МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 531.38

В. М. СЕРОВ

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО МОМЕНТА

В [1, 2, 3 и др.] исследуется движение твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях, близких к случаю Лагранжа. В настоящей работе предполагается, что вектор действующего на тело момента перпендикулярен плоскости угла нутации, а его величина пропорциональна сумме двух первых гармоник тригонометрического ряда по синусам угла нутации. Найдены общие решения для углов Эйлера. Рассмотрено движение тела при наличии возмущений, обусловленных медленным изменением формы зависимости момента от угла нутации, а также действием малых моментов диссипативных сил. С помощью метода В. М. Волосова получены усредненные уравнения возмущенного движения, правые части которых не содержат быстроосциллирующих функций и выражаются через полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

1. Интегрирование уравнений невозмущенного вращательного движения. Рассмотрим вращательное движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки. Если центр вращения лежит на оси динамической симметрии, то это движение может быть описано с помощью динамических уравнений Эйлера

$$Ap^{\cdot}+(C-A)qr=M_p,\qquad Aq^{\cdot}+(A-C)pr=M_q,\qquad Cr^{\cdot}=M_r \tag{1.1}$$

Кинематические уравнения в случае использования углов Эйлера для задания ориентации тела записываются в виде

$$\theta^{\cdot}=p\cos\varphi-q\sin\varphi,\qquad \psi^{\cdot}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)/\sin\theta$$
$$\varphi^{\cdot}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)/\operatorname{tg}\theta \tag{1.2}$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела; θ, ψ, φ — углы нутации, прецессии и собственного вращения; A, C — осевой и экваториальный моменты инерции тела; M_p, M_q, M_r — компоненты вектора момента, действующего на тело. Выразив из кинематических уравнений (1.2) угловые скорости p, q, r и подставив их в динамические уравнения (1.1), можно получить следующую систему

$$\theta^{\cdot\cdot}+(G-R\cos\theta)(R-G\cos\theta)/\sin^3\theta-(M_p\cos\varphi-M_q\sin\varphi)/A=0$$
$$\psi^{\cdot}=(G-R\cos\theta)/\sin^2\theta \tag{1.3}$$
$$\varphi^{\cdot}=R/\mu-(G-R\cos\theta)\cos\theta/\sin^2\theta$$

Здесь $\mu=C/A$, а через R и G обозначены отнесенные к экваториальному моменту инерции A проекции вектора кинетического момента соответственно на ось динамической симметрии тела и на неподвижную ось, от которой отсчитывается угол нутации: $R=\mu r$, $G=\mu r\cos\theta+(p\sin\varphi+q\sin\varphi)\sin\theta$.

Пусть вектор момента, действующего на тело, перпендикулярен плоскости угла нутации. Обозначим величину этого момента через M_θ. Тогда

$$M_p = M_\theta \cos\varphi, \qquad M_q = -M_\theta \sin\varphi, \qquad M_r = 0$$

$$M_p \cos\varphi - M_q \sin\varphi = M_\theta \tag{1.4}$$

Предположим, что значение M_θ следующим образом зависит от угла нутации

$$M_\theta(\theta) = A(a\sin\theta + b\sin 2\theta) \tag{1.5}$$

где a, b — постоянные коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается (это означает, что момент M_θ может быть как опрокидывающим, так и восстанавливающим). В данном случае величины R и G являются интегралами движения и не изменяются во времени. С учетом (1.4) и (1.5) первое уравнение системы (1.3) примет вид

$$\ddot\theta + (G - R\cos\theta)(R - G\cos\theta)/\sin^3\theta - a\sin\theta - b\sin 2\theta = 0$$

Рассматриваемая динамическая система кроме двух интегралов R и G имеет также интеграл энергии

$$E = \dot\theta^2/2 + (G - R\cos\theta)^2/2\sin^2\theta + a\cos\theta + b\cos^2\theta \tag{1.6}$$

Вводя новую переменную $u = \cos\theta$, из (1.6) можно получить

$$\dot u^2 = 2(1-u^2)(E - au - bu^2) - (G - Ru)^2 \equiv f(u) \tag{1.7}$$

Здесь $f(u)$ — степенной полином 4-й степени, определяемый следующим образом

$$f(u) = \sum_{i=0}^{4} g_i u^i = 2b \prod_{i=1}^{4} (u - u_i)$$

$$g_0 = 2E - G^2, \qquad g_1 = 2(GR - a), \qquad g_2 = -2b - R^2 - 2E, \qquad g_3 = 2a, \qquad g_4 = 2b$$

Два из четырех корней полинома $f(u)$ соответствуют амплитудным значениям угла нутации: $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$. Оставшиеся два корня могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Разделяя переменные в уравнении (1.7), получим

$$dt = \pm[f(u)]^{-1/2} du \tag{1.8}$$

Здесь знак выбирается в зависимости от знака du таким образом, чтобы в любой момент времени правая часть уравнения была неотрицательной. Существует замена переменных $u = u(\gamma)$ (ее вид определяется типом корней полинома $f(u)$ [5]), позволяющая проинтегрировать уравнение (1.8) и выразить решение через эллиптические функции. В результате для угла нутации можно получить

$$\cos\theta = L + \frac{M}{1 + N\sin^2(\delta\gamma(t))} \tag{1.9}$$

$$\gamma(t) = \operatorname{am}(\beta t + \tau_0, k), \qquad \tau_0 = \int_0^{\gamma_0} [1 - k^2\sin^2\gamma]^{-1} d\gamma \equiv F(\gamma_0, k) \tag{1.10}$$

$$\gamma_0 = -\operatorname{sign}(\dot\theta_0)\,\delta^{-1} \arcsin\left[\frac{L + M - \cos\theta_0}{N(\cos\theta_0 - L)}\right]^{1/2}$$

Здесь использованы обозначения am — для амплитуды Якоби, F — для неполного нормального эллиптического интеграла Лежандра первого рода. Параметр δ может принимать значения 1 или 1/2. Вид выражений для определения остальных параметров, входящих в (1.9), (1.10), зависит от типа корней u_3 и u_4 полинома $f(u)$:

1) u_3, u_4 — действительные ($u_3>u_4$, при $b<0$; $u_3<u_4$ при $b>0$)

$$\delta=1, \quad L=u_3, \quad M=u_2-u_3$$
$$N=(u_1-u_2)/(u_3-u_1), \quad \beta=[2b(u_1-u_3)(u_2-u_4)]^{1/2}$$
$$k^2=(u_1-u_2)(u_3-u_4)/(u_1-u_3)(u_2-u_4)$$

2) u_3, u_4 — комплексно-сопряженные ($u_{3,4}=c\pm id$)

$$\delta=1/2, \quad L=u_1-(u_1-u_2)\xi/(\xi-1)$$
$$M=(u_1-u_2)\xi/(\xi-1), \quad N=\xi-1, \quad \beta=(2b\eta)^{1/2}$$
$$k^2=1/2-[(u_1-c)(u_2-c)+d^2]/2\eta$$
$$\xi=[(u_1-c)^2+d^2]^{1/2}[(u_2-c)^2+d^2]^{-1/2}$$
$$\eta=[(u_1-c)^2+d^2]^{1/2}[(u_2-c)^2+d^2]^{1/2}$$

Решение типа (1.9) для частного случая, когда $M_\theta\sim\sin\theta$, приведено в [2]. Подставляя (1.9) во второе и третье уравнения системы (1.3) и интегрируя последние по времени, получим

$$\psi-\psi_0=\int_{t_0}^{t}\Phi_\psi(\theta(t))\,dt, \quad \varphi-\varphi_0=\int_{t_0}^{t}\Phi_\varphi(\theta(t))\,dt \tag{1.11}$$

Разложим функции $\Phi_\psi(\theta)$ и $\Phi_\varphi(\theta)$ на простейшие дроби по $\cos\theta$:

$$\begin{aligned}\Phi_\psi(\theta)&=[(G+R)/(1+\cos\theta)+(G-R)/(1-\cos\theta)]/2\\ \Phi_\varphi(\theta)&=[(G+R)/(1+\cos\theta)-(G-R)/(1-\cos\theta)]/2+R(1-\mu)/\mu\end{aligned} \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.11) и используя определенную в (1.10) переменную γ, общие решения для углов ψ и φ можно выразить через интегралы типа

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma}\frac{d\gamma}{(1+w\sin^2\delta\gamma)(1-k^2\sin^2\gamma)^{1/2}}$$

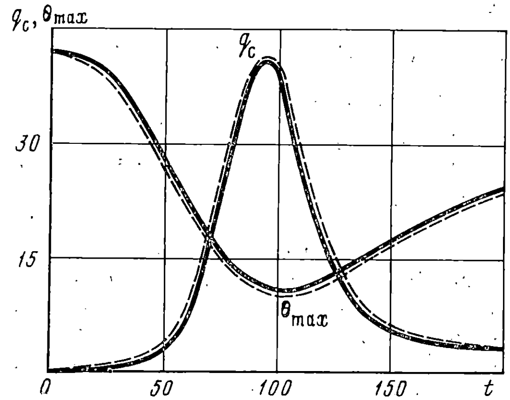
которые, в свою очередь, при $\delta=1$ и $\delta=1/2$ выражаются через элементарные функции и эллиптические интегралы [6]. Окончательно общие решения для углов ψ и φ записываются в следующем виде

$$\psi-\psi_0=P_\psi t+[\chi_+\Pi(\gamma,w_+,k)-\chi_-\Pi(\gamma,w_-,k)+w_+L_+(\gamma)-w_-L_-(\gamma)]\Big|_{\gamma_0}^{\gamma(t)}$$
$$\varphi-\varphi_0=P_\varphi t+[\chi_+\Pi(\gamma,w_+,k)+\chi_-\Pi(\gamma,w_-,k)+w_+L_+(\gamma)+w_-L_-(\gamma)]\Big|_{\gamma_0}^{\gamma(t)}$$
$$P_\psi=(RL-G)/(L^2-1), \quad P_\varphi=(GL-R)/(L^2-1)+R(\mu^{-1}-1)$$

Здесь использовано обозначение Π для неполного нормального эллиптического интеграла Лежандра третьего рода. Вид выражений для остальных параметров, входящих в (1.13), зависит от типа корней полинома $f(u)$:

1) все корни действительные

$$w_+=\frac{(u_1-u_2)(1+u_3)}{(u_3-u_1)(1+u_2)}, \quad w_-=\frac{(u_1-u_2)(1-u_3)}{(u_3-u_1)(1-u_2)}$$
$$\chi_+=\frac{(G+R)(u_3-u_2)}{2\beta(1+u_2)(1+u_3)}, \quad \chi_-=\frac{(G-R)(u_3-u_2)}{2\beta(1-u_2)(1-u_3)}$$
$$L_+(\gamma)\equiv0, \quad L_-(\gamma)\equiv0$$



2) два действительных и два комплексных корня

$$w_+ = \frac{[(1+u_1)-\xi(1+u_2)]^2}{4\xi(1+u_1)(1+u_2)}, \quad w_- = \frac{[(1-u_1)-\xi(1-u_2)]^2}{4\xi(1-u_1)(1-u_2)}$$

$$\chi_+ = \frac{(G+R)(u_1-u_2)}{4\beta(1+u_1)(1+u_2)} \frac{(1+u_1)+\xi(1+u_2)}{(1+u_1)-\xi(1+u_2)}$$

$$\chi_- = \frac{(G-R)(u_1-u_2)}{4\beta(1-u_1)(1-u_2)} \frac{(1-u_1)+\xi(1-u_2)}{(1-u_1)-\xi(1-u_2)}$$

$$L_+(\gamma) = -\lambda_+^{-1} \operatorname{arctg} [\lambda_+ \sin\gamma(1-k^2\sin\gamma)]^{-1/2}$$

$$L_-(\gamma) = -\lambda_-^{-1} \operatorname{arctg} [\lambda_- \sin\gamma(1-k^2\sin\gamma)]^{-1/2}$$

$$\lambda_+ = (k^2+w_+)^{-1/2}, \quad \lambda_- = (k^2+w_-)^{-1/2}$$

2. Усредненные уравнения вращательного движения. Рассмотрим вращательное движение тела в случае, когда коэффициенты a и b, входящие в выражение для M_θ (1.5), медленно изменяются во времени. Предположим, что на тело кроме момента M_θ действует также малый момент диссипативных сил, зависящий от угла нутации θ и его производной $\theta^{\cdot}$. При наличии указанных возмущений первые интегралы невозмущенного движения R и G не являются постоянными величинами. В этом случае нутационное движение тела может быть описано системой вида

$$\theta^{\cdot\cdot}+F(\theta, z) = \varepsilon\Phi_\theta(\theta, \theta^{\cdot}, z), \quad z^{\cdot} = \varepsilon\Phi_z(\theta, z)$$
$$F(\theta, z) = (G-R\cos\theta)(R-G\cos\theta)/\sin^3\theta - a\sin\theta - b\sin 2\theta \tag{2.1}$$

Здесь $z=(R, G, a, b)$ — вектор «медленных» переменных; ε — малый параметр. Изменение углов ψ и φ определяется аналогично невозмущенному случаю и поэтому не рассматривается.

Воспользуемся схемой усреднения В. М. Волосова [4] и перейдем от системы (2.1) к следующей усредненной системе

$$\theta^{\cdot}_{\text{ext}} = \varepsilon[\langle\Phi_\theta\theta^{\cdot}\rangle + \langle\Phi_z W^z\rangle - \langle\Phi_z\rangle W^z(\theta_{\text{ext}}, z)]/F(\theta_{\text{ext}}, z)$$
$$z^{\cdot} = \varepsilon\langle\Phi_z\rangle \tag{2.2}$$

$$W^z(\theta, z) = \partial W(\theta, z)/\partial z, \quad W(\theta, z) = \int F(\theta, z)\,d\theta$$

$$\langle\Phi_z\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\Phi_z(\theta(t),z)\,dt,\quad \langle\Phi_\theta\theta^{\boldsymbol\cdot}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\Phi_\theta(\theta(t),\theta^{\boldsymbol\cdot},z)\,\theta^{\boldsymbol\cdot}\,dt \tag{2.3}$$

$$\langle\Phi_z W^z\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\Phi_z(\theta(t),z)\,W^z(\theta(t),z)\,dt$$

Здесь T — период колебания угла нутации; θ_{ext} — одно из амплитудных значений угла нутации θ_{min} или θ_{max} (другое значение находится из интеграла энергии (1.6) с учетом того, что $E(\theta_{min})=E(\theta_{max})$). Интегралы в выражениях (2.3) согласно схеме усреднения берутся при $z=\text{const}$. Зависимость $\theta(t)$ представляет собой общее решение для угла нутации в невозмущенном случае, найденное выше (выражение (1.9)).

Предположим, что зависимости $\Phi_\theta(\theta,\ \theta^{\boldsymbol\cdot},\ z)$, $\Phi_z(\theta,\ z)$ могут быть представлены в виде дробно-рациональных функций от $u\equiv\cos\theta$:

$$\Phi_s=f_s(u)=P_n(u)/Q_m(u)\qquad (s=\theta,\ z) \tag{2.4}$$

где $P_n(u)$ и $Q_m(u)$ — многочлены степеней n и m соответственно, причем n может быть как больше, так и меньше m. Поставим условие, чтобы все корни многочлена $Q_m(u)$ были действительными. Тогда, разлагая функции $f_\theta(u)$ и $f_z(u)$ на простейшие дроби, а затем подставляя их в выражения (2.3), все встречающиеся интегралы можно привести к одной из следующих форм

$$\int_0^T\cos^i\theta(t)\,dt,\qquad \int_0^T\frac{dt}{1\pm\cos\theta(t)} \tag{2.5}$$

Используя переменную интегрирования γ, определяемую выражением (1.10), от интегралов (2.5) можно перейти к интегралам вида

$$\int_0^{\pi/\delta}\frac{d\gamma}{(1+w\sin^2\delta\gamma)^i(1-k^2\sin^2\gamma)^{1/2}}\qquad (i=1,n)$$

которые рекуррентным образом выражаются через нормальные полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода [6].

3. Пути практического использования усредненных уравнений. Приведенные выше усредненные уравнения (2.2) могут быть использованы на практике при анализе вращательного движения вокруг центра масс неуправляемых летательных аппаратов, совершающих спуск в атмосфере. Для широкого класса таких аппаратов величина действующего на них восстанавливающего аэродинамического момента с приемлемой точностью определяется зависимостью вида (1.5). При этом угол нутации, называемый также пространственным углом атаки, отсчитывается от направления вектора скорости центра масс аппарата. В данном случае непостоянство коэффициентов a и b в выражении (1.5) обусловлено изменением параметров набегающего воздушного потока в процессе полета (скоростного напора, числа Маха и др.). Конкретный вид функций $\Phi_\theta(\theta,\ \theta^{\boldsymbol\cdot},\ z)$ и $\Phi_z(\theta,\ z)$ зависит от принятой аэродинамической модели, однако при этом всегда выполняется условие (2.4).

Использование усредненных уравнений вместо исходных при численном моделировании движения спускаемых аппаратов позволяет получать результаты с достаточной для практических целей точностью при значительно меньших (приблизительно на порядок) вычислительных затратах.

На фигуре показан характер изменения скоростного набора q_c и огибающей максимумов угла атаки θ_{max} для траектории спуска аппарата сегментально-конической формы. Сплошная линия соответствует расчету по усредненным уравнениям, штриховая – по полным. Величина расхождения результатов не превышает 4%.

Следует подчеркнуть, что в отличие от квазилинейного и квазистатического подхода к решению подобных задач никаких ограничений на параметры вращательного движения (в частности на угол атаки), здесь не накладывается.

Автор благодарит В. С. Асланова за постановку задачи и ценные рекомендации в процессе работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
2. *Асланов В. С.* О вращательном движении баллистического осесимметричного аппарата при спуске в атмосферу // Космич. исследования. 1976. Т. 14. Вып. 4. С. 491–497.
3. *Асланов В. С., Тимбай И. А., Бойко В. В.* Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты // Космич. исследования. 1981. Т. 14. Вып. 5. С. 680–687.
4. *Волосов В. М.* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 1. С. 3–53.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

Самара

Поступила в редакцию
30.V.1990