МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 531.383

С. А. БЕЛИКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ ГИРОСТАТА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГЛАВНОЙ ОСИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается движение гиростата на неподвижной горизонтальной плоскости с вязким трением. Получены уравнения движения гиростата на опорной плоскости в виде системы десятого порядка с тремя циклическими переменными. Эти уравнения допускают частное решение, на котором центр масс гиростата неподвижен, а корпус равномерно вращается вокруг вертикальной главной оси, совпадающей с осью равномерного вращения ротора. Получены уравнения возмущенных движений приведенной системы в окрестности соответствующего положения равновесия в виде системы седьмого порядка с безразмерными переменными и параметрами. Выписано характеристическое уравнение системы, имеющее простой нулевой корень. Приведены выражения коэффициентов характеристического многочлена и выражения главных диагональных миноров матрицы Гурвица через безразмерные параметры. С использованием критерия Льенара – Шипара и результатов Ляпунова о неустойчивости по первому приближению и об устойчивости в особенном случае критического случая одного нулевого корня найдены необходимые и достаточные условия устойчивости равномерного вращения гиростата на плоскости с вязким трением. Для наглядной интерпретации условий устойчивости как ограничений на исходные параметры рассмотрены частные случаи, когда фиксированы значения всех параметров, кроме двух.

Устойчивость равномерного вращения тяжелого твердого тела вокруг вертикальной главной оси на горизонтальной плоскости с вязким трением исследована в [1].

1. Уравнения движения. Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле сил тяжести на неподвижной горизонтальной плоскости. Пусть тело (корпус) имеет полость и с корпусом жестко связана ось вращения осесимметричного гироскопа (ротора), который без трения вращается в полости с постоянной относительно корпуса произвольной угловой скоростью ω_2^0. Предполагаем, что поверхность, ограничивающая тело, в каждый момент времени контактирует с опорной горизонтальной плоскостью только одной своей точкой T и эта поверхность имеет в точке T определенную касательную плоскость. Пусть в точке касания тела и опорной плоскости на гиростат (систему корпус – ротор) со стороны плоскости действует наряду с нормальной реакцией сила $\mathbf{P}$, пропорциональная скорости $\mathbf{v}_T$ точки T тела и противоположная по направлению этой скорости (сила вязкого трения $\mathbf{P}=-k\mathbf{v}_T$, $k>0$ – коэффициент трения).

Введем в рассмотрение две следующие ортогональные правые системы координат. Система $OXYZ$ неподвижна, ее начало O расположено на опорной горизонтальной плоскости OXY. Единичный вектор направленной вертикально вверх оси OZ обозначим через γ. Система $O\xi'\eta'\zeta'$ жестко связана с корпусом, ее оси направлены вдоль главных центральных осей инерции гиростата. Уравнение поверхности, ограничивающей тело, запишем в виде

$$f(\xi', \eta', \zeta')=0 \qquad (1.1)$$

Согласно сделанному выше предположению в точке T поверхности (1.1) имеем

$$\gamma=-\operatorname{grad} f/|\operatorname{grad} f| \tag{1.2}$$

Предположим, что ось вращения гироскопа совпадает с осью $S\eta'$ и в точке R пересечения отрицательной полуоси $S\eta'$ с опорной поверхностью (1.1) касательная плоскость к последней ортогональна $S\eta'$. Расстояние между точками S и R обозначим через h', так что R имеет координаты $0, -h', 0$. Тогда $f|_R=f(0, -h', 0)=0$ и $\operatorname{grad} f|_R=(0, \partial f/\partial\eta|_R, 0)^T$, причем без ограничения общности можем положить $\partial f/\partial\eta|_R=-1$.

Положение корпуса будем задавать координатами X_S, Y_S центра тяжести S гиростата в неподвижной системе и углами Эйлера ψ, θ, φ, определяющими обычным образом ориентацию системы координат $S\xi'\eta'\zeta'$ по отношению к $OXYZ$, так что

$$\gamma=(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)^T \tag{1.3}$$

Уравнения движения гиростата в однородном поле сил тяжести на неподвижной горизонтальной плоскости с вязким трением имеют вид

$$\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}}=-\partial H/\partial\mathbf{q}-\mathbf{F}\partial H/\partial\mathbf{p}, \quad \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}=\partial H/\partial\mathbf{p} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{p}=(p_X, p_Y, p_\psi, p_\theta, p_\varphi)^T$ — обобщенные импульсы, соответствующие координатам $\mathbf{q}=(X_S, Y_S, \psi, \theta, \varphi)^T$, $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — функция Гамильтона [2]:

$$H={}^1/_2[\Phi(p_\theta-\alpha)^2-2\Psi(p_\theta-\alpha)(p_\varphi-\beta)+ \tag{1.5}$$
$$+\Theta(p_\varphi-\beta)^2]/\Delta-\gamma+{}^1/_2(p_X^2+p_Y^2)/M$$
$$\Delta=\Theta\Phi-\Psi^2, \quad \Theta=I_{22}-I_{23}^2I_{33}^{-1}+M\varkappa^2$$
$$\Phi=(I_{11}-I_{13}^2I_{33}^{-1}+M\chi_2^2)\sin^2\theta$$
$$\Psi=(I_{12}-I_{13}I_{22}I_{33}^{-1}+M\varkappa\chi_2)\sin\theta$$
$$\alpha=\Lambda I_{23}I_{33}^{-1}-D\omega_2^0\sin\varphi, \quad \beta=\Lambda(I_{33}\cos\theta+I_{13}\sin\theta)I_{33}^{-1},$$
$$\gamma=-{}^1/_2\Lambda^2I_{33}^{-1}-Mgh$$
$$\Lambda=p_\psi-D\omega_2^0\sin\theta\cos\varphi, \quad \varkappa=\chi_1\cos\theta-\zeta'\sin\theta, \quad h=-(\chi_1\sin\theta+\zeta'\cos\theta)$$
$$\chi_1=\xi'\sin\varphi+\eta'\cos\varphi, \quad \chi_2=\xi'\cos\varphi-\eta'\sin\varphi$$

$\mathbf{F}(\mathbf{q})$ — матрица диссипативной функции Релея $F={}^1/_2k\mathbf{v}_T^2$ [1], так что

$$\mathbf{F}=k\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\alpha_\psi & -\alpha_\theta & -\alpha_\varphi \\ 0 & 1 & -\beta_\psi & -\beta_\theta & -\beta_\varphi \\ -\alpha_\psi & -\beta_\psi & \alpha_\psi^2+\beta_\psi^2 & \alpha_\psi\alpha_\theta+\beta_\psi\beta_\theta & \alpha_\psi\alpha_\varphi+\beta_\psi\beta_\varphi \\ -\alpha_\theta & -\beta_\theta & \alpha_\psi\alpha_\theta+\beta_\psi\beta_\theta & \alpha_\theta^2+\beta_\theta^2 & \alpha_\theta\alpha_\varphi+\beta_\theta\beta_\varphi \\ -\alpha_\varphi & -\beta_\varphi & \alpha_\psi\alpha_\varphi+\beta_\psi\beta_\varphi & \alpha_\theta\alpha_\varphi+\beta_\theta\beta_\varphi & \alpha_\varphi^2+\beta_\varphi^2 \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$\alpha_\psi=\chi_2\sin\psi+\varkappa\cos\psi, \quad \alpha_\theta=h\sin\psi$$
$$\alpha_\varphi=\chi_1\cos\psi+\chi_2\cos\theta\sin\psi$$
$$\beta_\mu=-\partial\alpha_\mu/\partial\psi \quad (\mu=\psi, \theta, \varphi), \qquad F={}^1/_2q^{\boldsymbol{\cdot}T}\mathbf{F}\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}|_{\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}=\partial H/\partial\mathbf{p}} \tag{1.7}$$

В формулах (1.5) приняты следующие обозначения. M — масса гиростата, g — ускорение силы тяжести, ξ', η', ζ' — координаты точки T касания корпуса с неподвижной опорной плоскостью в системе $S\xi'\eta'\zeta'$. Из (1.2), (1.3) следует, что ξ', η', ζ' являются функциями углов θ и φ, определяются по уравнению (1.1) (функции f) и удовлетворяют двум соотношениям $f^{\boldsymbol{\cdot}}\equiv0$, приобретающим вид $(\xi'^{\boldsymbol{\cdot}}\sin\varphi+\eta'^{\boldsymbol{\cdot}}\cos\varphi)\sin\theta+\zeta'^{\boldsymbol{\cdot}}\cos\theta\equiv0$, причем здесь точкой обозначено дифференцирование по θ или φ. В частности получаем равенства $\eta^{\cdot\cdot}|_R=0$. D — осевой момент инерции ротора, I_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) — компоненты тензора инерции гиростата по отношению к правой ортогональной системе координат $SX'Y'Z'$, ось SZ' которой направлена вертикально вверх, SY' — по линии узлов в сторону, откуда поворот оси SZ' на угол θ до совмещения с осью $S\zeta'$ происходит против часовой стрелки. I_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) являются линейными формами главных центральных моментов инерции гиростата A, B, C с коэффициентами — тригонометрическими функциями углов θ и φ. Выражения I_{ij} приведены в [2].

Функция Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (1.5) не содержит переменных X_S, Y_S, ψ; матрица $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ (1.6) и диссипативная функция Релея $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (1.7) не зависят от координат X_S, Y_S. Для исключения из $\mathbf{F}$ и F переменной ψ вместо координат X_S, Y_S введем квазикоординаты ρ, σ по формулам [1]:

$$\rho^{\cdot}=X_S^{\cdot}\sin\psi-Y_S^{\cdot}\cos\psi,\qquad \sigma^{\cdot}=X_S^{\cdot}\cos\psi+Y_S^{\cdot}\sin\psi \tag{1.8}$$

Обобщенные квазиимпульсы p_ρ, p_σ, соответствующие квазикоординатам ρ, σ, определяются по аналогичным формулам

$$p_\rho=p_X\sin\psi-p_Y\cos\psi,\qquad p_\sigma=p_X\cos\psi+p_Y\sin\psi \tag{1.9}$$

Уравнения движения (1.4) в новых переменных приобретают вид

$$\mathbf{p}^{\cdot}=-\partial H/\partial\mathbf{q}-\mathbf{F}\partial H/\partial\mathbf{p}+\mathbf{r}\partial H/\partial p_\psi,\qquad \mathbf{q}^{\cdot}=\partial H/\partial\mathbf{p} \tag{1.10}$$

Здесь $\mathbf{p}=(p_\rho, p_\sigma, p_\psi, p_\theta, p_\varphi)^T$, $\mathbf{q}=(\rho, \sigma, \psi, \theta, \varphi)^T$, $\mathbf{r}=(p_\sigma, -p_\rho, 0, 0, 0)$; $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — функция Гамильтона (1.5), преобразованная к новым переменным при помощи соотношений (1.9); $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ — матрица диссипативной функции Релея $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (1.7), преобразованной к новым переменным с помощью соотношений (1.8), (1.9), так что

$$\mathbf{F}=k\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\chi_2 & -h & -\chi_2\cos\theta \\ 0 & 1 & -\varkappa & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & -\varkappa & \chi_2^2+\varkappa & h\chi_2 & \chi_1\varkappa+\chi_2^2\cos\theta \\ -h & 0 & h\chi_2 & h^2 & h\chi_2\cos\theta \\ -\chi_2\cos\theta & -\chi_1 & \chi_1\varkappa+\chi_2^2\cos\theta & h\chi_2\cos\theta & \chi_1^2+\chi_2^2\cos^2\theta \end{Vmatrix} \tag{1.11}$$

В уравнениях (1.10) функция Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, матрица $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ (1.11) и диссипативная функция Релея $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ не содержат явно переменных ρ, σ, ψ. Другими словами, переменные ρ, σ, ψ являются циклическими. Тогда в системе (1.10) выделяется подсистема первого — пятого, девятого и десятого уравнений для определения переменных p_ρ, p_σ, p_ψ, p_θ, p_φ, θ, φ, которую назовем приведенной системой.

2. Постановка задачи. Уравнения возмущенных движений. Уравнения движения (1.10) гиростата на неподвижной горизонтальной плоскости с вязким трением допускают частное решение

$$p_\rho=p_\sigma=0,\quad p_\psi=B\omega_1^0+D\omega_2^0 \tag{2.1}$$
$$p_\theta=p_\varphi=0,\quad \rho=\rho_0,\quad \sigma=\sigma_0$$
$$\psi=\omega_1^0t+\psi_0,\quad \theta=\pi/2,\quad \varphi=0$$

где ω_1^0, ρ_0, σ_0, ψ_0 — постоянные величины. На этом решении центр масс S гиростата неподвижен. Корпус равномерно вращается с произвольной угловой скоростью ω_1^0 вокруг оси $S\eta'$, занимающей вертикальное положение. Вокруг этой же оси равномерно вращается ротор. Точка T касания тела и опорной плоскости совпадает с R.

Исследуем устойчивость стационарного движения (2.1) гиростата на опорной плоскости с вязким трением относительно p_ρ, p_σ, p_ψ, p_θ, p_φ, θ, φ. Анализ устойчивости связан с рассмотрением уравнения поверхности корпуса (1.1) в окрестности точки $R(0, -h', 0)$ и уравнений возмущенных движений приведенной системы в окрестности положения равновесия

$$
\begin{aligned}
&p_\rho=p_\sigma=0,\quad p_\psi=B\omega_1^0+D\omega_2^0\\
&p_\theta=p_\varphi=0,\quad \theta=\pi/2,\quad \varphi=0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

соответствующего стационарному движению (2.1) исходной системы (1.10).

Уравнение опорной поверхности (1.1) в окрестности точки R с учетом условия $\operatorname{grad} f|_R=(0,\,-1,\,0)^T$ запишем в виде

$$
f(\xi',\,\eta',\,\zeta')=-\eta'-h'+{}^1/_2(P'\xi'^2-2Q'\xi'\zeta'+R'\zeta'^2)+f^*(\xi',\,\zeta')=0 \tag{2.3}
$$

$$
P'=r_1^{-1}\cos^2\varepsilon+r_2^{-1}\sin^2\varepsilon,\quad Q'=(r_1^{-1}-r_2^{-1})\sin\varepsilon\cos\varepsilon,
$$

$$
R'=r_1^{-1}\sin^2\varepsilon+r_2^{-1}\cos^2\varepsilon
$$

Здесь r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности (1.1) в точке R, ε — угол между осью $S\zeta'$ и направлением главной кривизны, соответствующей r_2, который отсчитывается от оси $S\zeta'$ против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси $S\eta'$, направленной вертикально вверх на невозмущенном движении (2.1), (2.2). Разложение функции f^* в ряд по степеням переменных ξ', ζ' начинается с членов выше второго порядка.

Полагаем $\theta=\pi/2+y_1'$, $\varphi=y_2'$ и находим с использованием (1.2), (1.3), (2.3) функции ξ', η', ζ' в окрестности точки R:

$$
\xi'=r_1r_2(Q'y_1'-R'y_2')+\xi^*(y_1',\,y_2') \tag{2.4}
$$

$$
\eta'=-h'+{}^1/_2r_1r_2(P'y_1'^2-2Q'y_1'y_2'+R'y_2'^2)+\eta^*(y_1',\,y_2'),
$$

$$
\zeta'=r_1r_2(P'y_1'-Q'y_2')+\zeta^*(y_1',\,y_2')
$$

Разложения функций ξ^*, η^*, ζ^* в ряды по степеням y_1', y_2' начинаются с членов выше второго порядка.

Обозначаем также $p_\rho=u_1'$, $p_\sigma=u_2'$, $p_\psi=B\omega_1^0+D\omega_2^0+u_3'$, $p_\theta=x_1$, $p_\varphi=x_2$ и находим с использованием (2.4) уравнения возмущенных движений приведенной системы в окрестности равновесия (2.2) в переменных u_1', u_2', u_3', x_1', x_2', y_1', y_2'. В правых частях уравнений возмущенных движений выделены линейные относительно указанных переменных слагаемые. Вводим новые безразмерные переменные u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, y_1, y_2 и время τ, безразмерные угловые скорости ω_1, ω_2, безразмерный коэффициент трения k и параметры a, b, n, l, l_1, l_2 по формулам

$$
u_i'=(BMg/h')^{1/2}u_i\quad (i=1,\,2) \tag{2.5}
$$

$$
u_3'=(BMgh')^{1/2}u_3,\quad x_j'=(BMgh')^{1/2}x_j
$$

$$
y_j'=y_j\quad (j=1,\,2),\quad t=(B/(Mgh'))^{1/2}\tau
$$

$$
\omega_1^0=(Mgh'/B)^{1/2}\omega_1,\quad \omega_2^0=(BMgh')^{1/2}\omega_2/D,\quad k'=(BMg/h')^{1/2}k/h'
$$

$$
a=B/A,\quad b=B/C,\quad n=Mh'^2/A
$$

$$
l=r_1r_2Q'/h',\quad l_1=r_1r_2P'/h',\quad l_2=r_1r_2R'/h'
$$

Получаем уравнения возмущенных движений приведенной системы в окрестности равновесия (2.2) для безразмерных величин, определенных согласно (2.5).

$$
u_1^\bullet=-ka/nu_1+u_2+kax_1+kly_1+k(\Omega+1-l_2)y_2+U_1, \tag{2.6}
$$

$$
u_2^\bullet=-u_1-ka/nu_2-kbx_2-k(\omega_1-1+l_1)y_1+kly_2+U_2,\quad u_3^\bullet=U_3
$$

$$
x_1^\bullet=ka/nu_1-kax_1-\omega_1x_2-(\omega_1(\omega_1+\omega_2)-1+l_1+kl)y_1+(l-k(\Omega+1-l_2))y_2+X_1
$$

$$
x_2^\bullet=-ka/nu_2-\Omega x_1-kbx_2+(l-k(\omega_1-1+l_1))y_1-(\Omega(\omega_1+\omega_2)-1+l_2-kl)y_2+X_2
$$

$$
y_1^\bullet=ax_1+\Omega y_2+Y_1,\quad y_2^\bullet=bx_2+\omega_1y_1+Y_2
$$

Здесь $\Omega=(a-1)\omega_1+a\omega_2$, U_i $(i=1, 2, 3)$, X_j, Y_j $(j=1, 2)$ — функции переменных u_i $(i=1, 2, 3)$, x_j, y_j $(j=1, 2)$, разложения которых в ряды по степеням переменных начинаются с членов выше первого порядка, причем U_i^0, X_j^0, Y_j^0 тождественно равны нулю; верхний нулевой индекс указывает, что в соответствующей функции все переменные, кроме x_3, положены равными нулю.

3. Необходимые и достаточные условия устойчивости. Введем в рассмотрение область допустимых значений параметров $F_0=\{\mathbf{c}=(\omega_1, \omega_2, k, a, b, n, l, l_1, l_2): k>0, a<b(a+1), b<a(b+1), a>b(a-1), l_1>0, l_2>0\}$. Характеристическое уравнение системы (2.6) имеет вид

$$\lambda(\lambda^6+Q_1\lambda^5+Q_2\lambda^4+Q_3\lambda^3+Q_4\lambda^2+Q_5\lambda+Q_6)=0 \tag{3.1}$$

Приведем выражения коэффициентов Q_m $(m=1,\ldots,6)$ характеристического уравнения (3.1) через безразмерные параметры $\mathbf{c}\in F_0$ гиростата, определенные по формулам (2.5):

$$Q_1=k(2a/n+a+b) \tag{3.2}$$

$$Q_2=\sigma_2+1+k^2(a^2/n^2+(a+b)a/n+ab)+k(a-b)l$$

$$Q_3=k^2(a-b)la/n+k(2\sigma_2a/n+\sigma_3+a+b)$$

$$Q_4=\sigma_2+\sigma_4+k^2(\sigma_2a^2/n^2+(\sigma_3+2(a\omega_1-b\Omega)-a(1-l_1)-b(1-l_2))a/n+\sigma+ab)+$$
$$+k(\sigma_5+(a-b)l)$$

$$Q_5=k^2\sigma_5a/n+k(2\sigma_4a/n+\sigma_3),$$

$$Q_6=\sigma_4+k^2(\sigma_4a^2/n^2+(\sigma_1+ab(1-l_1)(1-l_2))a/n+\sigma)+k\sigma_5$$

$$\sigma_1=a\omega_1^2(1-l_2)+b\Omega^2(1-l_1)-ab(\omega_1(1-l_2)+\Omega(1-l_1))(\omega_1+\omega_2)+\sigma,$$

$$\sigma_2=(a\omega_1+b\Omega)(\omega_1+\omega_2)-2\omega_1\Omega-a(1-l_1)-b(1-l_2),$$

$$\sigma_3=ab(\omega_1+\Omega)(\omega_1+\omega_2)-a\omega_1^2-b\Omega^2+(a\omega_1-b\Omega-ab)(2-l_1-l_2)$$

$$\sigma_4=\omega_1\Omega(ab(\omega_1+\omega_2)^2-(a\omega_1+b\Omega)(\omega_1+\omega_2)+\omega_1\Omega)+\sigma_1,$$
$$\sigma_5=(a\omega_1^2-b\Omega^2+ab(\Omega-\omega_1)(\omega_1+\omega_2))l$$

$$\sigma=ab((1-l_1)(1-l_2)-l^2),\quad \Omega=(a-1)\omega_1+a\omega_2$$

Рассмотрим главные диагональные миноры матрицы Гурвица [3] для уравнения (3.1):

$$\Delta_2=Q_1Q_2-Q_3,\quad \Delta_3=\Delta_2Q_3-Q_1(Q_1Q_4-Q_5) \tag{3.3}$$

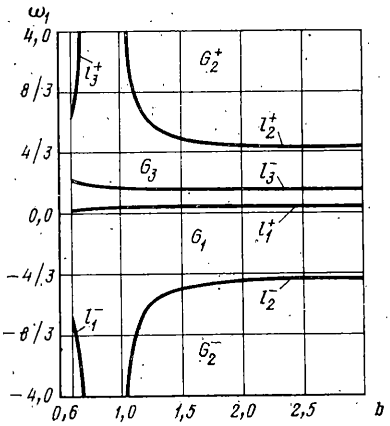
$$\Delta_4=\Delta_3Q_4+\Delta_2(Q_1Q_6-Q_2Q_5)+Q_5(Q_1Q_4-Q_5)$$

$$\Delta_5=\Delta_4Q_5-\Delta_3Q_3Q_6+Q_1Q_6(\Delta_2Q_5-Q_1^2Q_6)$$

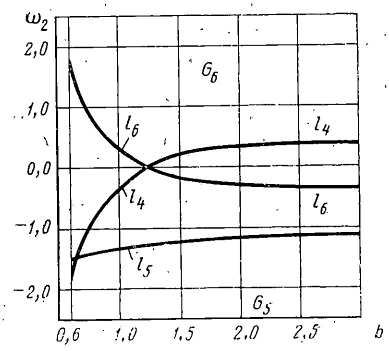
Подстановка формул (3.2) в (3.3) дает окончательные выражения величин Δ_m $(m=2,\ldots,5)$ через параметры $\mathbf{c}\in F_0$. Критерий Льенара — Шипара [3] запишем в следующей форме. Для того, чтобы все корни характеристического уравнения (3.1), кроме нулевого, лежали в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$Q_m>0\quad (m=1,\ldots,6),\quad \Delta_3>0,\quad \Delta_5>0 \tag{3.4}$$

Предположим, что нарушено по крайней мере одно из условий (3.4) и среди корней уравнения (3.1) нет чисто мнимых, за исключением нулевого. Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [4] положение равновесия (2.2) (стационарное движение (2.1)) неустойчиво. Если же выполнены условия (3.4), согласно теореме Ляпунова об устойчивости в особенном случае критического случая одного нулевого



Фиг. 1



Фиг. 2

корня [4] равномерное вращение (2.1) гиростата устойчиво, причем асимптотически относительно p_ρ, p_σ, p_θ, p_φ, θ, φ и неасимптотически относительно p_ψ.

Замечание. В [1] получены условия устойчивости равномерного вращения абсолютно твердого тела на плоскости с вязким трением. Если в формулах (3.2) положить $\omega_2=0$, приведенные здесь необходимые и достаточные условия устойчивости гиростата переходят в условия устойчивости твердого тела, отличающиеся от полученных в [1] лишь формой.

4. Частные случаи. Неравенства (3.4) можно расценивать как ограничения на исходные параметры (2.5). Для наглядной интерпретации полученных ограничений рассмотрим частные случаи, когда фиксированы значения всех параметров, кроме b и ω_1 или ω_2. Положим $a=1{,}5$, $n=1{,}0$, $l=0{,}1$, $l_1=l_2=0{,}6$ [2], $k=3{,}0$. Тогда $F_0=\{(\omega_1,\ \omega_2,\ b):b\in(0{,}6;\ 3{,}0)\}$. Проверка выполнения неравенств (3.4) осуществлялась на ЭВМ. Расчеты производились с пошаговым изменением параметров в прямоугольнике $\{b\in(0{,}6;\ 3{,}0)\}\times\{(\omega_1 \text{ или } \omega_2)\in[-6{,}0;\ 6{,}0]\}$.

Результаты расчетов в случаях $\omega_2=\text{const}$ представлены на фиг. 1, в случаях $\omega_1=\text{const}$ – на фиг. 2. В случаях $\omega_2=-2{,}0$; $\omega_2=0{,}0$; $\omega_2=2{,}0$ области выполнения достаточных условий устойчивости (3.4) (с обозначениями (3.3), (3.2)) G_1; $G_2=G_2^-\cup G_2^+$; G_3 соответственно ограничены кривыми l_1^- и l_1^+; l_2^- и l_2^+; l_3^- и l_3^+. В случаях $\omega_1=-2{,}0$; $\omega_1=0{,}0$; $\omega_1=2{,}0$ области устойчивости G_4; G_5; G_6 соответственно ограничены кривыми l_4; l_5; l_6.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод (сравн. [1]). Устойчивость равномерного вращения (2.1) гиростата существенно зависит как от направления вращения корпуса, так и от направления вращения ротора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 42–51.
2. *Беликов С. А.* Устойчивость равномерных вращений гиростата вокруг вертикальной главной оси на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1986. Т. 50, вып. 1. С. 73–82.
3. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 304 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
11.IV.1989