

УДК 624.07:534.1

© 1991 г.

М. ЭРГАШОВ

ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ПРЯМОУГОЛЬНЫМ БРУСОМ ПО ГИБКОЙ НИТИ

Процессы распространения продольных и поперечных волн в растяжимой нити рассматривались например, в [1–3]. В [4] рассматривается задача о нормальном поперечном ударе абсолютно гладкой поверхностью прямоугольного бруса по линейно-упругой гибкой нити бесконечной длины. В публикуемой работе предполагается, что в некоторый момент времени после удара происходит мгновенная остановка бруса и отрыв нити от его поверхности. Исследуются процессы взаимодействия продольных и поперечных волн на различных участках нити.

1. Постановка задачи. Пусть при $t \leq 0$ абсолютно гладкой поверхностью прямоугольного бруса MN (фиг. 1), движущегося вертикально вниз с постоянной скоростью v произведен нормальный поперечный удар по прямой и невозмущенной первоначально линейно-упругой нити бесконечной длины. В результате удара в нити возникают четыре продольные C, E, E', C' и две поперечные H, H' волны и два стационарных разрыва M, N (на фиг. 1–3 и 5–7 стрелками указаны направления движения соответствующих продольных и поперечных волн). Возмущенные от действия удара области 1, 2, 3, 1', 2', 3' нити являются областями постоянных параметров, так как удар произведен с постоянной скоростью [1–3]. Области 0 и 0' являются областями покоя нити без деформации. Области 1 и 1' являются областями чисто продольного, а области 2 и 2', 3 и 3' — продольно-поперечного движения. Нормальные составляющие скорости областей 3 и 3' равны скорости удара, а касательные к нити составляющие подлежат определению. Область 4 является областью покоя относительно бруса без деформации. Деформации областей 1–3 и 1'–3' одинаковы, так как поперечные волны H и H' не несут разрыва деформации [1–2].

Рассматриваемая схема движения осуществляется до момента взаимодействия, идущих навстречу друг-другу продольных волн E и E' . Взаимодействие этих волн происходит в момент времени $t^* = MN/2a$ после удара.

Пусть φ — угол излома нити, ε — относительная деформация, x' и y' — составляющие скорости частиц на оси ox и oy соответственно. Неизвестные параметры движения в рассматриваемых областях будем снабжать соответствующими индексами.

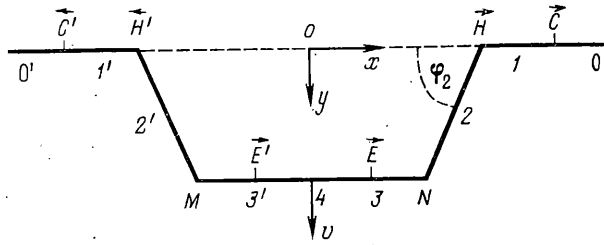
На фронтах волн C, H, E (будем рассматривать правую от оси oy часть задачи) имеют место следующие уравнения [2–4]:

$$x_1 \dot{=} -a\varepsilon_1, \quad y_2 \dot{=} a\lambda_1 \sin \varphi_2, \quad \lambda_1 = (\varepsilon_1(1 + \varepsilon_1))^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

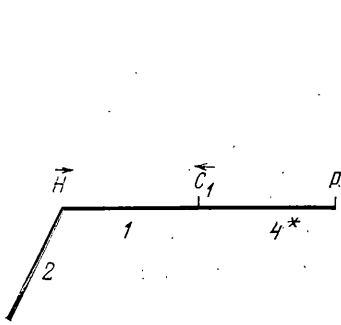
$$x_2 \dot{=} -x_1 \dot{=} a\lambda_1(1 - \cos \varphi_2), \quad x_3 \dot{=} a\varepsilon_1 \quad (1.2)$$

В точке B имеем следующие кинематические условия

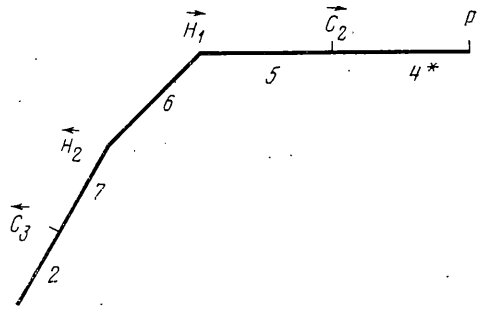
$$x_2 \dot{=} x_3 \cos \varphi_2, \quad y_2 \dot{=} v - x_3 \dot{=} \sin \varphi_2 \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнения (1.1)–(1.3) имеют следующее решение

$$v^* = (1 - \cos \varphi_2) \sin \varphi_2 (2 \cos \varphi_2)^{-1} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_1 = (1 - \cos \varphi_2)^2 (4 \cos \varphi_2)^{-1}, \quad v^* = v/a \quad (1.5)$$

Пусть удар произведен шероховатой поверхностью бруса и скольжение нити в областях 3 и 3' отсутствует. Подставляя $x_3^* = 0$ в уравнения (1.3), получаем

$$x_2^* = 0, \quad y_2^* = 0 \quad (1.6)$$

В этом случае уравнения (1.1)–(1.2) и (1.6) имеют решение

$$v^* = (1 - \cos \varphi_2) \sin \varphi_2 [1 - (1 - \cos \varphi_2)^2]^{-1} \quad (1.7)$$

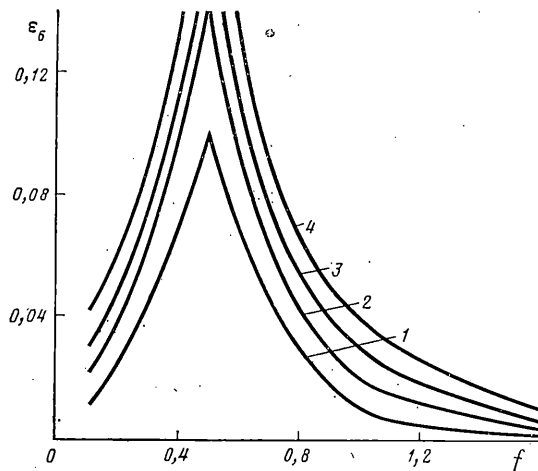
$$\varepsilon_1 = (1 - \cos \varphi_2)^2 [1 - (1 - \cos \varphi_2)^2]^{-1} \quad (1.8)$$

Видно, что части нити, расположенные справа и слева от бруса, движутся как при точечном ударе [1, 4].

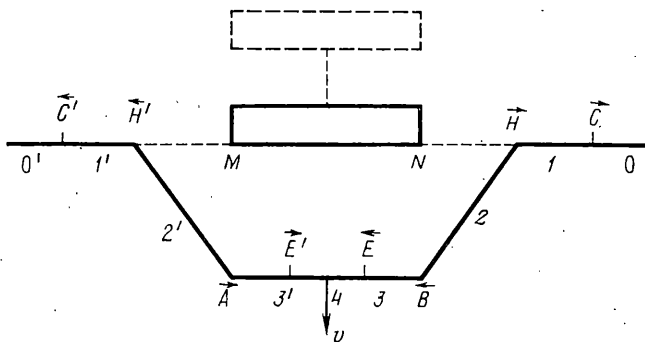
2. Взаимодействие продольных и поперечных волн. Предположим, что нить имеет конечную длину и в некоторый момент времени $0 < t < t^*$ происходит отражение продольной волны C от правого конца нити. Докажем, что при взаимодействии поперечной волны H с отраженной продольной волной, несущей деформацию большую, чем на прямой волне угол излома убывает, а при взаимодействии с отраженной волной, несущей меньшую деформацию – угол излома нити возрастает.

Пусть отражение происходит от свободного конца нити (фиг. 2). При этом область 0 исчезает и образуется область 4*. Деформация этой области равна нулю, а скорость $x_4^{*} = 2x_1^*$, так как в точке P происходит упругое отражение продольной волны от свободной границы нити. В результате взаимодействия, идущих навстречу друг-другу волн H и C_1 в нити возникают две продольные C_2, C_3 (рис. 3) и две поперечные H_1, H_2 волны, образуя области 5, 6 и 7 с одинаковой деформацией ε_6 .

Известно, что в принятой выше постановке задачи деформация областей 5, 6 и 7 меньше, чем ε_1 [1].



Фиг. 4



Фиг. 5

На фронтах волн C_2, H_1, H_2, C_3 имеют место следующие уравнения

$$x_5^* - x_4^{**} = -a\varepsilon_6, \quad x_4^{**} = 2x_1^* \quad (2.1)$$

$$x_6^* - x_5^* = a\lambda_6(1 - \cos \varphi_6) \quad (2.2)$$

$$y_6^* = a\lambda_6 \sin \varphi_6, \quad \lambda_6 = ((1 + \varepsilon_6)\varepsilon_6)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$x_6^* - x_7^* = a\lambda_6(\cos \varphi_6 - \cos \varphi_2) \quad (2.4)$$

$$y_6^* - y_7^* = a\lambda_6(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_6) \quad (2.5)$$

$$x_7^* - x_2^* = a(\varepsilon_6 - \varepsilon_1) \cos \varphi_2 \quad (2.6)$$

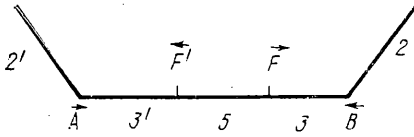
$$y_7^* - y_2^* = a(\varepsilon_1 - \varepsilon_6) \sin \varphi_2 \quad (2.7)$$

Исключая неизвестные скорости, используя при этом уравнения (1.1)–(1.2) из системы (2.1)–(2.7), получаем

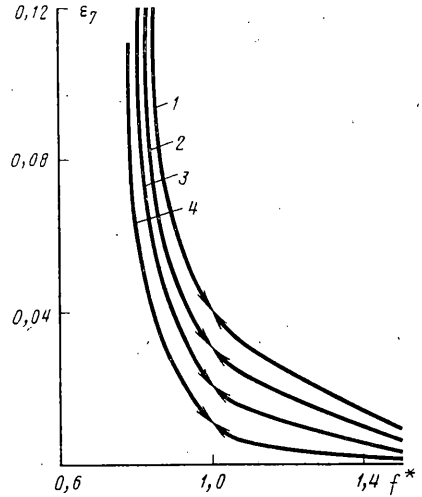
$$\begin{aligned} \lambda_6(1 - 2\cos \varphi_6 + \cos \varphi_2) - \varepsilon_1 - \varepsilon_6 - \\ - \lambda_1(1 - \cos \varphi_2) - (\varepsilon_6 - \varepsilon_1) \cos \varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_6 \sin \varphi_6 - \lambda_1 \sin \varphi_1 + (\varepsilon_6 - \varepsilon_1) \sin \varphi_2 - \\ - \lambda_6(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_6) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

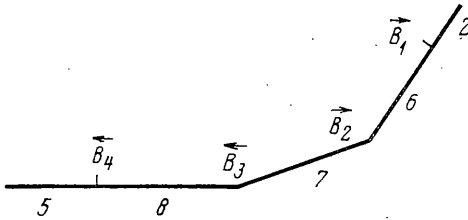
Эти уравнения образуют систему относительно неизвестных ε_6 и φ_6 . Умножим уравнение (2.8) на $\sin \varphi_2$, а (2.9) на $\cos \varphi_2$ и сложим ре-



Фиг. 6



Фиг. 8



Фиг. 7

Результаты

$$\frac{\lambda_6 - \varepsilon_6 - \lambda_1 - \varepsilon_1}{\lambda_6} = \frac{2 \sin(\varphi_2 - \varphi_6)}{\sin \varphi_2} \quad (2.10)$$

Далее умножим уравнение (2.8) на $\sin \varphi_6$, а (2.9) на $\cos \varphi_6$. В результате получим

$$\frac{\lambda_6 - \varepsilon_6 - \lambda_1 - \varepsilon_1}{\lambda_6 - \varepsilon_6 + \lambda_1 + \varepsilon_1} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_6)}{\sin \varphi_6} \quad (2.11)$$

Из этих уравнений следует, что $\varphi_2 < \varphi_6$, так как $\lambda_6 - \varepsilon_6 - \lambda_1 - \varepsilon_1 < 0$ для любого $\varepsilon_1 > \varepsilon_6$.

Пусть продольная волна C отражается от жестко закрепленного конца нити. При этом деформация области 4* (фиг. 2) равна удвоенной деформации области 1, а скорости частиц равны нулю. В этом случае деформация областей 5, 6 и 7 (фиг. 3) больше, чем ε_1 . При этом уравнения (2.2) – (2.7) сохраняются в прежнем виде, а (2.1) принимает вид

$$x_5^* - x_4^{* *} = a(\varepsilon_6 - 2\varepsilon_1), \quad x_4^{* *} = 0 \quad (2.12)$$

Поступая далее аналогично как в предыдущем случае, из системы (2.2) – (2.7) и (2.12), получим

$$\frac{3\varepsilon_1 - \varepsilon_6 - \lambda_1 + \lambda_6}{\lambda_6} = \frac{2 \sin(\varphi_2 - \varphi_6)}{\sin \varphi_2}$$

$$\frac{3\varepsilon_1 - \varepsilon_6 - \lambda_1 + \lambda_6}{\lambda_6 - \varepsilon_6 + \lambda_1 + \varepsilon_1} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_6)}{\sin \varphi_6}$$

Из этих уравнений, найдем

$$\lambda_6(1 - 2f) - \varepsilon_6 + \lambda_1 + \varepsilon_1 = 0, \quad f = \sin \varphi_6 / \sin \varphi_2 \quad (2.13)$$

Аналогичное уравнение получается и из уравнений (2.10) – (2.11). Уравнение (2.13) напишем в виде

$$\varepsilon_6 = \frac{-\theta - 2c + ((\theta + 2c)^2 + 4c^2(\theta - 1))^{1/2}}{2(\theta - 1)} \quad (2.14)$$

$$\theta = (1 - 2f)^2, \quad c = \lambda_1 + \varepsilon_1$$

При $f=0,5$ как это следует из уравнения (2.14), деформация ε_6 достигает своего максимума $\varepsilon_{6 \max}=c$, при $f=0,1$ имеем $\varepsilon_6=\varepsilon_1$, а при $f<0,1$ ε_6 оказывается отрицательной величиной.

На фиг. 4 приведена зависимость f от ε_6 . Кривые 1–4 получены при $\varepsilon_1=0,01; 0,02; 0,03; 0,04$. Область $f>1$ на фиг. 4 соответствует процессу взаимодействия поперечной волны H с отраженной волной, несущей меньшую, чем ε_1 деформацию, а область $0,1<f<1$ — процессу взаимодействия с отраженной волной, несущей большую, чем ε_1 деформацию.

3. Отрыв нити от поверхности бруса. Пусть при $t=0$ после удара по нити происходит мгновенная остановка бруса и отрыв нити от его поверхности (фиг. 5). В результате в нити возникают четыре продольные C, E, E', C' и четыре поперечные H, B, A, H' волны.

Предположим, что в течении некоторого бесконечно малого периода после отрыва, участок AB нити сохраняет свою прямолинейную форму и продолжает двигаться вертикально вниз со скоростью удара бруса. При этом области 1, 2, 3 нити будут областями постоянных параметров. На фронтах волн C, E и H имеют место уравнения (1.1)–(1.2). На фронте поперечной волны B имеем

$$x_2 \dot{-} x_3 \dot{=} a\lambda_1 (\cos \varphi_2 - 1) \quad (3.1)$$

$$y_2 \dot{-} y_3 \dot{=} -a\lambda_1 \sin \varphi_2, \quad y_3 \dot{=} v \quad (3.2)$$

Приравнивая левые части второго уравнения системы (1.1) и уравнение (3.2), найдем $y_3 \dot{=} 2y_2 \dot{}$. Сравнивая это выражение с уравнением $y_3 \dot{=} v$, получим $y_2 \dot{=} v/2$.

Исключая неизвестные скорости из уравнений (1.1)–(1.2), (3.1)–(3.2), найдем

$$v^* = 2\lambda_1 \sin \varphi_2, \quad \varepsilon_1 = \lambda_1 (1 - \cos \varphi_2) \quad (3.3)$$

Система (3.3) легко приводится к удобному для дальнейшего анализа и численного расчета виду

$$v^* = 2(1 - \cos \varphi_2) \sin \varphi_2 [1 - (1 - \cos \varphi_2)^2]^{-1}$$

$$\varepsilon_1 = (1 - \cos \varphi_2)^2 [1 - (1 - \cos \varphi_2)^2]^{-1}$$

Сравнивая это решение с решениями задачи об ударе брусом без отрыва нити (1.4)–(1.5) и о точечном ударе (1.7)–(1.8), получаем следующие условия $\varphi_6 > \varphi_t > \varphi_2$, $\varepsilon_6 < \varepsilon_t = \varepsilon_1$, имеющие место для любого $v = v_6 = v_t$. Здесь индексом t — обозначены деформация и угол излома при точечном ударе, а индексом δ — те же параметры удара брусом без отрыва нити.

4. Взаимодействие продольных волн E и E' . Рассмотрим движение бесконечно длинной нити при $t \geq t^*$. В результате взаимодействия продольных волн E и E' область 4 нити исчезает и образуется область 5 (фиг. 6). На фронтах отраженных волн F и F' имеем

$$x_5 \dot{-} x_3 \dot{=} a(\varepsilon_1 - \varepsilon_5), \quad x_5 \dot{-} x_3 \dot{=} a(\varepsilon_5 - \varepsilon_1) \quad (4.1)$$

Из этих уравнений, найдем

$$x_3 \dot{-} x_3 \dot{=} 2a(\varepsilon_1 - \varepsilon_5) \quad (4.2)$$

Далее учитывая, что $x_3 \dot{=} a\varepsilon_1$ и $x_3 \dot{=} -a\varepsilon_1$, из уравнения (4.2), получаем $\varepsilon_5 = 2\varepsilon_1$. Подставляя это выражение в уравнения (4.1), найдем $x_5 \dot{=} 0$.

5. Взаимодействие волн F и B . При этом в нити возникают две продольные B_1, B_4 (фиг. 7) и две поперечные B_2, B_3 волны. На фронтах B_1, B_2, B_3, B_4 имеем следующие уравнения

$$x_6 \dot{-} x_2 \dot{=} a(\varepsilon_1 - \varepsilon_7) \cos \varphi_2 \quad (5.1)$$

$$y_6 \dot{-} y_2 \dot{=} a(\varepsilon_7 - \varepsilon_1) \sin \varphi_2$$

$$x_7^* - x_6^* = a\lambda_7 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_7) \quad (5.2)$$

$$y_7^* - y_6^* = a\lambda_7 (\sin \varphi_7 - \sin \varphi_2)$$

$$x_7^* - x_8^* = a\lambda_7 (\cos \varphi_7 - 1) \quad (5.3)$$

$$y_7^* - y_8^* = -a\lambda_7 \sin \varphi_7, \quad \lambda_7 = (\varepsilon_7 (1 + \varepsilon_7))^{1/2} \quad (5.4)$$

$$x_8^* - x_5^* = a(\varepsilon_7 - \varepsilon_5) \quad (5.5)$$

$$x_5^* = 0, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_1, \quad y_5^* = y_8^* = v$$

Исключая неизвестные скорости из уравнения (5.4)–(5.5), используя при этом уравнения (1.1)–(1.2), приходим к следующим уравнениям относительно неизвестных ε_7 и φ_7 :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_7 - \varepsilon_1 + \lambda_7 (2 \cos \varphi_7 - \cos \varphi_2 - 1) - \\ & - \lambda_1 (1 - \cos \varphi_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_7) \cos \varphi_2 = 0 \\ & (\lambda_1 + \varepsilon_7 - \varepsilon_1 - \lambda_7) \sin \varphi_2 + 2\lambda_7 \sin \varphi_7 - v^* = 0 \end{aligned}$$

Далее поступая аналогично как в п.2, получаем

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_7 - \varepsilon_1 - \varepsilon_7 - v^* \operatorname{ctg} \varphi_2}{\lambda_7} = \frac{2 \sin (\varphi_2 - \varphi_7)}{\sin \varphi_2} \quad (5.6)$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_7 + \varepsilon_1 - \varepsilon_7 - v^* \operatorname{ctg} \varphi_7}{\lambda_7 - \varepsilon_7 - \lambda_1 + \varepsilon_1} = \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_7)}{\sin \varphi_7}$$

$$\lambda_7 - \varepsilon_7 - \lambda_1 + \varepsilon_1 = 2\lambda_7 f^*, \quad f^* = \sin \varphi_7 / \sin \varphi_2 \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) напомним в следующем виде

$$\varepsilon_7 = \frac{2c^* - \theta^* + ((2c^* - \theta^*)^2 + 4c^{*2}(\theta^* - 1))^{1/2}}{2(\theta^* - 1)} \quad (5.8)$$

$$\theta^* = (1 - 2f^*)^2, \quad c^* = \lambda_1 - \varepsilon_1$$

Из уравнения (5.8), найдем следующие условия $f^* \geq 0,5 + (c^*(1 - c^*))^{1/2} = B$, $f^* \neq 1$. Очевидно $\varepsilon_7 \rightarrow \varepsilon_1$ при $f^* \rightarrow 1$. При $f^* = B$ деформация ε_7 достигает своего максимального значения, при $0,5 - (c^*(1 - c^*))^{1/2} < f^* < B$ деформация ε_7 оказывается отрицательной величиной, а при $f^* < 0,5 - (c^*(1 - c^*))^{1/2}$ — убывающейся функцией в области $f^* < 1$. Поэтому принимается, что $f^* \geq B$.

Рассмотрим процесс взаимодействия поперечной волны с отраженной волной F , несущей меньшую, чем ε_1 деформацию.

Пусть $\varepsilon_5 = 0$, $x_5^* = 2x_3^*$. При этом уравнения (5.1)–(5.4) сохраняются по-прежнему, а первое уравнение (5.5) принимает вид $x_8^* = a(2\varepsilon_1 + \varepsilon_7)$ и задача сводится к решению следующих уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1 + \lambda_7 - \varepsilon_7 - 3\varepsilon_1 - v^* \operatorname{ctg} \varphi_2}{\lambda_7} = \frac{2 \sin (\varphi_2 - \varphi_7)}{\sin \varphi_2} \quad (5.9) \\ & \frac{\lambda_1 + \lambda_7 - \varepsilon_7 - 3\varepsilon_1 - v^* \operatorname{ctg} \varphi_7}{\lambda_7 + \varepsilon_1 - \varepsilon_7 - \lambda_1} = \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_7)}{\sin \varphi_7} \end{aligned}$$

Видно, что выводы анализа уравнения (5.7)–(5.8) относятся и к рассматриваемому случаю.

На фиг. 8 приведена зависимость f^* от ε_7 . Кривые 1–4 получены при $\varepsilon_1 = 0,01$; 0,02; 0,03; 0,04 соответственно. Область $B \leq f^* < 1$ на фиг. 8 соответствует процессу взаимодействия поперечной волны B с продольной волной F , несущей деформацию большую, чем ε_1 , а область $f^* > 1$ — процессу взаимодействия с волной, несущей меньшую, чем ε_1 деформа-

цию. Для подтверждения справедливости этих выводов обратимся к соотношению между скоростью абсолютного движения поперечной волны и местной скоростью звука в материале нити [1-2]:

$$b_1 = x_1^* + a\lambda_1, \quad b_1 = v \operatorname{ctg} \varphi_2 \quad (5.10)$$

где b_1 — скорость абсолютного движения поперечной волны H (фиг. 5). Подставляя (5.10) в уравнения (5.6) и (5.9), найдем, что в первом случае $\varphi_2 > \varphi_7$, а во втором $\varphi_2 < \varphi_7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Размагулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. *Павленко А. Л.* О распространении разрывов в гибкой нити // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 112-122.
3. *Максимов В. Ф.* Взаимодействие поперечной волны с геометрическим изломом линейно-упругой нити // Тр. кафедры газовой и волновой динамики МГУ. Изд-во МГУ. 1975. Вып. 1. С. 116-120.
4. *Эргашов М.* Исследование деформаций, возникающих при ударе прямоугольным бруском по нити // Изв. АН СССР. МГТ. 1987. № 1. С. 159-163.

Ташкент

Поступила в редакцию
22.II.1989