

УДК 531.8

© 1991 г.

М. В. ДЕМИДЮК

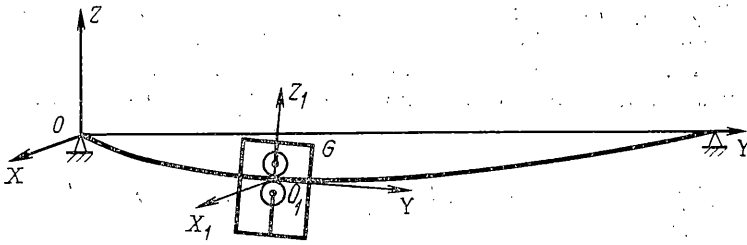
АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Исследуются плоские колебательные движения (в поле сил тяготения) твердого тела, перемещающегося вдоль упругого прямолинейного стержня. В рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней при помощи принципа Гамильтона — Остроградского получены дифференциальные уравнения с нелинейными граничными условиями, описывающие движение рассматриваемой механической системы. Ставится и решается следующая задача: для заданного закона движения твердого тела вдоль упругого стержня требуется определить возникающие при этом колебания этого тела, а также усилие, обеспечивающее заданное движение. Подобные задачи возникают при исследовании динамики некоторых механических устройств, например, портално-мостовых роботов, мостовых кранов и др. Асимптотическими методами, аналогично [1, 2], построено приближенное решение исследуемой задачи для двух случаев: а) большой изгибной жесткости стержня; б) невесомого стержня (квазистатическое приближение). Приводятся результаты численных расчетов на ЭВМ, иллюстрирующие роботоспособность разработанных алгоритмов. Задачи динамики механических систем с упругими звеньями и подвижными инерционными нагрузками в различных постановках рассматривались в ряде работ, например, [3–5] и др.

1. Уравнения движения и постановка задачи. Рассматривается механическая система, состоящая из упругого стержня с шарнирно закрепленными концами, вдоль которого перемещается твердое тело G (фиг. 1). Стержень является однородным и имеет постоянное поперечное сечение. В недеформированном состоянии нейтральная линия стержня прямолинейна и направлена горизонтально. Исследуются колебательные движения тела G в вертикальной плоскости (плоскости OYZ), возникающие при его перемещении вдоль стержня.

Для описания плоских движений рассматриваемой механической системы введем две прямоугольные правые системы координат: инерциальную систему $OXYZ$, ось OY которой направим вдоль нейтральной линии недеформированного стержня, ось OZ — вертикально вверх; жестко связанную с телом G систему координат $O_1X_1Y_1Z_1$ с началом в точке O_1 на нейтральной линии стержня, ось O_1X_1 которой направим параллельно оси OX , ось O_1Y_1 — по касательной к нейтральной линии в точке O_1 . Заметим, что в случае недеформированного состояния стержня оси системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ параллельны соответствующим осям инерциальной системы.

Движение механической системы будем исследовать в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [6–8], в соответствии с которой упругие смещения точек нейтральной линии стержня относительно их положения в недеформированном состоянии предполагаются малы по сравнению с длиной стержня и перпендикулярными оси OY . Предполагается также, что тело G , передвигаясь вдоль стержня, контактирует с ним в одной точке (точке O_1). При этом угол поворота



Фиг. 1

тела G вокруг оси O_1X_1 равен углу поворота касательной к нейтральной линии стержня в точке O_1 .

Введем следующие обозначения: l — длина стержня; ξ — ордината произвольной точки P нейтральной линии стержня в инерциальной системе координат $OXYZ$ ($0 \leq \xi \leq l$); $w(\xi, t)$ — упругое смещение точки P в момент времени t относительно ее положения при недеформированном стержне (относительно оси OY); I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, проходящей через нейтральную линию параллельно оси OX ; ρ , E — линейная плотность и модуль Юнга материала стержня; $y(t)$ — измеряемое вдоль стержня расстояние от точки O до O_1 ($l_0 \leq y \leq l_1$, где $l_{0,1}$ — параметры, характеризующие длину ходового пути тела G при его перемещении вдоль стержня, $0 < l_{0,1} < l$, $0 < l_1 - l_0 < l$); $F(t)$ — усилие, приложенное к телу G и направленное вдоль касательной к нейтральной линии стержня в точке O_1 ; m — масса тела G ; $\mathbf{r} = (0, c_y, c_z)$ — радиус-вектор центра масс тела G в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$; J — момент инерции тела G относительно оси O_1X_1 ; g — ускорение сил тяжести (направлено параллельно оси OZ в противоположную сторону). Предполагается, что функция $w(\xi, t)$ определена и непрерывна вместе с своими частными производными w' , w'' , w''' в области $\Omega = [0, l] \times [t_0, t_1]$, где t_0, t_1 — начальный и конечный моменты времени движения системы. Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по пространственной переменной ξ , точкой — по времени t . Ниже, при выводе и анализе уравнений движения системы, функция $w(\xi, t)$ представляется в виде

$$w(\xi, t) \equiv \begin{cases} w_-(\xi, t), & (\xi, t) \in \Omega_- = [0, y(t)] \times [t_0, t_1] \\ w_+(\xi, t), & (\xi, t) \in \Omega_+ = [y(t), l] \times [t_0, t_1] \end{cases} \quad (1.1)$$

При этом предполагается, что функции $w_-(\xi, t)$, $w_+(\xi, t)$ имеют в областях Ω_- , Ω_+ соответственно частные производные по ξ до четвертого порядка включительно. Из непрерывности функции $w(\xi, t)$ и ее производной $w'(\xi, t)$ в области Ω следуют кинематические условия для $w_{\pm}(\xi, t)$ на кривой $\Omega_0 = \Omega_- \cap \Omega_+$ (условия сопряжения):

$$w_-(y, t) = w_+(y, t), \quad w'_-(y, t) = w'_+(y, t) \quad (1.2)$$

Следует отметить также, что в силу принятых выше предположений о нерастяжимости стержня и малости его поперечных упругих смещений вектор $\mathbf{R}(t) = (0, y(t), w_{\pm}(y, t))$ определяет положение полюса O_1 в инерциальной системе координат.

Для вывода уравнений движения рассматриваемой механической системы используем принцип Гамильтона — Остроградского, обобщенный на случай действия непотенциальных сил [6]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta^* A) dt = 0 \quad (1.3)$$

где δK , $\delta \Pi$ — вариации кинетической и потенциальной энергий системы, $\delta^* A$ — элементарная работа силы $F(t)$.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий поперечных колебаний упругого стержня и сложного движения тела G :

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_0^l w^2(\xi, t) d\xi + \frac{1}{2} m \mathbf{R}^2(t) + m \mathbf{R}'(t) [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)] + \frac{1}{2} J \omega^2(t) \quad (1.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}(t)$ — угловая скорость поворота тела G вокруг оси $O_1 X_1$ (вследствие упругого отклонения стержня). Векторы $\mathbf{R}'(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ имеют в подвижной системе отсчета $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ следующее координатное представление:

$$\mathbf{R}' = (0, y'(t) \cos \theta(t) + z'(t) \sin \theta(t), -y'(t) \cos \theta(t) + z'(t) \sin \theta(t)), \quad \boldsymbol{\omega} = (\theta'(t), 0, 0) \quad (1.5)$$

где обозначено: $z(t) \equiv w_{\pm}(y, t)$ — смещение полюса O_1 относительно оси OY , $\theta(t) \equiv \partial w_{\pm}(\xi, t) / \partial \xi|_{\xi=y}$ — угол поворота тела G вокруг оси $O_1 X_1$.

Учитывая (1.5), выражение для кинетической энергии (1.4) приводится к следующему виду

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_0^l w^2(\xi, t) d\xi + \frac{1}{2} J \theta'^2(t) + \frac{1}{2} m [y'^2(t) + z'^2(t)] + m \theta'(t) [y'(t) s_1(t) + z'(t) s_2(t)] \quad (1.6)$$

где $s_1 = -c_y \sin \theta(t) - c_z \cos \theta(t)$, $s_2 = c_y \cos \theta(t) - c_z \sin \theta(t)$.

Потенциальная энергия механической системы равна сумме потенциальных энергий упругих сил, возникающих при деформации стержня, и сил тяжести

$$\Pi = \int_0^y \left[\frac{1}{2} E I w_-''^2(\xi, t) + \rho g w_-(\xi, t) \right] d\xi + \int_y^l \left[\frac{1}{2} E I w_+''^2(\xi, t) + \rho g w_+(\xi, t) \right] d\xi + m g [z(t) - s_1(t)] \quad (1.7)$$

Элементарная работа силы $F(t) = F(t) (0, \cos \theta(t), \sin \theta(t))$, где $F(t) = -|F(t)|$, определяется выражением

$$\delta^* A = F(t) [\cos \theta(t) \delta y(t) + \sin \theta(t) \delta z(t)] \quad (1.8)$$

Варьируя кинетическую энергию (1.6), получим

$$\delta K = \rho \int_0^y w_-^*(\xi, t) \delta w_-^* d\xi + \rho \int_y^l w_+^*(\xi, t) \delta w_+^* d\xi + m [y'(t) + \theta'(t) s_1(t)] \delta y' + [J \theta'(t) + m y'(t) s_1(t) + m z'(t) s_2(t)] \delta \theta' - m \theta'(t) [y'(t) s_2(t) - z'(t) s_1(t)] \delta \theta + m [z'(t) + \theta'(t) s_2(t)] \delta z \quad (1.9)$$

Проварьируем потенциальную энергию (1.7). Интегрируя по частям (по переменной ξ) в полученном выражении и учитывая условия шарнирного закрепления на левом ($\xi=0$) и правом ($\xi=l$) концах стержня

$$w_-(0, t) = 0, \quad w_-''(0, t) = 0, \quad w_+(l, t) = 0, \quad w_+''(l, t) = 0 \quad (1.10)$$

и кинематические условия сопряжения (1.2), окончательно получаем

$$\delta\Pi = \int_0^y [EIw_-^{IV}(\xi, t) + \rho g] \delta w_- d\xi + \int_y^l [EIw_+^{IV}(\xi, t) + \rho g] \delta w_+ d\xi - \\ - EI[w_-'''(y, t) - w_+'''(y, t)] \delta z + EI[w_-''(y, t) - w_+''(y, t)] \delta\theta + \\ + 1/2 EI[w_-''(y, t) - w_+''(y, t)] \delta y + mg[\delta z + s_2(t) \delta\theta] \quad (1.11)$$

Подставим (1.8), (1.9), (1.11) в соотношение (1.3) и проинтегрируем по частям (по переменной t), учитывая при этом, что вариации δy , δw_{\pm} , δz , $\delta\theta$, в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени равны нулю. Из стационарности полученного в (1.3) функционала следуют уравнения движения

$$m[y''(t) - c_2\theta''(t)] = F(t) \\ EIw_-^{IV}(\xi, t) + \rho w_-''(\xi, t) = -\rho g, \quad 0 < \xi < y(t) \\ EIw_+^{IV}(\xi, t) + \rho w_+''(\xi, t) = -\rho g, \quad y(t) < \xi < l \quad (1.12)$$

и граничные условия в точке O_1 :

$$EI[w_+''(y, t) - w_-''(y, t)] = J\theta''(t) + m[c_{yz}''(t) - c_y y''(t)]\theta(t) - \\ - c_{z2}\theta(t) - c_z y''(t) + c_y g \\ EI[w_-'''(y, t) - w_+'''(y, t)] = m[z''(t) + c_y\theta''(t) + y''(t)\theta(t) + g] \quad (1.13)$$

Уравнения (1.12) и граничные условия (1.13) получены в линейном приближении по w_{\pm} , z , θ . Первое уравнение в (1.12) выражает теорему об изменении проекции количества движения тела G на ось OY , два последующих уравнения описывают малые упругие отклонения точек нейтральной линии стержня относительно оси OY . Граничные условия (1.13) динамического характера и выражают уравнивание изгибающего момента и перерезывающей силы при $\xi=y$ (в точке O_1). Совместно с (1.2), (1.10) имеем все восемь граничных условий. Добавим, что граничные условия (1.2), (1.13) задаются на границе, перемещающейся вдоль стержня, что обуславливает их существенную нелинейность.

Для однозначного определения движения механической системы необходимо задать начальные значения (при $t=t_0$) обобщенной координаты y и ее производной y' , а также начальные распределения упругих смещений w_{\pm} и скоростей w_{\pm}' точек нейтральной линии стержня. Считаем, что в начальный момент времени t_0 система покоится. Зададим начальные условия в следующем виде

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = 0, \quad y_0 \in [l_0, l_1] \\ w_-(\xi, t_0) = f_-(\xi), \quad w_-'(\xi, t_0) = 0, \quad \xi \in [0, y_0] \\ w_+(\xi, t_0) = f_+(\xi), \quad w_+'(\xi, t_0) = 0, \quad \xi \in [y_0, l] \quad (1.14)$$

где $f_{\pm}(\xi)$ — функции, описывающие статический прогиб упругого стержня в случае, когда тело G фиксировано на стержне и его положение (положение полюса O_1) задается координатой $y=y_0$:

$$f_{\pm} = g(-\rho\xi^4 + A_{\pm}\xi^3 + B_{\pm}\xi^2 + C_{\pm}\xi + D_{\pm})/24EI \\ A_+ = 2\rho l - 4m(y_0 + c_y)/l, \quad A_- = A_+ + 4m, \quad B_- = 0 \\ B_+ = -3A_+l + 6\rho l^2, \quad D_+ = 4my_0^2(y_0 + 3c_y), \quad D_- = 0 \\ C_+ = -A_+l^2 - B_+l - D_+/l + \rho l^3, \quad C_- = C_+ + 12my_0(y_0 + 2c_y) \quad (1.15)$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений в частных производных (1.12), которая с учетом нелинейных граничных условий (1.2), (1.10), (1.13) и начальных условий (1.14) при заданном усилии $F(t)$ однозначно определяет движение рассматриваемой механической системы в линейном приближении по упругим смещениям.

Ставится следующая полуобратная задача динамики. Пусть задан закон движения тела G вдоль упругого стержня $y=y(t) \in Y$. Требуется определить возникающие при этом колебания $z(t)$, $\theta(t)$ тела G , а также усилии $F(t)$, обеспечивающее заданное движение этого тела.

Здесь Y — допустимый класс функций, определенных на интервале $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющих некоторым требованиям, например, ограниченности, гладкости и др. Ниже, при построении решения сформулированной задачи, требования, которым должны удовлетворять функции из класса Y , конкретизируются.

Исследуем поставленную задачу при малых ускорениях перемещения тела G вдоль стержня. Пусть $v_0 = \min_h v_*(h)$ при $h \in [l_0, l_1]$, где $v_*(h)$ — низшая частота собственных колебаний рассматриваемой системы при фиксированном положении тела G на стержне, h — параметр, определяющий положение тела G (полюса O_1) на стержне: $y=h$. Примем в качестве оценки малости ускорения y'' следующее соотношение: $y'' \ll lv_0^2$. Тогда в граничных условиях (1.12) слагаемым $y''(t)\theta(t)$ можно пренебречь, как величиной более высокого порядка малости. Отметим, что при нулевой начальной скорости $y'(t_0)=0$ из условия $y'' \ll lv_0^2$ следует ограничение на скорость перемещения тела G вдоль стержня $y' \ll lv_0(t_1 - t_0)$. Добавим также, что для многих реальных механических систем указанное ограничение на ускорение движения, как правило, выполняется. Например, для большинства промышленных роботов портального и мостового типов номинальное ускорение перемещения манипуляционного модуля (тело G) вдоль горизонтальной балки портала или моста удовлетворяет принятому условию.

Приведем приближенное решение рассматриваемой задачи для двух предельных случаев системы: а) изгибная жесткость стержня весьма велика; б) масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с массой тела G (квазистатическое приближение). Математические вопросы обоснования приближенных подходов к исследованию рассматриваемой сложной колебательной системы с переменными параметрами, а также строгие оценки точности построенных решений требуют отдельного рассмотрения и в работе не приводятся.

2. Исследование задачи в случае большой изгибной жесткости стержня. Построим решение исследуемой задачи в случае большей изгибной жесткости стержня [4, 2]. Анализ и решение задачи удобнее проводить в безразмерных переменных и параметрах. Введем их следующим образом

$$\begin{aligned} t^* &= \nu t, & \xi^* &= \xi/l, & y^* &= y/l, & w_{\pm}^* &= w_{\pm}/l, & z^* &= z/l, & c_y^* &= c_y/l, & c_z^* &= c_z/l, \\ g^* &= g/l\nu^2, & F^* &= F/ml\nu^2, & J^* &= J/ml^2, & y_0^* &= y_0/l, & l_i^* &= l_i/l, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$t_i^* = \nu t_i, \quad (i=0, 1)$$

Здесь ν — характерная постоянная размерности частоты, выбор которой зависит от специфики задачи. Выберем в качестве ν величину $\nu = (y_*''/l)^{1/2}$, где y_*'' — характерная величина размерности линейного ускорения, например, $y_*'' = \max_t |y''(t)|$. Тогда в новых переменных (2.1) уравнения движения (1.12) принимают вид (звездочки в обозначениях новых переменных и параметров для удобства записи опущены):

$$y''(t) - c_z \theta''(t) = F(t) \quad (2.2)$$

$$w_{-}^{IV}(\xi, t) + \mu \kappa w_{-}''(\xi, t) = -\mu \kappa g, \quad 0 < \xi < y(t) \quad (2.3)$$

$$w_+^{IV}(\xi, t) + \mu \kappa w_+''(\xi, t) = -\mu \kappa g, \quad y(t) < \xi < 1 \quad (2.4)$$

где $\kappa = \rho l / m$, $\mu = m l^2 y_*'' / EI \ll 1$, $t \in [t_0, t_1]$ (μ — малый параметр).

Граничные условия представляются в виде

$$w_-(0, t) = w_-''(0, t) = w_+(1, t) = w_+''(1, t) = 0 \quad (2.5)$$

$$w_-(y, t) = w_+(y, t), \quad w_-'(y, t) = w_+'(y, t) \quad (2.6)$$

$$w_+''(y, t) - w_-''(y, t) = \mu [J\theta''(t) + c_y z''(t) - c_z g \theta(t) - c_z y''(t) + c_y g] \quad (2.7)$$

$$w_-'''(y, t) - w_+'''(y, t) = \mu [z''(t) + c_y \theta''(t) + g] \quad (2.8)$$

Начальные условия запишутся следующим образом

$$w_-(\xi, t_0) = \mu f_-(\xi), \quad w_-'(\xi, t_0) = 0, \quad \xi \in [0, y_0] \quad (2.9)$$

$$w_+(\xi, t_0) = \mu f_+(\xi), \quad w_+'(\xi, t_0) = 0, \quad \xi \in [y_0, l]$$

Здесь функции $f_{\pm}(\xi)$ определяются соотношениями (1.15), где следует положить $l=1$, $m=1$, $EI=1$, $\rho=\kappa$.

Опишем кратко алгоритм приближенного решения рассматриваемой задачи. Сначала, применяя метод теории возмущений (разложения по степеням малого параметра μ), считая при этом функцию $y(t)$ достаточно гладкой на интервале $[t_0, t_1]$, определяем на основании уравнений (2.3), (2.4), граничных и начальных условий (2.5)–(2.9) искомые $z(t)$ и $\theta(t)$ (в некотором приближении). Далее, используя уравнение (2.2), находим усилие $F(t)$, обеспечивающее заданное перемещение тела G вдоль стержня.

Примем следующие разложения

$$w_{\pm} = w_{\pm,0}(\xi, t) + \mu w_{\pm,1}(\xi, t) + \mu^2 w_{\pm,2}(\xi, t) + \dots \quad (2.10)$$

$$z = z_0(t) + \mu z_1(t) + \mu^2 z_2(t) + \dots, \quad \theta = \theta_0(t) + \mu \theta_1(t) + \mu^2 \theta_2(t) + \dots$$

где $w_{\pm,1}(\xi, t)$, $z_i(t)$, $\theta_i(t)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) — функции, подлежащие определению.

В случае бесконечно большой изгибной жесткости стержня ($\mu=0$) упругое отклонение стержня отсутствует, т. е. $w_{\pm,0}(\xi, t) = 0$, $z_0(t) = 0$, $\theta_0(t) = 0$.

Определим приближения $w_{\pm,i}(\xi, t)$, $z_i(t)$, $\theta_i(t)$ ($i=1, 2$). Подставляя (2.10) в соотношения (2.3)–(2.9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ , получим уравнения и соответствующие краевые и начальные условия на искомые приближения.

Для функций первого приближения $w_{\pm,1}(\xi, t)$ имеем уравнения

$$w_{-,1}^{IV}(\xi, t) = -\kappa g, \quad 0 < \xi < y, \quad w_{+,1}^{IV}(\xi, t) = -\kappa g, \quad y < \xi < 1 \quad (2.11)$$

с граничными условиями

$$w_{-,1}(0, t) = w_{-,1}''(0, t) = w_{+,1}(1, t) = w_{+,1}''(1, t) = 0$$

$$w_{-,1}(y, t) = w_{+,1}(y, t); \quad w_{-,1}'(y, t) = w_{+,1}'(y, t) \quad (2.12)$$

$$w_{+,1}''(y, t) - w_{-,1}''(y, t) = M_0(t); \quad w_{-,1}'''(y, t) - w_{+,1}'''(y, t) = g$$

где обозначено $M_0(t) = c_y - c_z y''(t) / g$.

Начальные условия на $w_{\pm,1}(\xi, t)$ задаются соотношениями

$$w_{-,1}(\xi, t_0) = f_-(\xi); \quad w_{-,1}'(\xi, t_0) = 0, \quad \xi \in [0, y_0] \quad (2.13)$$

$$w_{+,1}(\xi, t_0) = f_+(\xi), \quad w_{+,1}'(\xi, t_0) = 0, \quad \xi \in [y_0, l]$$

Интегрируя (2.11) с учетом граничных условий (2.12), получаем

$$\begin{aligned} w_{\pm,1} &= g[-\kappa \xi^4 + A_{\pm,1}(t) \xi^3 + B_{\pm,1}(t) \xi^2 + C_{\pm,1}(t) \xi + D_{\pm,1}(t)]/24 \\ A_{+,1} &= 2\kappa - 4[y(t) + M_0(t)], \quad A_{-,1} = A_{+,1}(t) + 4, \quad B_{-,1} = 0 \\ B_{+,1} &= -3A_{+,1}(t) + 6\kappa, \quad D_{+,1} = 4y^2(t)[y(t) + 3M_0(t)] \\ C_{+,1} &= -A_{+,1}(t) - B_{+,1}(t) - D_{+,1}(t) + \kappa, \quad D_{-,1} = 0 \\ C_{-,1} &= C_{+,1}(t) + 12y(t)[y(t) + 2M_0(t)] \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что найденные функции $w_{\pm,1}(\xi, t)$ удовлетворяют начальным условиям (2.13) при выполнении равенства $y'(t_0) = 0$.

Из разложений (2.10) следуют соотношения для $z_1(t)$, $\theta_1(t)$:

$$z_1 = w_{\pm,1}(y, t), \quad \theta_1 = w'_{\pm,1}(y, t) \quad (2.14)$$

Функции $w_{\pm,2}(\xi, t)$ определяются из уравнений

$$w_{-,2}^{IV}(\xi, t) = -\kappa w_{-,1}''(\xi, t), \quad 0 < \xi < y \quad (2.15)$$

$$w_{+,2}^{IV}(\xi, t) = -\kappa w_{+,1}''(\xi, t), \quad y < \xi < 1$$

с граничными и нулевыми начальными условиями

$$w_{-,2}(0, t) = w_{-,2}''(0, t) = w_{+,2}(1, t) = w_{+,2}''(1, t) = 0 \quad (2.16)$$

$$w_{-,2}(y, t) = w_{+,2}(y, t), \quad w'_{-,2}(y, t) = w'_{+,2}(y, t)$$

$$w_{+,2}''(y, t) - w_{-,2}''(y, t) = M_1(t), \quad w_{-,2}'''(y, t) - w_{+,2}'''(y, t) = P_1(t)$$

$$w_{\pm,2}(\xi, t_0) = 0, \quad w_{\pm,2}(\xi, t_0) = 0 \quad (2.17)$$

В граничных условиях (2.16) обозначено

$$M_1(t) = J\theta_1''(t) + c_y z_1''(t) - c_z g \theta_1(t), \quad P_1(t) = z_1''(t) + c_y \theta_1''(t)$$

Из соотношений (2.15), (2.16) следует для функций второго приближения

$$w_{\pm,2} = [E_{\pm,1}(\xi, t) + A_{\pm,2}(t) \xi^3 + B_{\pm,2}(t) \xi^2 + C_{\pm,2}(t) \xi + D_{\pm,2}(t)]/24$$

где $E_{\pm,1}(\xi, t)$, $A_{\pm,2}(t)$, $B_{\pm,2}(t)$, $C_{\pm,2}(t)$, $D_{\pm,2}(t)$ определяются выражениями

$$E_{\pm,1} = g[3A_{\pm,1}''(t) \xi^7 + 7B_{\pm,1}''(t) \xi^6 + 21C_{\pm,1}''(t) \xi^5 + 105D_{\pm,1}''(t) \xi^4]/2520$$

$$A_{+,2} = -4[M_1(t) + P_1(t)y(t)] - [E_{+,1}(1, t) + H_1''(y, t) - H_1'''(y, t)y(t)]/6$$

$$A_{-,2} = A_{+,2}(t) + 4P_1(t) - H_1'''(y, t)/6, \quad B_{-,2} = 0,$$

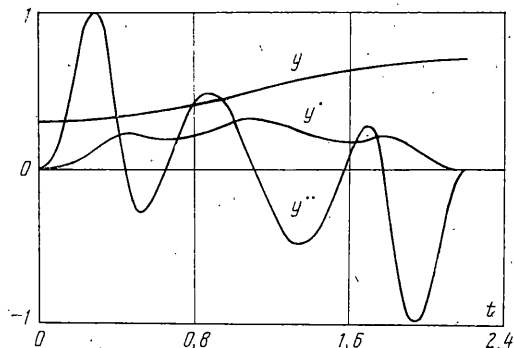
$$B_{+,2} = -3A_{+,2}(t) - E_{+,1}(1, t)/2, \quad D_{-,2} = 0$$

$$D_{+,2} = 4y^2(t)[3M_1(t) + P_1(t)y(t)] + H_1(y, t) - H_1'(y, t)y(t) + \\ + H_1''(y, t)y^2(t)/2 - H_1'''(y, t)y^3(t)/6$$

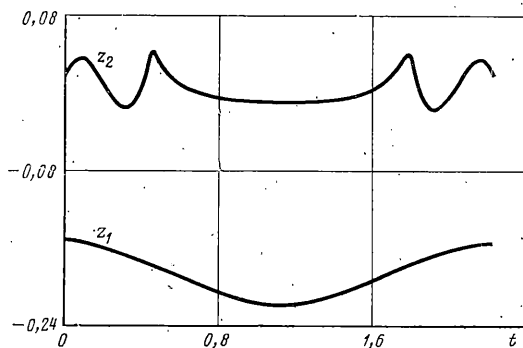
$$C_{+,2} = -A_{+,2}(t) - B_{+,2}(t) - D_{+,2}(t) - E_{+,1}(1, t)$$

$$C_{-,2} = C_{+,2}(t) + 12y(t)[2M_1(t) + P_1(t)y(t)] - H_1'(y, t) +$$

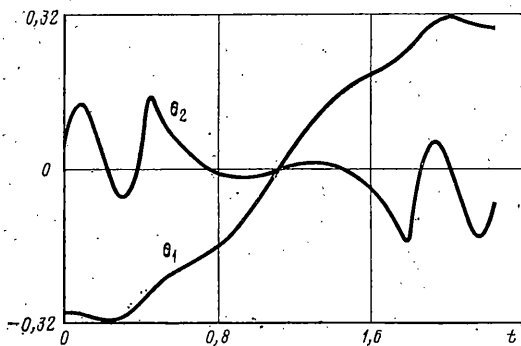
$$+ H_1''(y, t)y(t) - H_1'''(y, t)y^2(t)/2, \quad H_1(\xi, t) = E_{-,1}(\xi, t) - E_{+,1}(\xi, t)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



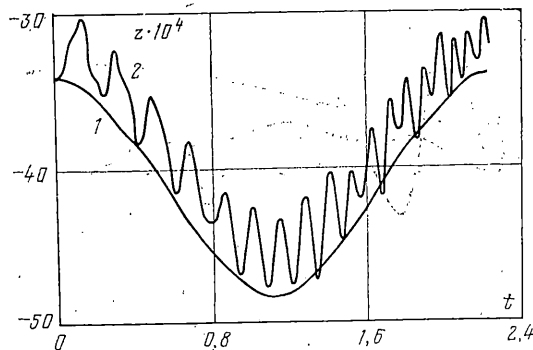
Фиг. 4

Путем несложных вычислений легко устанавливается, что найденные $w_{\pm, 2}(\xi, t)$ удовлетворяют нулевым начальным условиям (2.17) при выполнении равенств $d^3y(t)/dt^3|_{t=t_0} = d^4y(t)/dt^4|_{t=t_0} = 0$.

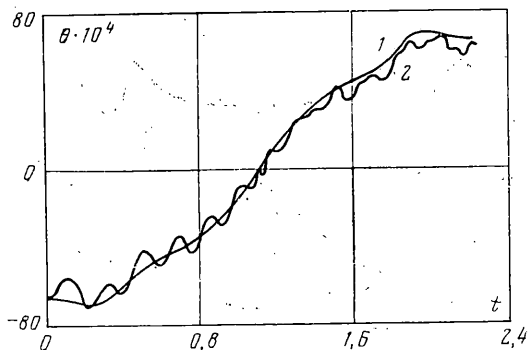
Аналогично (2.15) имеем для $z_2(t), \theta_2(t)$: $z_2 = w_{\pm, 2}(y, t)$, $\theta_2 = w'_{\pm, 2}(y, t)$.

Итак, искомые функции $z(t), \theta(t)$ определены с точностью до величин порядка μ^2 . При этом функция $y(t)$, определяющая закон перемещения тела G вдоль стержня, должна удовлетворять следующим требованиям: а) иметь на интервале $[t_0, t_1]$ непрерывные производные до четвертого порядка включительно; б) в начальный момент времени $t=t_0$ должно выполняться $dy(t)/dt|_{t=t_0} = d^2y(t)/dt^2|_{t=t_0} = d^3y(t)/dt^3|_{t=t_0} = d^4y(t)/dt^4|_{t=t_0} = 0$, т. е. движение тела G вдоль стержня должно быть плавным.

Таким образом, анализ колебательного движения рассматриваемой сингулярно возмущенной гибридной системы во избежание пограничных



Фиг. 5



Фиг. 6

эффектов требует высокой гладкости функции $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В реальных системах в случае высокой жесткости пограничными участками движения можно пренебречь, поскольку высокочастотные колебания вследствие естественной диссипации сравнительно быстро затухают.

Используя разработанный выше алгоритм, приведем результаты численного моделирования на ЭВМ колебательных движений тела G . Закон движения $y=y(t)$, в соответствии с которым тело G перемещалось вдоль упругого стержня, задавался следующим образом. Интервал времени движения $[t_0, t_1]$ двумя точками τ_1 и τ_2 ($t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$) дискретизировался на три промежутка, в каждом из которых функция $y(t)$ с учетом наложенных на нее выше условий задавалась в виде следующего сплайна [9]:

$$S_i(t) = \sum_{k=0}^7 a_{ik} (t - \tau_{i-1})^k \quad (i=1, 2, 3)$$

где $\tau_0 = t_0$; a_{ik} — коэффициенты, которые определялись из условий

$$\begin{aligned} S_1(t_0) &= y_0, & S_3(t_1) &= y_1, & d^j S_1(t)/dt^j|_{t=t_0} &= d^j S_3(t)/dt^j|_{t=t_1} = 0 \\ S_i(\tau_i) &= a_i, & S_i^*(\tau_i) &= b_i, & S_i(\tau_i) &= S_{i+1}(\tau_i) \\ d^j S_i(t)/dt^j|_{t=\tau_i} &= d^j S_{i+1}(t)/dt^j|_{t=\tau_i} & & & (j=1, 2, 3, 4; i=1, 2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь $y_1 = y(t_1)$ — заданное конечное положение тела G на стержне; a_i, b_i ($i=1, 2$) — свободные параметры, которые могут использоваться при выполнении дополнительных ограничений, наложенных на движение тела G вдоль стержня, например, $y'(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_1]$ (безреверсность движения).

Таким образом, неизвестные коэффициенты a_{ik} ($i=1, 2, 3$; $k=0, \dots, 7$) определялись из системы 24 линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий (2.18).

Представляемые ниже численные расчеты проводились при следующих значениях кинематических характеристик движения тела G вдоль стержня: $t_0=0$, $\tau_1=1c$, $\tau_2=4c$, $t_1=5c$, $y_0=1,5$ м, $y_1=1,5$ м ($l=5$ м), $a_1=1,7$ м, $a_2=3,3$ м, $b_1=b_2=0,5$ м/с. Соответствующие графики закона движения $y=y(t)$, скорости $y'(t)$ и ускорения $y''(t)$ представлены на фиг. 2. Все приводимые здесь и ниже графические зависимости представлены в безразмерных переменных ($v=0,4465$ с $^{-1}$). На фиг. 3, 4 изображены графики функций первого и второго приближений $z_i(t)$, $\theta_i(t)$ ($i=1, 2$). Расчет проводился при следующих значениях конструктивных параметров исследуемой механической системы (в безразмерных переменных): $c_y=0$, $c_z=-0,2$, $J=0,3$, $\kappa=0,097$. Из графиков на фиг. 3, 4 видно, что функции второго приближения z_2 , θ_2 имеют более выраженный колебательный характер. Полученные зависимости позволяют для разных значений параметра μ рассчитать с точностью до величин порядка μ^2 колебание тела G при его заданном перемещении вдоль стержня. На фиг. 5, 6 (кривые 2) представлены графики функций $z(t)$ и $\theta(t)$ для конкретного значения параметра $\mu=0,022$.

3. Исследование задачи в квазистатическом приближении. Приведем решение сформулированной выше полуобратной задачи динамики для случая, когда масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с массой тела G (квазистатическое приближение [1, 2]). Невесомый стержень в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ находится в квазистатическом равновесии. Перейдем к новым безразмерным переменным и параметрам, используя соотношения (2.1) и принимая $v=(EI/ml^3)^{1/2}$. Заметим, что величина $v_*= (48)^{1/2} \cdot v$ определяет частоту квазистатических колебаний рассматриваемого стержня, нагруженного в точке $\xi=l/2$ точечной массой m [8]. В новых переменных движение рассматриваемой механической системы описывается уравнениями (2.2)–(2.4) с граничными и начальными условиями (2.5)–(2.9), в которых следует заменить $\mu \rightarrow 1$.

Полагая $\kappa=0$, уравнения (2.3), (2.4) упрощаются и принимают вид

$$w_{-}^{IV}(\xi, t)=0, \quad 0 < \xi < y(t), \quad w_{+}^{IV}(\xi, t)=0, \quad y(t) < \xi < 1 \quad (3.1)$$

Представив решение уравнений (3.1) в форме $w_{\pm}(\xi, t)=a_{\pm}(t)\xi^3 + b_{\pm}(t)\xi^2 + c_{\pm}(t)\xi + d_{\pm}(t)$, выразим функции $a_{\pm}(t)$, $b_{\pm}(t)$, $c_{\pm}(t)$, $d_{\pm}(t)$ через $z(t)$ и $\theta(t)$, используя при этом условия (2.5) и соотношения $z=w_{+}(y, t)$, $\theta=w_{-}'(y, t)$. С учетом полученных для w_{\pm} выражений уравнения (2.7), (2.8) преобразуются и представляются в виде следующей нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Mq''(t) + C(t)q(t) = Q(t) \quad (3.2)$$

Здесь q , Q – векторы размерности 2: $q=(z, \theta)$, $Q=(-g, c_2 y'' - c_2 g)$; $M=\{m_{ij}\}$, $C=\{c_{ij}\}$ ($i, j=1, 2$) – матрицы размерности 2×2 , компоненты которых определяются соотношениями $m_{11}=1$, $m_{12}=m_{21}=c_y$, $m_{22}=J$, $c_{11} = -3/y^3(t) - 3/[y(t)-1]^3$, $c_{12}=c_{21}=3/[y(t)-1]^2 - 3/y^2(t)$, $c_{22}=3/y(t) - 3/[y(t)-1] - c_2 g$.

Из (2.9) следуют начальные значения для q :

$$q(t_0)=q_0, \quad q'(t_0)=0 \quad (3.3)$$

$$q_0=(z_0, \theta_0), \quad z_0=f_{\pm}(y_0), \quad \theta_0=f'_{\pm}(y_0), \quad y_0 \in [l_0, l_1]$$

Таким образом, при заданном законе перемещения тела G вдоль упругого стержня $y=y(t)$ определение в квазистатическом приближении колебаний этого тела $z(t)$, $\theta(t)$ сводится к интегрированию нестационарной

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2) с начальными условиями (3.3). Функция $y(t)$ при этом должна иметь на интервале $[t_0, t_1]$ непрерывную производную и удовлетворять ограничению $l_0 \leq y \leq l_1$ ($0 < l_{0,1} < 1$, $0 < l_1 - l_0 < 1$). Последнее требование объясняется тем, что при стремлении $y \rightarrow 0$ или $y \rightarrow 1$ система уравнений (3.2) вырождается ($C \rightarrow \infty$), что требует проведения дополнительных исследований. Заметим, что в реальных условиях для механических систем, таких как портално-мостовые роботы, закон движения манипуляционного модуля вдоль соответствующей балки (моста, портала) удовлетворяет принятому ограничению. После определения $\theta(t)$ необходимое усилие $F(t)$, обеспечивающее заданное перемещение тела G , вычисляется из уравнения (2.2).

Приведем результаты численного расчета колебаний тела G в квазистатическом приближении в соответствии с подходом п. 3. Движение тела G вдоль стержня задавалось законом $y=y(t)$, описанным в п. 2. Принимались те же, что и в п. 2, значения конструктивных параметров механической системы ($v=3 \text{ с}^{-1}$). Интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.2) с начальными условиями (3.3) ($z_0=-0,0034$, $\theta_0=-0,0066$) проводилось методом Ньюмарка [10]. Результаты решения представлены в графическом виде на фиг. 5, 6 (кривые 1). Полученные зависимости позволяют оценить в квазистатическом приближении амплитуду и частоту колебаний тела G , возникающих при его перемещении вдоль упругого стержня. Из сравнения кривых 1, 2 на фиг. 5 видно, что упругие смещения тела G , рассчитанные в квазистатическом приближении, в «среднем» меньше по величине смещений, полученных подходом п. 2. Это можно объяснить тем, что при квазистатическом приближении весом стержня пренебрегаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л. Д., Боложник Н. П. Об управляемом вращении упругого стержня // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 587–595.
2. Бербюк В. Е. Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 238–246.
3. Филиппов А. П., Кожманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. К.: Наукова думка, 1967. 132 с.
4. Весницкий А. И., Поганов А. И. Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами (обзор) // Динамика систем.— Горький, 1978.— № 12.
5. Sebula A. Analiza dynamiczna mostu manipulatora portalowego dla roznych jego modyfikacji // Pr. nauk Inst. cybern. techn. PWrocl.— 1988.— № 78.— С. 31–36.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с. М.: Наука, 1979. 744 с.
8. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
9. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайнфункций. М.: Наука, 1980. 352 с.
10. Сенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация/Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 318 с.

Львов

Поступила в редакцию
12.VII.1990