \Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ упругий потенциал материала, заданный как

функция главных растяжений λ_k . В рассматриваемом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^{-3/2}$, $\lambda_3 = \lambda$, причем $(\lambda - 1)$ — относительное осевое удлинение в начальном деформируемом состоянии. В (1.1) учтено, что начальное напряженное состояние является одноосным и, следовательно, отлично от нуля только нормальное напряжение t_{zz} .

Граничные условия поставленной контактной задачи имеют вид при $z = \pm b$:

$$\nu \partial w / \partial r + \kappa \partial u / \partial z = 0, \quad w = 0 \quad (1.3)$$

при $r = R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \psi \frac{u}{r} + \sigma = 0 \quad (a < |z| < b) \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial r = 0, \quad u = \delta \quad (|z| \leq a) \\ \psi = \lambda^{-1} \Pi_{12} - 2\lambda^{-1/2} \Pi_{13} + \lambda^2 \Pi_{33} + \lambda^{-1/2} \Pi_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Краевые условия (1.3) на торцах цилиндра будут удовлетворены, если решение уравнений (1.1) разыскивать в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r) \cos p_n z, \quad p_n = n\pi/b \quad (1.5)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(r) \sin p_n z, \quad \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(r) \cos p_n z$$

Из уравнений (1.1) вытекает, что $U_0 = 0$, $B_0 = \text{const}$.

Более подробно исследуем случай материала Муни, для которого

$$\Pi = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3) \quad (1.6)$$

где C_1, C_2 — известные постоянные. Из (1.2), (1.4) для материала Муни получим

$$\begin{aligned} \mu &= 2\lambda^{-1}(3 + \lambda^3)(C_1 + C_2\lambda^{-1}) \\ \nu &= 2\lambda^{-1}(C_1 + C_2\lambda^{-1}), \quad \kappa = 2\lambda^2(C_1 + C_2\lambda^{-1}) \\ \psi &= 2C_1\lambda^{-1}(1 + \lambda^3) + 2C_2\lambda^{-2}(3 - \lambda^3) \end{aligned}$$

Подставляя (1.5) в уравнения (1.1), с учетом (1.6) получим систему уравнений для определения U_n, W_n и B_n , из которых найдем

$$\begin{aligned} U_n &= A_{n1} I_1(p_n r) + A_{n2} I_1(\lambda^{3/2} p_n r) \\ W_n &= -A_{n1} I_0(p_n r) + A_{n2} \lambda^{3/2} I_0(\lambda^{3/2} p_n r) \\ B_n &= -\nu p_n [2A_{n1} I_0(p_n r) + \lambda^{3/2} A_{n2} (1 + \lambda^3) I_0(\lambda^{3/2} p_n r)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

где A_{n1}, A_{n2} — постоянные, $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Из первого граничного условия (1.4) получим

$$A_{n2} = -A_{n1} \frac{2I_1(p_n R)}{(1 + \lambda^3) I_1(\lambda^{3/2} p_n R)} \quad (1.8)$$

Удовлетворяя оставшимся граничным условиям из (1.4), получим парный ряд — уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k K(\beta_k) \cos \beta_k y = \delta \quad \left(|y| \leq \frac{a}{R} \right) \\ \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \cos \beta_k y = 0 \quad \left(\frac{a}{R} < |y| \leq \frac{b}{R} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 K(u) &= [(1+\lambda^3)^2 - 4\lambda^{3/2}] I_1(u) I_1(u\lambda^{3/2}) / \Delta(u) \\
 \Delta(u) &= (1+\lambda^3)^2 u I_0(u) I_1(u\lambda^{3/2}) - \\
 &- 4\lambda^{3/2} u I_0(u\lambda^{3/2}) I_1(u) - 2(1-\lambda^3) I_1(u) I_1(u\lambda^{3/2}) \\
 \delta^* &= R^{-1} 2\mu\Omega\delta + 1/2 K(0) p b^{-1}, \quad \beta_k = p_k R \\
 \Omega &= (1+C\lambda^{-1}) [(1+\lambda^3)^2 - 4\lambda^{3/2}] C = C_1/C_2 \\
 K(0) &= [(1+\lambda^3)^2 - 4\lambda^{3/2}] / (\lambda^3 - 1) / (\lambda^3 + 2) \\
 \mu &= 2(C_1 + C_2)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

В (1.10) μ — модуль сдвига материала в недеформированном состоянии. Неизвестные коэффициенты Q_k уравнения (1.9) связаны с постоянными A_{k1} из (1.7) соотношением

$$Q_k = A_{k1} \frac{\Delta(\beta_k)(\lambda C_1 + C_2)}{\lambda^2(1+\lambda^3) R I_1(\lambda^{3/2}\beta_k)} \quad (k \geq 1), \quad Q_0 = B_0 \tag{1.11}$$

Тогда с учетом (1.5), (1.7), (1.8) и (1.11) искомые контактные давления под штампом через решение уравнения (1.9) найдем по формуле

$$\sigma_r(R, z) = q(z/R) \quad (|z| \leq a) \tag{1.12}$$

$$q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} Q_h \cos \beta_h x \quad \left(|x| \leq \frac{a}{R} \right)$$

2. Для решения парного ряда-уравнения воспользуемся методом сведения его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей [4–5]. Функция $K(u)$ из парного ряда обладает необходимыми для этого свойствами. Для преодоления в дальнейшем трудностей, связанных с факторизацией функции $K(u)$, аппроксимируем ее на действительной оси функцией

$$L(u) = \frac{\text{th } Au}{u} \prod_{h=1}^s \frac{u^2 + p_h^2}{u^2 + q_h^2}, \quad A = K(0) \tag{2.1}$$

Поведение функции (2.1) на бесконечности и в нуле совпадает с поведением функции $K(u)$, числа s , p_h и q_h ($1 \leq k \leq s$) выбираются из условия наилучшего приближения. Погрешность полученного после аппроксимации приближенного решения не превышает погрешности аппроксимации [6].

Согласно предложенному методу парный ряд-уравнение (1.9) для случая $\delta^* = \cos i\epsilon y$ равносильно бесконечной системе

$$BX = D \tag{2.2}$$

в которой $B = \{b_{mn}\}$ — матрица, $X = \{x_n\}$, D — векторы. Элементы матрицы и правой части системы (2.2) при этом имеют вид

$$\begin{aligned}
 b_{mn} &= [\gamma_m \text{ch } \delta_n^* + \delta_n \text{sh } \delta_n^* - A_m (\gamma_m \text{ch } \delta_n^* \text{sh } \gamma_m^* - \\
 &- \delta_n \text{sh } \delta_n^* \text{ch } \gamma_m^*)] [(\delta_n^2 - \gamma_m^2) \text{ch } \delta_n^*]^{-1} \\
 d_m &= [-\gamma_m \text{ch } \epsilon^* - \epsilon \text{sh } \epsilon^* + A_m (\gamma_m \text{sh } \gamma_m^* \text{ch } \epsilon^* - \epsilon \text{sh } \epsilon^* \text{ch } \gamma_m^*)] \times \\
 &\times [(\epsilon^2 - \gamma_m^2) K(i\epsilon)]^{-1} \\
 A_m &= \exp(-\gamma_m b/R) \text{sh}^{-1}(\gamma_m b/R)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

| λ | P_1 | P_2 | q_1 | q_2 | % |
|-----------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0,8 | 1,8124 | 3,7757 | 2,7130 | 2,5324 | 2,0 |
| 0,95 | 1,2551 | 2,2358 | 1,6610 | 1,7056 | 1,9 |
| 1,05 | 0,8786 | 1,4460 | 1,1503 | 1,1166 | 2,2 |
| 1,2 | 10,556 | 10,633 | 8,6250 | 12,898 | 1,8 |
| 1,5 | 5,4246 | 5,4323 | 4,2741 | 6,8659 | 0,8 |

где введены следующие обозначения: $\delta_n^* = \delta_n a/R$, $\gamma_m^* = \gamma_m a/R$, $\varepsilon^* = \varepsilon a/R$; $i\delta_n, i\gamma_m$ — являются нулями и полюсами функции $K(u)$.

Для случая $\delta^* = \cos i\varepsilon u$ функция (1.12) через решение бесконечной системы (2.2) выразится соотношением

$$q_\varepsilon(x) = \frac{\cos i\varepsilon x}{K(i\varepsilon)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\operatorname{ch} \delta_n x}{\operatorname{ch} \delta_n a} \quad \left(|x| \leq \frac{a}{R} \right) \quad (2.4)$$

При $\varepsilon=0$ таким же образом строится как частный случай решение парного ряда (1.9), когда $\delta^*=1$, и следовательно, с учетом (1.10) для поставленной задачи получаем выражение для контактных напряжений

$$q(x) = \frac{2\mu\delta}{a} q_*(x), \quad q_*(x) = \Omega \left(\frac{a}{R} + \frac{aK(0)P_*}{2b\Omega} \right) q_0(x) \quad (2.5)$$

где $q_0(x)$ есть (2.4) при $\varepsilon=0$, а

$$P_* = Q\Omega \left(1 - \frac{PK(0)}{2b} Q \right)^{-1}, \quad Q = \frac{2a}{RK(0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\operatorname{sh} \delta_n a/R}{\delta_n \operatorname{ch} \delta_n a/R} \quad (2.6)$$

В (2.6) x_n — решение бесконечной системы (2.2) — (2.3) при $\varepsilon=0$.

Используя (2.5), найдем интегральную величину, характеризующую жесткость системы цилиндр — бандаж

$$P = \int_{-a}^a q \left(\frac{z}{R} \right) dz = 2\mu\delta P_* \quad (2.7)$$

В системе (2.2) матрица B сингулярна, ее диагональные элементы не убывают с ростом номера, что можно показать с учетом поведения нулей и полюсов функции $L(u)$. Из матрицы B можно выделить главную сингулярную составляющую часть

$$A = \{(\delta_n - \gamma_m)^{-1}\} \quad (2.8)$$

имеющую обратную матрицу [6]:

$$A^{-1} = \{\tau_{nm}\}, \quad \tau_{nm} = [L_+'(-i\delta_n)(L_-^{-1}(i\gamma_m)'(\gamma_m - \delta_n))]^{-1} \quad (2.9)$$

Здесь $L(u) = L_+(u)L_-(u)$ — результат факторизации функции $L(u)$ относительно действительной оси.

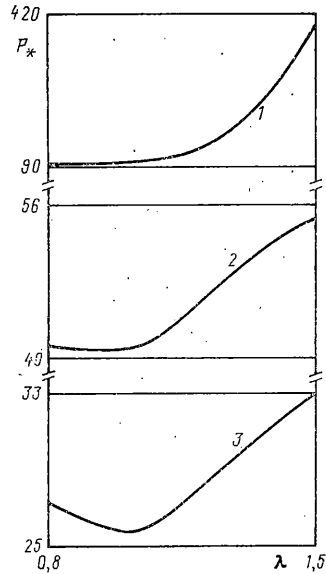
Используя (2.9), систему (2.2) можно преобразовать к системе второго рода

$$X = A^{-1}D - A^{-1}(B - A)X \quad (2.10)$$

решение которой может быть получено методом редукции [6]. Элементы матрицы A^{-1} имеют простую структуру [7].

Таблица 2

| λ | β | $q_*(0)$ | $q_*(0,5)$ | $q_*(0,9)$ | P_* |
|-----------|---------|----------|------------|------------|-------|
| 0,8 | 1,2 | 45,9 | 45,4 | 46,5 | 95,1 |
| 0,8 | 1,5 | 20,3 | 20,0 | 20,1 | 41,7 |
| 0,8 | 2,0 | 13,2 | 13,0 | 13,1 | 27,2 |
| 0,95 | 1,2 | 48,0 | 47,8 | 51,7 | 101 |
| 0,95 | 1,5 | 19,3 | 19,2 | 20,6 | 40,8 |
| 0,95 | 2,0 | 12,3 | 12,2 | 13,0 | 25,9 |
| 1,2 | 1,2 | 58,3 | 58,3 | 65,5 | 125 |
| 1,2 | 1,5 | 21,5 | 21,6 | 24,3 | 46,5 |
| 1,2 | 2,0 | 13,1 | 13,1 | 14,8 | 28,3 |
| 1,5 | 1,2 | 171 | 171 | 216 | 393 |
| 1,5 | 1,5 | 25,0 | 25,0 | 29,7 | 54,8 |
| 1,5 | 2,0 | 14,9 | 14,9 | 17,7 | 32,7 |



Для дальнейших числовых расчетов были найдены коэффициенты аппроксимирующей функции (2.4) при $s=2$, которые приводятся в табл. 1 для некоторых значений параметра λ , $C=0,2$. В последней колонке приведены значения относительной погрешности такой аппроксимации.

Для расчета контактных напряжений под бандажом и жесткости системы штамп — цилиндр была составлена программа на языке «Фортран» для ЭВМ БЭСМ-6, вычислялись безразмерные величины $q_0(\tau a/R) = q_*(\tau)$ ($|\tau| < 1$) и P_* соответственно по формулам (2.5), (2.6), при этом в соответствующих рядах (2.4) и (2.6) удерживалось N членов, а бесконечная система (2.10) урезалась до N уравнений; N выбиралось в зависимости от заданной точности. С увеличением параметра $(b-a)/R$ для достижения выбранной точности требуется брать меньшее число уравнений бесконечной системы.

В табл. 2 для некоторых значений параметров λ , τ и $\beta = b/a$ при $R/a = 0,5$ приведены значения величин $q_*(\tau)$ и P_* . При выбранных коэффициентах аппроксимации (2.4), приведенных в табл. 1, дальнейшие расчеты проводились с меньшей точностью.

Для наглядности на фигуре приведена зависимость жесткости P_* системы бандаж — цилиндр от параметра предварительного напряжения λ при $R/a = 0,5$ и некоторых значениях β (1: $\beta = 1,2$; 2: $\beta = 1,5$; 3: $\beta = 2,0$).

Анализ проведенных результатов числовых расчетов показывает, что с увеличением параметра предварительного напряжения в сторону растяжения жесткость системы бандаж — цилиндр увеличивается. Существуют также такие сочетания геометрических параметров системы, при которых ее жесткость возрастает и с увеличением предварительного сжатия (с уменьшением λ при $\lambda < 1$).

В заключении заметим, что использованное выше допущение о малости добавочной деформации, вызванной воздействием бандаж на предварительно деформированный цилиндр, может нарушаться в некоторых точках тела. Такими точками в рассмотренной задаче являются границы зоны контакта $z = \pm a$, в которых добавочные напряжения неограничены. Аналогичная ситуация имеет место в классической линейной теории упругости, которая представляет собой линеаризацию нелинейной теории вблизи ненапряженного состояния тела. Указанное обстоятельство не может повлиять на хорошую точность линеаризованной теории при определении интегральных характеристик задачи, к которым в данном случае относится жесткость системы бандаж — цилиндр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Biot M. A. Mechanics of Incremental Deformation. New York: Wiley, 1965. 504 p.
3. Филиппова Л. М. О влиянии начальных напряжений на раскрытие круговой трещины // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 286–290.
4. Александров В. М. О решении одного класса уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. с.
5. Александров В. М. Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов – уравнений к бесконечным алгебраическим системам // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324–332.
6. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Чебаков М. И. Контактная задача теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // Механика сплошной среды. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1981. С. 134–139.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
1.XI.1988