МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 539.3+576.72

В. А. ТЕРЕЩЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ УПРОЩЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БИОМЕХАНИКИ КЛЕТОЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Сложность композиционного материала клеточной поверхности яйцеклеток, фибробластов и др. клеток, зависимость его параметров от процессов жизнедеятельности клетки накладывают определенные ограничения в изучении биомеханики клеточной поверхности [1]. Теоретические исследования в основном относятся к анализу различных форм эритроцитов [1], основанном на соотношениях линейной теории оболочек. В работах [2, 3] предложена модель материала поверхности эритроцита, построенная на свойствах спектрин-актиновой сети, примыкающей к цитоплазматической мембране, и проведен анализ осесимметричных деформаций поверхности эритроцита. Экспериментально установлено, что изменения формы клеток, их взаимное расположение, амебоидное движение, дифференцировка – есть результат разнообразных изменений, как в цитоплазме и ядре клетки, так и в структуре клеточной поверхности [4]. Ниже, для анализа напряженно-деформированного состояния клеточной поверхности при изменении ее формы в клеточном цикле, предлагается упрощенная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку физиологически обусловленные деформации материала поверхности в клеточном цикле не превышают 10%, то для построения упомянутой системы воспользуемся методом расчленения напряженного состояния на основное и дополнительное [5]. Форма клетки поддерживается внутриклеточным давлением, а материал поверхности имеет весьма малую изгибную жесткость и достаточно податлив при толщине много меньше характерных размеров клетки. Клеточную поверхность будем рассматривать, как заполненную несжимаемой жидкостью мягкую замкнутую оболочку.

1. Основная система уравнений. Необходимо выделить две противоположности в акте подвижности немышечных клеток. С одной стороны, клетка при данной совокупности механических параметров стремится принять равновесную форму, отвечающую минимуму потенциальной энергии в материале клеточной поверхности

$$\delta\Phi=\delta V-\delta A=0 \tag{1.1}$$

Здесь δV – работа внутренних сил на возможных перемещениях поверхности клетки; δA – работа поверхностных сил на тех же перемещениях. С другой стороны, механические свойства клеточной поверхности непрерывно меняются, что влечет за собой непрерывность изменения формы клетки, ее подвижность. Будем рассматривать два состояния клеточной подвижности, первое из которых назовем основным, а второе актуальным, каждому из которых соответствует своя форма клетки. Вектор перемещения клеточной поверхности относительно основного состояния обозначим $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Компоненты этого вектора: $\mathbf{u}_1$ – направлена по касательной вдоль координаты α_1; $\mathbf{u}_2$ – направлена вдоль координаты α_2; $\mathbf{u}_3$ – направлена по внешней нормали. Введем вектор деформаций клеточной поверхности в виде $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{12})$ компоненты которого: $\mathbf{e}_{11}$, $\mathbf{e}_{22}$ – относительные удлинения элемента поверхности; $\mathbf{e}_{12}$ – относительный угол сдвига. Для малодеформируемого материала клеточной поверхности компоненты этого вектора можно представить как [6]: $\mathbf{e}_{ij}=\varepsilon_{ij}+{}^1/_2(\xi_i\cdot\xi_j)$ ($i=1, 2$; $j=1, 2$).

Векторы $\xi_1=(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, -\varepsilon_{13})$ и $\xi_2=(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, -\varepsilon_{23})$ составлены из линейных ε_{ij} составляющих деформаций клеточной поверхности, которые связаны с вектором перемещений $\mathbf{u}$ точки клеточной поверхности соотношениями

$$\{\xi_i\}=[\mathbf{B}_i]\{\mathbf{u}\} \qquad (i=1, 2) \tag{1.2}$$

Квадратные скобки введены для обозначения прямоугольных матриц, а фигурные – для обозначения матрицы-столбца. Квадратные матрицы дифференциальных операторов $[\mathbf{B}_1]$ и $[\mathbf{B}_2]$ равны соответственно

$$[\mathbf{B}_i]=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\mathbf{A}_i}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i} & (-1)^j\dfrac{1}{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j}\dfrac{\partial\mathbf{A}_i}{\partial\alpha_j} & (-1)\,K_{1i} \\ (-1)^i\dfrac{1}{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j}\dfrac{\partial\mathbf{A}_i}{\partial\alpha_j} & \dfrac{1}{\mathbf{A}_i}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i} & (-1)^iK_{2i} \\ (-1)^iK_{1i} & (-1)^jK_{2i} & \dfrac{1}{\mathbf{A}_i}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i} \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} i\neq j; \\ i=1,2; \\ j=1,2 \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ – параметры Ламе, K_{ij} – соответствующие кривизны нормальных сечений клеточной поверхности.

Представим натяжения в материале деформированной клеточной поверхности (актуальное состояние) в виде двух слагаемых: $\mathbf{N}_{11}=\mathbf{N}_{11}^0+\mathbf{n}_{11}$, $\mathbf{N}_{22}=\mathbf{N}_{22}^0+\mathbf{n}_{22}$, $\mathbf{N}_{12}=\mathbf{N}_{12}^0+\mathbf{n}_{12}$, первые из которых соответствуют основному напряженному состоянию, а $\mathbf{n}_{11}$, $\mathbf{n}_{22}$, $\mathbf{n}_{12}$ соответствующие поправки к ним, как результат деформации клеточной поверхности. Для построения уравнений равновесия при неизменных механических свойствах материала клеточной поверхности воспользуемся принципом возможных перемещений, а также векторно-матричной символикой, которая позволяет компактно записать систему уравнений и значительно облегчить процедуру программирования. Вектор натяжений клеточной поверхности обозначим $\mathbf{N}=(\mathbf{N}_{11}^0+\mathbf{n}_{11}, \mathbf{N}_{22}^0+\mathbf{n}_{22}, \mathbf{N}_{12}^0+\mathbf{n}_{12})$.

Наряду с векторами перемещений $\mathbf{u}$ будем рассматривать вектор возможных перемещений $\delta\mathbf{u}$, компоненты которого $\delta\mathbf{u}_1$, $\delta\mathbf{u}_2$, $\delta\mathbf{u}_3$ являются вариациями компонентов вектора действительных перемещений. В объеме материала клеточной поверхности функции $\delta\mathbf{u}_i$ непрерывны вместе с первой и второй производными, обращаются в ноль в точках, где перемещения запрещены или имеют конкретные фиксированные значения и являются кинематически допустимыми. В соотношении (1.1) работу внутренних сил $\mathbf{N}_{ij}$ представим в виде двойного интеграла от скалярного произведения $\mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{e}$ по всей клеточной поверхности Ω:

$$\delta\mathbf{V}=\iint\limits_{\Omega}\mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{e}\,d\Omega \tag{1.3}$$

а работу внешних сил, приложенных к клеточной поверхности на возможных перемещениях, в виде двойного интеграла от скалярного произведения $\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u}$ также по всей замкнутой клеточной поверхности

$$\delta A=\iint\limits_{\Omega}\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Omega \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{p}=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ – вектор внешних сил. Вектор натяжений в актуальном состоянии представим суммой вектора натяжений клеточной поверхности в основном состоянии $\mathbf{N}^0=(\mathbf{N}_{11}^0, \mathbf{N}_{22}^0, \mathbf{N}_{12}^0)$ и вектора дополнительного состояния (вектор поправок) $\mathbf{n}=(\mathbf{n}_{11}, \mathbf{n}_{22}, \mathbf{n}_{12})$. Подстановка (1.3) и (1.4) в (1.1) приводит к выражению для полного функционала

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{N}^0 \cdot \delta \mathbf{e}\, d\Omega + \iint\limits_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{e}\, d\Omega - \iint\limits_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}\, d\Omega = 0$$

Компоненты вектора $\mathbf{N}^0$ считаются известными, поскольку форма клетки в основном состоянии известна. Площадь элемента клеточной поверхности относительно геометрии основного состояния $\delta\Omega = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 d\alpha_1 d\alpha_2$. Для компонент вектора $\mathbf{e}$ первые вариации можно представить в матричной форме

$$\delta\{\mathbf{e}\} = [\mathbf{E}_1]\,\delta\{\xi_1\} + [\mathbf{E}_2]\,\delta\{\xi_2\} \tag{1.5}$$

Прямоугольные матрицы $[\mathbf{E}_1]$ и $[\mathbf{E}_2]$ размерности (3×3) имеют вид

$$[\mathbf{E}_1] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}+1 & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_2\,\varepsilon_{21} & {}^1/_2\,\varepsilon_{22}+1 & -{}^1/_2\,\varepsilon_{23} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{E}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}+1 & -\varepsilon_{23} \\ {}^1/_2\,\varepsilon_{11}+1 & {}^1/_2\varepsilon_{12} & -{}^1/_2\,\varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

Для матрицы-столбца $\{\xi_i\}$ в соотношении (1.2) можно вычленить слагаемые с дифференциальными операторами

$$\{\xi_i\} = [\mathbf{J}]\,\frac{1}{\mathbf{A}_i}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\,\delta\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{B}_i^0]\,\delta\{\mathbf{u}\} \qquad (i=1,2) \tag{1.6}$$

где $[\mathbf{J}]$ — единичная матрица, а квадратные матрицы имеют вид

$$[\mathbf{B}^0_i] = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i\,\dfrac{1}{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j}\,\dfrac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \alpha_j} & (-1)\,K_{1i} \\ (-1)^i\,\dfrac{1}{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j}\,\dfrac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \alpha_j} & 0 & (-1)^i K_{2i} \\ (-1)^i K_{1i} & (-1)\,K_{2i} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} i \neq j; \\ i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{pmatrix}$$

В выражении для полного функционала в матричной форме

$$\iint\limits_{\Omega} \{\mathbf{N}^0\}^T \delta\{\mathbf{e}\}\, d\Omega + \iint\limits_{\Omega} \{\mathbf{n}\}^T \delta\{\mathbf{e}\}\, d\Omega - \iint\limits_{\Omega} \{\mathbf{p}\}^T \delta\{\mathbf{u}\}\, d\Omega = 0$$

проведем подстановку соотношений (1.5) и (1.6). Эти вариационные соотношения позволяют получить уравнения равновесия элемента клеточной поверхности в совокупности со всеми вариантами граничных условий вдоль контура области интегрирования. Интегрированием по частям освободимся от дифференцирования вариаций возможных перемещений. Окончательно выражение для полного функционала с учетом интегрирования по частям для клеточной поверхности произвольной формы принимает вид

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} \Big((\{\mathbf{N}^0\}^T + \{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_1][\mathbf{B}_1^0] - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\big((\{\mathbf{N}^0\}^T + \{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_1]\mathbf{A}_2\big)\Big)\,\delta\{\mathbf{u}\}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 + \\ &+ \iint\limits_{\Omega} \Big((\{\mathbf{N}^0\}^T + \{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_2][\mathbf{B}_2^0] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\big((\{\mathbf{N}^0\}^T + \{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_2]\mathbf{A}_1\big)\Big)\,\delta\{\mathbf{u}\}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 - \\ &- \iint\limits_{\Omega} \{p\}^T \delta\{\mathbf{u}\}\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\, d\alpha_1\, d\alpha_2 + \int\limits_{\alpha_2} \big((\{\mathbf{N}^0\}^T + \{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_1]\mathbf{A}_2\big)\,\delta\{\mathbf{u}\}\Big|_{a_1}^{a_2} d\alpha_2 + \\ &+ \int\limits_{\alpha_1} \big((\{\mathbf{N}^0\}^T + \{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_2]\mathbf{A}_1\big)\,\delta\{\mathbf{u}\}\Big|_{b_1}^{b_2} d\alpha_1 = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Приравнивая нулю сомножители при вариациях допустимых перемещений в подынтегральном выражении двойного интеграла, получим уравнения равновесия клеточной поверхности. Это система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Ее матричная запись

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\mathbf{A}_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}([\mathbf{E}_1]^T(\{\mathbf{N}^0\}+\{\mathbf{n}\}))+[\mathbf{B}_1{}^0][\mathbf{E}_1]^T(\{\mathbf{N}^0\}+\{\mathbf{n}\})-\\ -\frac{1}{\mathbf{A}_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}([\mathbf{E}_2]^T(\{\mathbf{N}^0\}+\{\mathbf{n}\}))+[\mathbf{B}_2{}^0][\mathbf{E}_2]^T(\{\mathbf{N}^0\}+\{\mathbf{n}\})=\{p\}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Уравнения линейной теории тонких оболочек и линеаризованной теории мягких оболочек [5] могут быть получены из приведенной системы (1.8) при сохранении слагаемых заданного порядка малости.

Система дифференциальных уравнений (1.8) описывает деформированное состояние клеточной поверхности относительно геометрии основного состояния, и ей соответствуют условия на граничном контуре области интегрирования. Для замкнутой поверхности вращения это условие симметрии, а в случае контакта клетки с подложной или соседними клетками следует воспользоваться граничными условиями в дифференциальной форме. Это могут быть силовые, кинематические или смешанные граничные условия. Варианты граничных условий на контуре, совпадающем с координатной линией α_2, получаются из выражения для полного функционала (1.7), где работу внешних сил, приложенных в точках этого контура на их возможных перемещениях, следует приравнять к интегралу, который представляет работу внутренних сил вдоль этого контура

$$\int\limits_{\alpha_2}((\{\mathbf{N}^0\}^T+\{\mathbf{n}\}^T)[\mathbf{E}_1]\delta\{\mathbf{u}\})\Big|_{a_1}^{a_2}d\alpha_2=\int\limits_{\alpha_2}\{\mathbf{N}^{(2)}\}^T\delta\{\mathbf{u}\}\Big|_{a_1}^{a_2}d\alpha_2$$

Из равенства нулю в подынтегральном выражении сомножителей при вариации возможных перемещений следуют силовые граничные условия (α_2=const): $[\mathbf{E}_1]^T(\{\mathbf{N}^0\}+\{\mathbf{n}\})=\{\mathbf{N}^{(2)}\}$. Они могут быть заменены кинематическими условиями $\{u\}=\{u^{(2)}\}$. Аналогично получаются варианты граничных условий на граничном контуре, совпадающем с координатной линией α_1 (α_1=const): $[\mathbf{E}_2]^T(\{\mathbf{N}^0\}+\{\mathbf{n}\})=\{\mathbf{N}^{(1)}\}$, или $\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{u}^{(1)}\}$.

Приведенные здесь соотношения вдоль граничного контура для двумерной области позволяют набирать любую комбинацию варианта граничных условий.

2. Итерационный алгоритм. Функционирование комплекса мембрана — кортекс происходит в условиях предварительного растяжения клеточной поверхности, которое мы обозначили как основное состояние. Это растяжение обеспечивается избыточным внутриклеточным давлением p_3. Рассмотрим порядок величин, присутствующих в полученной нелинейной системе дифференциальных уравнений (1.8). Во-первых, вычленим в квадратных матрицах $[\mathbf{E}_1]^T$ и $[\mathbf{E}_2]^T$ слагаемые, не содержащие линейные составляющие деформаций $[\mathbf{E}_i]^T=[\mathbf{J}_i]+[\mathbf{E}_i{}^0]$ (i=1, 2). Матрицы $[\mathbf{J}_i]$ и $[\mathbf{E}_i{}^0]$ квадратные размерности (3×3):

$$[\mathbf{J}_1]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{J}_2]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}_1{}^0]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&0&{}^1/_2\ \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{12}&0&{}^1/_2\ \varepsilon_{22}\\ -\varepsilon_{13}&0&-{}^1/_2\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix},\quad [\mathbf{E}_2{}^0]=\begin{bmatrix}0&\varepsilon_{21}&{}^1/_2\,\varepsilon_{11}\\0&\varepsilon_{22}&{}^1/_2\,\varepsilon_{12}\\0&-\varepsilon_{23}&-{}^1/_2\,\varepsilon_{13}\end{bmatrix}$$

В матрицах $[\mathbf{E}_i{}^0]$ столбцы заполнены компонентами векторов ξ_i и этим обстоятельством следует воспользоваться. Преобразуем исходную систему уравнений к виду

$$-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(([J_1]+[E_1^0])(\{N^0\}+\{n\}))+[B_1^0]([J_1]+[E_1^0])(\{N^0\}+\{n\})-$$
$$-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(([J_2]+[E_2^0])(\{N^0\}+\{n\}))+[B_2^0]([J_2]+[E_2^0])(\{N^0\}+\{n\})=\{p\} \quad (2.1)$$

В ней присутствуют три типа слагаемых, которые отличаются только множителями $\{N^0\}$ и $\{n\}$: $[J_i]\{N^0\}$ или $[J_i]\{n\}$; $[B_i^0][J_i]\{N^0\}$ или $[B_i^0][J_i]\{n\}$; $[B_i^0][E_i^0]\{N^0\}$ или $[B_i^0][E_i^0]\{n\}$.

При организации итерационного процесса неизвестными являются матрицы $[E_i^0]$ и $\{n\}$ для известной геометрии A_1, A_2 основного состояния и натяжений $\{N^0\}$ (результат предыдущей итерации). Нелинейность присутствует только в слагаемых, имеющих множители вида $[B_i^0][E_i^0]\{n\}$.

Для нулевого приближения $K=0$ ($N_{ij}=0$) сохраняются только линейные слагаемые с $\{n\}$. Система дифференциальных уравнений в этом случае соответствует линейной теории тонких оболочек

$$-[J_1]\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\{n\}_0+[B_1^0][J_1]\{n\}_0-[J_2]\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\{n\}_0+[B_2^0][J_2]\{n\}_0=\{p\}$$

Для последующих итераций $K\geqslant1$ ($\{N^0\}_{K-1}=\{N^0\}_{K-2}+\{n\}_{K-1}$) на каждом шаге решается линеаризованная система уравнений

$$-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(([J_1]+[E_1^0])\{N^0\}_{K-1})+[B_1^0]([J_1]+[E_1^0])\{N^0\}_{K-1}-$$
$$-[J_1]\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\{n\}_K+[B_1^0][J_1]\{n\}_K-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(([J_2]+[E_2^0])\{N^0\}_{K-1})+$$
$$+[B_2^0]([J_2]+[E_2^0])\{N^0\}_{K-1}-[J_2]\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\{n\}_K+[B_2^0][J_2]\{n\}_K=\{p\}$$

Линеаризованные граничные условия для каждой итерации корректируются по натяжениям:

вдоль координатной линии $\alpha_1=\mathrm{const}$:

$$[J_1]([E_1^0]\{N^0\}_{K-1}+\{N^0\}_{K-1}+\{n\}_K)=\{N^{(1)}\}, \quad \text{или} \quad \{u\}=\{u^{(1)}\}$$

вдоль координатной линии $\alpha_2=\mathrm{const}$:

$$[J_2]([E_2^0]\{N^0\}_{K-1}+\{N^0\}_{K-1}+\{n\}_K)=\{N^{(2)}\}, \quad \text{или} \quad \{u\}=\{u^{(2)}\}$$

В физиологически обусловленном интервале деформаций ($\sim10\%$) связь между натяжениями и линейными составляющими деформаций материала клеточной поверхности можно считать линейной

$$\{n\}=[c_1]\{\xi_1\}+[c_2]\{\xi_2\} \quad (2.2)$$

Матрицы констант материала клеточной поверхности $[c]=[c_1]+[c_2]$:

$$[c_1]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{33} & 0 \end{bmatrix}, \quad [c_2]=\begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Однако, эта запись используется и при нелинейной зависимости натяжений от деформаций для каждой итерации, при этом константы материала находятся линеаризацией экспериментальных данных относительно натяжений основного состояния в каждой точке клеточной поверхности, которое может быть неоднородным. Таким образом, постановкой задачи предусматривается неоднородность напряженного состояния клеточной поверхности и нелинейность свойств ее материала.

Для одной итерации полная система определяющих дифференциальных уравнений механики клеточной поверхности в матричной форме имеет вид:

уравнения равновесия

$$-\frac{1}{\mathbf{A}_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(([\mathbf{J}_1]+[\mathbf{E}_1{}^0])\{\mathbf{N}^0\}_{K-1})+[\mathbf{B}_1{}^0]([\mathbf{J}_1]+[\mathbf{E}_1{}^0])\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}-$$

$$-[\mathbf{J}_1]\frac{1}{\mathbf{A}_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\{\mathbf{n}\}_K+[\mathbf{B}_1{}^0][\mathbf{J}_1]\{\mathbf{n}\}_K-\frac{1}{\mathbf{A}_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(([\mathbf{J}_2]+[\mathbf{E}_2{}^0])\{\mathbf{N}^0\}_{K-1})+$$

$$+[\mathbf{B}_2{}^0]([\mathbf{J}_2]+[\mathbf{E}_2{}^0])\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}-[\mathbf{J}_2]\frac{1}{\mathbf{A}_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\{\mathbf{n}\}_K+[\mathbf{B}_2{}^0][\mathbf{J}_2]\{\mathbf{n}\}_K=\{p\}$$

геометрические соотношения

$$\{\xi_1\}=[\mathbf{J}]\frac{1}{\mathbf{A}_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\{\mathbf{u}\}+[\mathbf{B}_1{}^0]\{\mathbf{u}\};\qquad \{\xi_2\}=[\mathbf{J}]\frac{1}{\mathbf{A}_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\{\mathbf{u}\}+[\mathbf{B}_2{}^0]\{\mathbf{u}\}$$

физические соотношения

$$\{\mathbf{n}\}_K=[\mathbf{c}_1]_{K-1}\{\xi_1\}+[\mathbf{c}_2]_{K-1}\{\xi_2\}$$

К ним следует добавить граничные условия в дифференциальной форме:

вдоль координатной линии $\alpha_1=\text{const}$:

$$([\mathbf{J}_1]+[\mathbf{E}_1{}^0])\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}+[\mathbf{J}_1]\{\mathbf{n}\}_K=\{\mathbf{N}^{(1)}\},\quad \text{или}\quad \{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{u}^{(1)}\}$$

вдоль координатной линии $\alpha_2=\text{const}$:

$$([\mathbf{J}_2]+[\mathbf{E}_2{}^0])\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}+[\mathbf{J}_2]\{\mathbf{n}\}_K=\{\mathbf{N}^{(2)}\},\quad \text{или}\quad \{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{u}^{(2)}\}$$

Здесь K — порядковый номер итерации. На каждом шаге итерации решается линеаризованная система уравнений относительно геометрии основного состояния. Корректируются только натяжения клеточной поверхности и физические соотношения для нелинейной зависимости натяжений от деформаций.

3. Система уравнений в перемещениях. Линеаризованную на каждом шаге итерации систему дифференциальных уравнений механики клеточной поверхности произвольной формы запишем в перемещениях. Форма и натяжения клеточной поверхности основного состояния считаются известными. Представим слагаемые, содержащие матрицы деформаций $[E_i{}^0]$, как $[\mathbf{E}_i{}^0]\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}=\mathbf{N}_{ii}{}^0\{\xi_i\}+{}^1/_2\mathbf{N}_{12}{}^0\{\xi_j\}$ $(i\neq j;\ i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$ и подставим их вместе с физическими соотношениями (2.2) в уравнения равновесия

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(-\frac{1}{\mathbf{A}_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}([\mathbf{J}_i]\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}+\mathbf{N}_{ii}{}^0\{\xi_i\}+{}^1/_2\mathbf{N}_{12}{}^0\{\xi_j\})+$$

$$+[\mathbf{B}_i{}^0]([\mathbf{J}_i]\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}+\mathbf{N}_{ii}{}^0\{\xi_i\}+{}^1/_2\mathbf{N}_{12}{}^0\{\xi_j\}-[\mathbf{J}_i]\frac{1}{\mathbf{A}_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}([\mathbf{c}_1]\{\xi_1\}+$$

$$+[\mathbf{c}_2]\{\xi_2\}]+[\mathbf{B}_i{}^0][\mathbf{J}_i]([\mathbf{c}_1]\{\xi_1\}+[\mathbf{c}_2]\{\xi_2\})\Big)=\{p\}\qquad (j\neq i, j=1,2)$$

Поскольку на предыдущей итерации определены натяжения $\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}$, то известные теперь слагаемые обозначим

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(-\frac{1}{\mathbf{A}_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}([\mathbf{J}_i]\{\mathbf{N}^0\}_{K-1})+[\mathbf{B}_i{}^0][\mathbf{J}_i]\{\mathbf{N}^0\}_{K-1}\Big)=\{p^0\}_{K-1}$$

и перенесем в правую часть. После соответствующих преобразований система уравнений принимает вид

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg(-([J]N_{ii}^0+[J_i][c_i])\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\{\xi_i\}-\Bigg([J]\frac{1}{A_i}\frac{\partial N_{ii}^0}{\partial\alpha_i}+$$

$$+[J_i]\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}[c_i]\{\xi_i\}-([J]{}^1/{}_2N_{12}^0+[J_j][c_j])\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\{\xi_i\}-$$

$$-\Bigg([J]\frac{1}{2A_j}\frac{\partial N_{12}^0}{\partial\alpha_j}+[J_j]\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}[c_i]\{\xi_i\}\Bigg)=\{p\}-\{p^0\}_{\kappa-1}\qquad(j\neq i,j=1,2)$$

или, вводя обозначения

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\Bigg([H1_i]\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+[H2_i]\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}+[H3_i]\Bigg)\{\xi_i\}\Bigg)=\{p^0\}_{\kappa-1}-\{p\}$$

$$(j\neq i,j=1,2)$$

$$[H1_i]=[J]N_{ii}^0+[J_i][c_i];\qquad [H2_i]={}^1/{}_2[J]N_{12}^0+[J_j][c_j]\qquad(j\neq i,\ j=1,\ 2)$$

$$[H3_i]=[J]\frac{1}{A_i}\frac{\partial N_{ii}^0}{\partial\alpha_i}+[J_i]\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}[c_i]+[J]\frac{1}{2A_j}\frac{\partial N_{12}^0}{\partial\alpha_j}+[J_j]\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}[c_i]$$

Далее запишем эту систему уравнений в перемещениях, подставив в нее выражения деформаций

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\Bigg([H1_i]\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+[H2_i]\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}+[H3_i]\Bigg)\Bigg([J]\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+[B_i^0]\Bigg)\{u\}\Bigg)=$$

$$=\{p^0\}_{\kappa-1}-\{p\}$$

и после раскрытия скобок получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, каждое из которых второго порядка (три уравнения):

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg([H1_i]\frac{1}{A_i^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i^2}+[H2_i]\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}+\Big([H1_i]+[H3_i]\Big)\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+$$

$$+[H2]_i[B_i^0]\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}+[H1_i]\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}[B_i^0]+[H2_i]\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}[B_i^0]+$$

$$+[H3_i][B_i^0]\Bigg)\{u\}=\{p^0\}_{\kappa-1}-\{p\}\qquad(j\neq i,j=1,2)$$

Формируемые на каждом крае различные варианты граничных условий также можно представить в дифференциальной форме через перемещения. Поскольку полученная система дифференциальных уравнений на два порядка выше линейной системы безмоментной теории тонких оболочек, то вид граничных условий в матричной форме будет следующий. Для контура вдоль координатной линии α_1=const:

$$[F1_1]\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+[F2_1]\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+[F3_1]\Big)\{u\}=\{N^{(1)}\}-[J_1]\{N^0\},\ \text{или}\ \{u\}=$$

$$=\{u^{(1)}\}$$

Для контура вдоль координатной линии α_2=const:

$$\Big([F1_2]\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+[F2_2]\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+[F3_2]\Big)\{u\}=\{N^{(2)}\}-[J_2]\{N^0\},\ \text{или}\ \{u\}=$$

$$=\{u^{(2)}\}$$

Здесь квадратные матрицы размерности (3×3) соответственно равны $[\mathbf{F1}_i]={}^1/_2[\mathbf{J}]\mathbf{N}_{1i}{}^0+[\mathbf{J}_i][\mathbf{c}_1]$; $[\mathbf{F2}_i]=[\mathbf{J}]\mathbf{N}_{i2}{}^0+[\mathbf{J}_i][\mathbf{c}_2]$ ($i=1,\ 2$); $[\mathbf{F3}_i]=[\mathbf{F1}_i][\mathbf{B}_1{}^0]+[\mathbf{F2}_i][\mathbf{B}_2{}^0]$.

Построенная система нелинейных уравнений в частных производных (2.1) записана относительно известной геометрии основного состояния клеточной поверхности. В итерационном алгоритме решения задач биомеханики клеточной поверхности при известной кинетике внутриклеточных процессов за основное принимается предыдущее актуальное состояние клетки, и процесс счета проводится уже относительно этого известного состояния. Особенность линеаризованной, на каждом шаге итераций, системы уравнений состоит в том, что в ней сохраняются слагаемые, содержащие произведения натяжений основного состояния на деформации клеточной поверхности $[\mathbf{E}_i{}^0]\{\mathbf{N}^0\}$, которые отражают влияние изменения формы клеточной поверхности на ее напряженное состояние. Порядок этих слагаемых тот же, что и линейных слагаемых, входящих в эти уравнения и содержащие в качестве множителей неизвестные поправки натяжений основного состояния $\{\mathbf{n}\}$. В совокупности эти особенности позволяют использовать эти уравнения при решении широкого круга задач теории тонких оболочек произвольной геометрии в нелинейной постановке. Одношаговая процедура, известная, как приближенная или техническая теория мягких оболочек [5], апробирована при анализе напряженно-деформированного состояния разнообразных пневматических конструкций [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивенс И., Скейлак Р.* Механика и термодинамика биологических мембран. М.: Мир, 1982. 304 с.
2. *Козлов М. М., Маркин В. С.* Мембранный скелет эритроцита. Теоретическая модель // Биологические мембраны, 1986. Т. 3, № 4. С. 404–422.
3. *Маркин В. С., Козлов М. М.* Механические свойства мембранного скелета эритроцита. Анализ осесимметричных деформаций // Биологические мембраны. 1986. Т. 3. № 5. С. 519–536.
4. *Каппуччинелли П.* Подвижность живых клеток. М.: Мир, 1982, 126 с.
5. *Усюкин В. И.* Техническая теория мягких оболочек и ее применение для расчета пневматических конструкций // Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат. 1983. С. 299–333.
6. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
7. *Усюкин В. И., Терещенко В. А., Борсов Р. Г.* Разностные методы решения задач статики мягких оболочек // Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат. 1979. Вып. 18. С. 69–84.
8. *Усюкин В. И., Терещенко В. А., Сдобников А. И., Панов С. В., Борсов Р. Г.* Расчет пневматических строительных конструкций с использованием ЭВМ // Доклады. Международная конференция ИАСС. Алма-Ата. М.: Стройиздат. 1977. С. 146–151.

Севастополь

Поступила в редакцию
23.X.1989