МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 531.37

А. П. ПАНОВ

ПОЛЯРНЫЕ ФОРМЫ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель статьи – показать существование новых (полярных) форм векторных кинематических и динамических уравнений вращения твердого тела и с помощью этих форм обосновать выбор новых лагранжевых и гамильтоновых переменных конечного вращения тела. Такие переменные соответствуют кинематическим векторам вращения с модулями, пропорциональными тангенсу четверти угла конечного вращения. Рассмотрены матричные представления полярных форм кинематических уравнений, соответствующих указанным векторам вращения, в трех координатных базисах: 1) неподвижном базисе, 2) связанном с телом подвижном базисе и 3) специальном подвижном промежуточном базисе, занимающем среднее положение между первыми двумя базисами. Показано, что именно в промежуточном базисе представления векторных кинематических уравнений вращения приобретают наиболее простой вид. Установлено, что локальные производные указанных векторов вращения, взятые относительно промежуточного базиса, совпадают по направлению с вектором угловой скорости тела. Введены обобщенные импульсы, соответствующие координатам произвольного вектора вращения (обобщенным координатам), и рассмотрены полярные формы матричных уравнений связи введенных обобщенных импульсов с координатами вектора кинетического момента и лагранжевыми переменными конечного вращения тела. Показано, что наиболее простой вид такие уравнения связи приобретают при их записи в промежуточном координатном базисе. Установлено, что соответствующий любому из указанных кинематических векторов вектор количества вращательного движения относительно промежуточного базиса совпадает по направлению с вектором кинетического момента тела.

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве заданы два правых ортонормированных координатных базиса **I** и **J**, имеющие общее начало. Базис **I** считаем неподвижным, а базис **J** – подвижным и связанным с твердым телом. Тело имеет одну неподвижную точку, совпадающую с началом базисов **I**, **J**. Полагаем, что в некоторый начальный момент времени t_0 одноименные орты базисов **I** и **J** совпадают и из этого начального положения базис **J** совершает вместе с телом некоторое произвольное сферическое движение вокруг неподвижной точки с произвольным по модулю и направлению вектором ω угловой скорости. В каждый последующий момент времени t положение базиса **J** относительно базиса **I** будем определять непрерывным во времени оператором **R** рассогласующего конечного вращения [1] и его произвольным вещественным собственным вектором $\mathbf{x}=x\mathbf{n}$ – вектором вращения, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор оси вращения, x – модуль вектора, являющийся произвольной функцией угла φ конечного вращения, т. е. $x=x(\varphi)$. Одноименные координаты x_m $(m=1, 2, 3)$ вектора $\mathbf{x}$ в базисах **I** и **J** равны и представляют собой произвольные обобщенные [2] «угловые» координаты твердого тела.

Рассмотрим обобщенные векторные кинематические уравнения конечного вращения твердого тела [1]:

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{G}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x}^{*}=\mathbf{G}^{T}\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}^{T}\mathbf{x}^{*} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x}^{\bullet}$, $\mathbf{x}^*$ — абсолютная и относительная производные по времени вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ — операторы, имеющие вид

$$\mathbf{G}=x'\mathbf{E}-{}^1/_2\mathbf{X}+\delta\mathbf{X}^2 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{G}^{-1}=\mathbf{E}/x'+\beta\mathbf{X}+\gamma\mathbf{X}^2 \tag{1.4}$$

где $\mathbf{E}$ — единичный оператор, $\mathbf{G}^{-1}$ — обратный оператор, $x'=dx/d\varphi$ — производная модуля x по углу φ, $\mathbf{X}$ — кососимметрический оператор векторного умножения, соответствующий вектору $\mathbf{x}$, $\beta=(1-\cos\varphi)/x^2$, $x^2=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})$ — скалярное произведение, T — индекс транспонирования

$$\delta=(x'-{}^1/_2 x\,\mathrm{ctg}\,(\varphi/2))/x^2 \tag{1.5}$$

$$\gamma=(1-x'\alpha)/(x'x^2),\quad \alpha=(\sin\varphi)/x \tag{1.6}$$

Из уравнений (1.1)—(1.2) следуют все возможные векторные кинематические уравнения для конкретных функций $x=x(\varphi)$. Выбор функции $x=x(\varphi)$ может быть как произвольным, так и подчиненным некоторым условиям. Представляют интерес случаи выбора таких функций $x=x(\varphi)$, при которых разложения операторов (1.3), (1.4) принимают наиболее простой вид.

Например, рассмотрим условие $\delta=0$. Из (1.5) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $x'=(\mathrm{ctg}\,(\varphi/2))(x/2)$, решением которого является функция $x=\lambda=k_\lambda \sin(\varphi/2)$, где k_λ — произвольная постоянная. Если же потребуем, чтобы выполнялось условие $\gamma=0$, то из (1.6) получаем дифференциальное уравнение $x'=(\sin\varphi)^{-1}x$. Решение этого уравнения есть функция $x=v=k_\vartheta\,\mathrm{tg}\,(\varphi/2)$ (k_ϑ — произвольная постоянная).

Векторы $\boldsymbol{\lambda}=\lambda\mathbf{n}$ при $k_\lambda=1$ и вектор $\boldsymbol{\vartheta}=\vartheta\mathbf{n}$ при $k_\lambda=2$ являются наиболее известными в теории конечного поворота твердого тела [2, 3] и этими же векторами, как видим, исчерпываются возможности получения наиболее простых структур операторов конкретных векторных кинематических уравнений при использовании обобщенных операторов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ в форме (1.3), (1.4).

2. Рассмотрим новые формы обобщенных векторных кинематических уравнений вращения, в которых операторы $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ представлены разложениями

$$\mathbf{G}=\mathbf{Q}^T\mathbf{D},\quad \mathbf{F}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{Q}$ — ортогональный оператор (оператор вращения), $\mathbf{D}$ — симметрический оператор.

Разложения вида (2.1) называются полярными разложениями [4, 5]. В связи с этим формы записи векторных уравнений с разложениями вида (2.1) для операторов (или матриц) будем называть полярными формами уравнений.

Найдем связь операторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$ с оператором $\mathbf{X}$. Умножив первое из разложений (2.1) на его транспонированное выражение, получим $\mathbf{D}^2=\mathbf{G}\mathbf{G}^T$. Учитывая, что [1] $\mathbf{G}^T=\mathbf{R}\mathbf{G}=\mathbf{G}\mathbf{R}$, имеем равенство $\mathbf{D}^2=(\mathbf{G}\mathbf{R}^{1/2})^2$, откуда следует разложение

$$\mathbf{G}=(\mathbf{R}^T)^{1/2}\mathbf{D} \tag{2.2}$$

Сравнивая (2.2) с (2.1), получаем $\mathbf{Q}=\mathbf{R}^{1/2}$. Тогда по аналогии с разложением [1]:

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+x^{-1}\sin\varphi\mathbf{X}+x^{-2}(1-\cos\varphi)\mathbf{X}^2$$

можно записать

$$\mathbf{Q}=\mathbf{E}+\frac{1}{x}\sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{X}+\frac{1}{x^2}\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{X}^2 \tag{2.3}$$

С помощью разложений (1.3), (2.3) находим из (2.1) связь оператора $\mathbf{D}$ с оператором $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{D}=x'\mathbf{E}+\eta\mathbf{X}^2, \quad \eta=(x'-x/(2\sin(\varphi/2))/x^2 \tag{2.4}$$

Обратный оператор $\mathbf{D}^{-1}$ находится в виде

$$\mathbf{D}^{-1}=\frac{1}{x'}\mathbf{E}+\xi\mathbf{X}^2, \quad \xi=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x'}-\frac{2}{x}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \tag{2.5}$$

Замечая, что операторы $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^T$ перестановочны (они имеют общий собственный вектор $\mathbf{x}$), можно наряду с выражениями (2.1), (2.2) записать разложения $\mathbf{G}=\mathbf{DQ}^T$, $\mathbf{F}=\mathbf{QD}^{-1}$, а также разложения транспонированных операторов: $\mathbf{G}^T=\mathbf{DQ}=\mathbf{QD}$, $\mathbf{F}^T=\mathbf{Q}^T\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^T$.

Как видно из выражений (2.3)–(2.5) структуры операторов $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^T$ не зависят от вида функции $x=x(\varphi)$, в то время как структуры операторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^{-1}$ зависят от вида этой функции и их можно существенно упростить при соответствующем ее выборе.

Симметрический оператор $\mathbf{D}$ имеет три собственных числа, одно из которых равно x', а два других – $x/(2\sin(\varphi/2))$. Особый интерес представляет случай равенства всех трех собственных чисел оператора $\mathbf{D}$. В этом замечательном случае операторы (2.4), (2.5) приводятся к диагональному виду – скалярному оператору $x'\mathbf{E}$. Функция $x=x(\varphi)$, определяющая этот случай, находится из дифференциального уравнения $x'=x/(2\sin(\varphi/2))$ и имеет вид

$$x=\tau=k_\tau \operatorname{tg}\varphi/4 \tag{2.6}$$

где k_τ – произвольная постоянная.

Заметим, что векторы вращения $\boldsymbol{\tau}=\tau\mathbf{n}$, соответствующие функции (2.6) и введенные в [1, 6], были предварительно найдены из разложений (2.4), (2.5).

Выпишем полярные формы кинематических уравнений для произвольного вектора $\boldsymbol{\tau}$, получаемые из (1.1), (1.2) с учетом разложений (2.1)–(2.5):

$$\boldsymbol{\tau}^\cdot=\tau'\mathbf{Q}^T_{(\tau)}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\tau}^*=\tau'\mathbf{Q}_{(\tau)}\boldsymbol{\omega} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{\tau'}\mathbf{Q}_{(\tau)}\boldsymbol{\tau}^\cdot=\frac{1}{\tau'}\mathbf{Q}^T_{(\tau)}\boldsymbol{\tau}^* \tag{2.8}$$

$$\mathbf{Q}_{(\tau)}=\mathbf{E}+\frac{2}{k_\tau{}^2+\tau^2}(k_\tau\mathbf{T}+\mathbf{T}^2) \tag{2.9}$$

(это разложение следует из разложения (2.3)):

$$\tau'={}^1/_4(k_\tau+\tau^2/k_\tau)=d\tau/d\varphi \tag{2.10}$$

$\mathbf{T}$ – кососимметрический оператор, соответствующий вектору $\boldsymbol{\tau}$.

3. Введем специальный подвижный правый ортонормированный координатный базис $\mathbf{H}$, занимающий среднее или промежуточное положение между базисами $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$. Взаимное положение базисов $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ определим преобразованиями вращения [1]: $\mathbf{j}_m=\mathbf{Ri}_m$, $\mathbf{h}_m=\mathbf{Qi}_m$, $\mathbf{j}_m=\mathbf{Qh}_m$, где $\mathbf{i}_m$, $\mathbf{j}_m$, $\mathbf{h}_m$ ($m=1, 2, 3$) – орты базисов. Базис $\mathbf{H}$ назовем промежуточным подвижным базисом.

В [1] показано, что локальная производная $\mathbf{x}^*$ произвольного вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{J}$ связана с абсолютной производной $\mathbf{x}^\cdot$ этого вектора линейным преобразованием $\mathbf{x}^*=\mathbf{Rx}^\cdot$. По аналогии с этим преобразованием можно записать

$$\mathbf{x}^\circ=\mathbf{Qx}^\cdot \tag{3.1}$$

а также

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{Qx}^\circ \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x}^\circ$ — локальная производная вектора $\mathbf{x}$ относительно промежуточного базиса $\mathbf{H}$.

Учитывая преобразования (3.1), (3.2), преобразуем уравнения (2.7), (2.8) к наиболее простому векторному виду

$$\boldsymbol{\tau}^\circ=\tau'\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\tau}^\circ/\tau' \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\tau}^\circ$ — локальная производная вектора $\boldsymbol{\tau}$ в базисе $\mathbf{H}$. В частном случае, когда $\tau=y=\mathrm{tg}(\varphi/4)$, из уравнений (3.3) следуют уравнения $\mathbf{y}^\circ=y'\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{y}^\circ/y'$, $y'=dy/d\varphi={}^1/_4(1+y^2)$, $y^2=(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})$. Уравнения (3.3) показывают, что локальная производная $\boldsymbol{\tau}^\circ$ совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{\omega}$ — независимой переменной.

Отметим, что для каждого из векторов $\boldsymbol{\tau}$, у которых $0<k_\tau<4$, существует такое значение φ_+ угла вращения φ, при котором производные $\boldsymbol{\tau}^\bullet$, $\boldsymbol{\tau}^*$ в уравнениях (2.7), (2.8) связаны с вектором $\boldsymbol{\omega}$ ортогональными операторами вращения. При этом в случае (3.3) имеем $\tau'=1$ и достигается тождество: $\boldsymbol{\tau}^\circ=\boldsymbol{\omega}$. Значение φ_+ находится по формуле $\varphi_+=4\,\mathrm{arc\,tg}((4-k_\tau)k_\tau)^{1/2}$, получаемой из условия $\tau'=1$ в (2.10). Например, при $\tau=y$, т. е. при $k_\tau=1$ имеем $\varphi_+=4\,\mathrm{arc\,tg}\,3^{1/2}=4\pi/3$.

4. Рассмотрим матричные представления уравнений (2.7), (3.3), спроектировав эти уравнения соответственно на базисы $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$:

$$\tau_I^\bullet=(\boldsymbol{\tau}^\bullet)_I=\tau' Q^T_{(\tau)}\omega_I, \quad \tau_J^\bullet=(\boldsymbol{\tau}^*)_J=\tau' Q_{(\tau)}\omega_J \tag{4.1}$$

$$\tau_H^\bullet=(\boldsymbol{\tau}^\circ)_H=\tau'\omega_H \tag{4.2}$$

где $\tau_I^\bullet$, $\tau_J^\bullet$, $\tau_H^\bullet$ — столбцевые матрицы размера 3×1, составленные из координат производных по времени от вектора $\boldsymbol{\tau}$ соответственно в базисах $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$; ω_I, ω_J, ω_H — столбцевые матрицы размера 3×1, составленные из координат вектора $\boldsymbol{\omega}$ в этих же базисах, $Q_{(\tau)}$ — матрица оператора $\mathbf{Q}_{(\tau)}$ в любом из базисов $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$. Разложение этой матрицы формально совпадает с разложением (2.9), если в нем заменить оператор $\mathbf{T}$ на кососимметрическую матрицу

$$T=\begin{bmatrix} 0 & -\tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & 0 & -\tau_1 \\ -\tau_2 & \tau_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

где τ_m $(m=1,\ 2,\ 3)$ — координаты вектора $\boldsymbol{\tau}$ в любом из базисов $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$.

Исходя из введенных в п. 3 преобразований вращения, содержащих орты базисов $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$, и учитывая матричное соотношение [1] $\omega_I=R\omega_J=$ $=Q^2_{(\tau)}\omega_J$, приходим к преобразованиям $Q^T_{(\tau)}\omega_I=Q_{(\tau)}\omega_J=\omega_H$. Тогда из (4.1), (4.2) получаем тождества

$$\tau_I^\bullet=\tau_J^\bullet=\tau_H^\bullet=\tau^\bullet \tag{4.4}$$

показывающие, что одноименные координаты производных $\boldsymbol{\tau}^\bullet$, $\boldsymbol{\tau}^*$, $\boldsymbol{\tau}^\circ$ в соответствующих им координатных базисах $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$ равны между собой. Аналогичные тождества можно записать и в более общем случае рассмотрения производных произвольного вектора $\mathbf{x}$.

С учетом тождества (4.4) уравнения (4.1) представим в форме

$$\tau^\bullet=\tau' Q^T_{(\tau)}\omega_I=\tau' Q_{(\tau)}\omega_J=\tau'\omega_H$$

В частном случае при $\tau=y$ получаем

$$y^\bullet=y' Q^T_{(y)}\omega_I, \quad y^\bullet=y' Q_{(y)}\omega_J, \quad y^\bullet=y'\omega_H \tag{4.5}$$

где $y=[y_1y_2y_3]^T$ — столбцевая матрица, составленная из координат вектора y в любом из базисов $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$; $y^\bullet=[y_1^\bullet y_2^\bullet y_3^\bullet]^T$; $y^2=y^Ty$; $y'={}^1/_4(1+y^2)$; $Q_{(y)}=E+2(Y+Y^2)/(1+y^2)$; Y — кососимметрическая матрица вида (4.3), составленная из элементов y_m матрицы y; E — единичная матрица.

5. Приведем один из возможных примеров применения полярных форм векторных кинематических уравнений. Получим в параметрах y_m динамические уравнения вращения твердого тела в случае Эйлера [7].

Вектор **k** кинетического момента связан с вектором **ω** угловой скорости вращения линейным преобразованием

$$\mathbf{k}=\mathbf{S}\boldsymbol{\omega} \tag{5.1}$$

где **S** — оператор инерции [8] твердого тела, имеющий в базисе **J** постоянную матрицу S_J размера 3×3 (тензор инерции [2, 8]). При движении твердого тела в случае Эйлера вектор **k** постоянен по величине и по направлению в пространстве. В базисе **I** этот вектор может быть представлен постоянной столбцевой матрицей $k_I=[k_1k_2k_3]^T$, элементами которой являются постоянные координаты k_m вектора **k**, а в базисе **J** — столбцевой матрицей $k_J=Rk_I=S_J\omega_J$. Из этого соотношения получаем при $x=y$ выражение

$$\omega_J = S_J{}^{-1}R^T_{(y)}k_I \tag{5.2}$$

$$R^T_{(y)} = (Q^2_{(y)})^T = E-4((1-y^2)Y+2Y^2)/(1+y^2)^2 \tag{5.3}$$

Подставив (5.2) во второе уравнение системы (4.5), получаем матричное динамическое уравнение вращения твердого тела

$$y^{\cdot} = {}^1/_4(1+y^2)Q_{(y)}S_J{}^{-1}R^T_{(y)}k_I \tag{5.4}$$

в котором матрицы $S_J{}^{-1}$, k_I состоят из постоянных коэффициентов.

Таким образом, классическая система из шести дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений Эйлера — Пуассона [7]) может быть заменена в случае Эйлера системой из трех динамических дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение (5.4) имеет первый интеграл — интеграл энергии [7], записываемый в переменных y_m в виде $\omega_J{}^TS_J\omega_J=k_I{}^TR_{(y)}S_J{}^{-1}R_{(y)}{}^Tk_I=\text{const}$.

Матричное уравнение (5.4) может представлять интерес в задачах численного моделирования движения свободного твердого тела на цифровых вычислительных машинах (особенно в случаях, когда базис **J** не совпадает с собственным базисом твердого тела, т. е. базисом, орты которого задают направления главных осей инерции в теле). После нахождения матрицы y все элементы матрицы вращения $R_{(y)}$ (направляющие косинусы) однозначно определяются по формуле (5.3).

6. Координаты x_m $(m=1, 2, 3)$ рассмотренных векторов вращения (в базисах **I**, **J** или **H**) представляют собой обобщенные угловые координаты твердого тела, а координаты $x_m{}^{\cdot}$ их производных по времени (в тех же базисах **I**, **J** или **H**) — обобщенные угловые скорости тела. Параметры x_m, $x_m{}^{\cdot}$ можно рассматривать как лагранжевы переменные [9], характеризующие конечное вращение твердого тела. Рассмотрим далее полярные формы уравнений и соотношений конечного вращения твердого тела, в которых фигурируют гамильтоновы (канонические) переменные — обобщенные координаты и соответствующие им обобщенные импульсы [8, 9].

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определяется соотношением [7] $T=(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})/2$ или, учитывая уравнение (1.2), соотношениями

$$T={}^1/_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}\mathbf{x}^{\cdot})={}^1/_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}^T\mathbf{x}^*) \tag{6.1}$$

$$\mathbf{k}=\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{S}\mathbf{F}\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{S}\mathbf{F}^T\mathbf{x}^* \tag{6.2}$$

Введем векторы

$$\mathbf{p}_{(\cdot)}=\partial T/\partial\mathbf{x}^{\cdot}, \quad \mathbf{p}_{(*)}=\partial T/\partial\mathbf{x}^* \tag{6.3}$$

где $\partial T/\partial\mathbf{x}^{\cdot}$, $\partial T/\partial\mathbf{x}^*$ — частные производные скаляра (6.1) по векторным аргументам $\mathbf{x}^{\cdot}$, $\mathbf{x}^*$, и назовем [8] $\mathbf{p}_{(\cdot)}$ вектором абсолютного количества вращательного движения твердого тела (относительно базиса **I**), а $\mathbf{p}_{(*)}$ — вектором относительного количества вращательного движения тела (относительно базиса **J**).

Получив производные (6.3), приходим к линейным преобразованиям

$$\mathbf{p}_{(\cdot)}=\mathbf{F}^T\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{(*)}=\mathbf{F}\mathbf{k} \tag{6.4}$$

из которых следует преобразование вращения

$$\mathbf{p}_{(*)}=\mathbf{R}\mathbf{p}_{(\cdot)} \tag{6.5}$$

аналогичное преобразованию $\mathbf{x}^*=\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}$, приведенному в п. 3.

Воспользуемся полярными разложениями операторов $\mathbf{F}^T$, $\mathbf{F}$ (см. п. 2) и получим полярные формы преобразований (6.4):

$$\mathbf{p}_{(\cdot)}=\mathbf{Q}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{(*)}=\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k} \tag{6.6}$$

а также, учитывая (6.5), преобразования

$$\mathbf{p}_{(0)}=\mathbf{Q}\mathbf{p}_{(\cdot)}=\mathbf{Q}^T\mathbf{p}_{(*)}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{k} \tag{6.7}$$

где $\mathbf{p}_{(0)}$ — вектор количества вращательного движения тела относительно промежуточного базиса **H**, определяемый как $\partial T/\partial \mathbf{x}^\circ$.

Теперь спроектируем первые уравнения из (6.4), (6.6) на базис **I**, вторые уравнения из (6.4), (6.6) — на базис **J**, уравнение (6.7) — на базис **H** и запишем равенства $p_I=(\mathbf{p}_{(\cdot)})_I=F^Tk_I=D^{-1}Q^Tk_I$; $p_J=(\mathbf{p}_{(*)})_J=Fk_J=$ $=D^{-1}Qk_J$; $p_H=(\mathbf{p}_{(0)})_H=D^{-1}k_H$, где p_I, p_J, p_H и k_I, k_J, k_H — столбцевые матрицы размера 3×1, составленные из координат соответствующих векторов в базисах **I**, **J**, **H**; F^T, F, D^{-1}, Q, Q^T — матрицы операторов $\mathbf{F}^T$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^T$ в базисах **I**, **J** или **H**. Вводя в этих равенствах, например, замены $k_H=Qk_J$, $k_I=Q^2k_J$, приходим к равенствам

$$p_I=p_J=p_H=p \tag{6.8}$$

где $p=[p_1p_2p_3]^T$ — столбцевая матрица, составленная из элементов p_m.

Равенства (6.8) означают, что одноименные координаты векторов $\mathbf{p}_{(\cdot)}$, $\mathbf{p}_{(*)}$, $\mathbf{p}_{(0)}$ в отвечающих им базисах **I**, **J**, **H** равны между собой. Эти координаты p_m назовем обобщенными импульсами, соответствующими обобщенным координатам x_m.

Рассмотрим преобразования (6.6), (6.7) при $x=\tau=k_\tau \operatorname{tg}(\varphi/4)$. В этом случае (см. п. 2) $\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{E}/\tau'$ и полярные формы (6.6), (6.7) имеют наиболее простую структуру

$$\mathbf{p}_{(\cdot)(\tau)}=\frac{1}{\tau'}\mathbf{Q}^T_{(\tau)}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{(*)(\tau)}=\frac{1}{\tau'}\mathbf{Q}_{(\tau)}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{(0)(\tau)}=\frac{1}{\tau'}\mathbf{k} \tag{6.9}$$

Последнее равенство в (6.9) означает, что вектор количества вращательного движения относительно промежуточного базиса, соответствующий произвольному вектору вращения $\boldsymbol{\tau}$ (и только ему), совпадает по направлению с вектором кинетического момента твердого тела.

Произведем в преобразованиях (6.4), (6.7) замены с помощью соотношений (6.2), (3.2), (3.1) и получим формулы связи векторов $\mathbf{p}_{(\cdot)}$, $\mathbf{p}_{(*)}$, $\mathbf{p}_{(0)}$ с векторами $\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^\circ$ и операторами $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^T$: $\mathbf{p}_{(\cdot)}=\mathbf{F}^T\mathbf{S}\mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{p}_{(*)}=\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T\mathbf{x}^*$, $\mathbf{p}_{(0)}=\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{S}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T\mathbf{x}^\circ$.

Проектируя эти формулы соответственно на базисы **I**, **J**, **H**, находим матричную связь обобщенных импульсов p_m с обобщенными координатами x_m и скоростями $\dot{x}_m$:

$$p=F^TS_IF\dot{x}=FS_JF^T\dot{x}=QF^TS_HFQ^T\dot{x} \tag{6,10}$$

где S_I, S_J, S_H — матрицы оператора **S** в базисах **I**, **J**, **H**.

Выражения (6.10) существенно упрощаются после введения в них полярных разложений матриц F, F^T при $x=\tau$ и приводятся к виду

$$p_{(\tau)}=\frac{1}{(\tau')^2}Q^T_{(\tau)}S_IQ_{(\tau)}\tau^{\bullet}=\frac{1}{(\tau')^2}Q_{(\tau)}S_JQ^T_{(\tau)}\tau^{\bullet}=\frac{1}{(\tau')^2}S_H\tau^{\bullet} \qquad (6.11)$$

Обращая преобразования (6.10), (6.11), приходим к кинематическим дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно производных $x^{\bullet}$, $\tau^{\bullet}$ и имеющим в качестве независимых переменных обобщенные импульсы: $x^{\bullet}=G^TS_I^{-1}Gp=GS_J^{-1}G^Tp=QGS_H^{-1}G^TQ^Tp$, $\tau^{\bullet}=(\tau')^2Q^T_{(\tau)}S_I^{-1}Q_{(\tau)}p=(\tau')^2\cdot$ $\cdot Q_{(\tau)}S_J^{-1}Q^T_{(\tau)}p=(\tau')^2S_H^{-1}p$.

В заключение укажем на возможность использования полярных форм (6.9) в задаче построения дифференциальных уравнений, связывающих производные по времени от обобщенных импульсов с самими обобщенными импульсами, обобщенными координатами и обобщенными скоростями (или координатами вектора угловой скорости). Наиболее просто такие уравнения строятся в случае выбора обобщенных координат y_m. Для этого необходимо продифференцировать по времени соответствующие преобразования, следующие из (6.9) при $\tau=y$, и воспользоваться кинематическими дифференциальными уравнениями для оператора **Q**, вывод которых аналогичен выводу кинематических уравнений для оператора **R** [10]. При этом можно показать, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения базиса **J** относительно базиса **I** связан с вектором $\boldsymbol{\varkappa}$ угловой скорости вращения базиса **H** относительно базиса **I** линейным преобразованием $\boldsymbol{\varkappa}=(\mathbf{E}-\mathbf{Y})\boldsymbol{\omega}/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Панов А. П.* Кинематические дифференциальные уравнения для собственных векторов операторов вращения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 26–32.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 319 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
5. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 475 с.
6. *Панов А. П.* О выборе кинематических параметров и уравнений вращения для численного интегрирования в ЦВМ // Кибернетика и вычислит. техника. 1984. Вып. 62. С. 104–111.
7. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
8. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
9. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980. 367 с.
10. *Панов А. П.* Об операторных кинематических уравнениях вращения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 44–50.

Киев

Поступила в редакцию
30.VII.1987