МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1991

УДК 624.07:534.1


В. Р. АМИНОВ

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Задача об определении динамических характеристик упругой системы по известным характеристикам некоторой исходной системы, отличающейся от заданной инерционными, жесткостными и диссипативными свойствами, возникает, например, при анализе результатов динамических испытаний конструкции, подверженной влиянию экспериментальной оснастки [1, 2]. Известны различные методы учета влияния нежелательных сил, действующих на конструкцию при ее испытаниях [3–6]. Перспективным представляется подход, в котором по экспериментальным данным строится математическая модель испытываемой конструкции, которая затем используется для определения искомых характеристик с учетом действия сил со стороны опорных устройств, средств возбуждения и измерения колебаний [7–9]. К числу проблем, возникающих при построении математических моделей относится проблема сходимости решения, представляемого через собственные формы колебаний конструкции [10, 11]. В [12] в основу определения основных динамических характеристик упругой конструкции по экспериментальным данным положена линейная дискретно-массовая модель, эквивалентная исходной конструкции по собственным частотам, формам и декрементам колебаний. Вопрос о сходимости решения в [12] не рассматривался.

В настоящей статье на примере продольных и поперечных колебаний стержня с грузом на конце исследована сходимость решения, предложенного автором ранее [12]. Показано, что ряды в характеристических уравнениях сходятся быстрее, если исходная система содержит сосредоточенные массы или жесткости. Рассмотрены практически важные случаи изменения динамических свойств конструкции, не влияющие на ее собственные формы колебаний.

1. Пусть исходная линейная система представляет собой конструкцию, в $N$ точках которой приложены инерционные, упругие и диссипативные силы, обусловленные влиянием экспериментальной оснастки. Свободные колебания конструкции описываются уравнением $Mq^{\cdot\cdot}+Hq^{\cdot}+Kq=0$, где $M$, $K$ — диагональные матрицы инерции и упругости, соответственно; $H$ — в общем случае полностью заполненная матрица коэффициентов демпфирования; $q$ — матрица-столбец главных координат.

Уравнение колебаний искомой конструкции можно записать в виде [12]:

$$(M-\Delta M)q^{\cdot\cdot}+(H-\Delta H)q^{\cdot}+(K-\Delta K)q=0 \tag{1.1}$$

где матрицы $\Delta M$, $\Delta H$, $\Delta K$ находятся из соотношений

$$\Delta M=\sum_{i=1}^{N}\Delta M_iD_i,\quad \Delta H=\sum_{i=1}^{N}\Delta b_iD_i,\quad \Delta K=\sum_{i=1}^{N}\Delta C_iD_i$$

$$D_i=\|\Psi_{ij}\Psi_{ik}\|\ (j,\ k=1,\ 2,\ldots,n) \tag{1.2}$$

В (1.2) введены обозначения: $\Delta M_i$ — масса, присоединенная к конструкции в $i$-й точке; $\Delta b_i$ — коэффициент демпфирования, обусловленный влиянием оснастки; $\Delta C_i$ — присоединенная жесткость; $\Psi_{ij}$ — значение собственной формы $j$-го тона колебаний, соответствующее перемещению $i$-й точки исходной конструкции; $n$ — число тонов колебаний, учитываемых уравнением (1.1).

Согласно уравнению (1.1) собственные частоты колебаний искомой конструкции определяются из характеристического уравнения

$$|K-\Delta K-p^2(M-\Delta M)|=0 \tag{1.3}$$

Рассмотрим задачу об определении собственных частот продольных колебаний консольно закрепленного однородного стержня длины $l$, на свободном конце которого имеется масса $M_2$, по известным собственным частотам и формам колебаний стержня с массой $M_1$ на конце. Характеристическое уравнение (1.3) в этом случае можно записать в следующем развернутом виде

$$\frac{1}{p^2}-(M_2-M_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i^2(l)}{a_i(\omega_i^2-p^2)}=0 \tag{1.4}$$

где $\omega_i$ — собственная частота $i$-го тона колебаний исходного стержня; $a_i$ — обобщенная масса; $\eta_i(l)$ — значение собственной формы, соответствующее перемещению массы $M_1$ и определяемое по формуле $\eta_i(l)=\eta_{0i}\cdot$ $\cdot\sin(\omega_i l/a)$, $a^2=EF/m$, где $m$, $EF$ — погонная масса и продольная жесткость стержня. С учетом соотношения [13]: $(\omega_i l/a)\mathrm{tg}(\omega_i l/a)=ml/M_1$ уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{1}{p^2}-2\left(\frac{M_2}{M_1}-1\right)\frac{ml}{M_1}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\omega_i l}{a}\Big/\left[\left(\frac{\omega_i l}{a}\right)^2+\frac{ml}{M_1}\cos^2\frac{\omega_i l}{a}\right](\omega_i^2-p^2)=0 \tag{1.5}$$

Принимая во внимание, что собственные частоты $\omega_i$ асимптотически ведут себя как $\omega_i\sim i$ [14], видим, что ряд в уравнении (1.5) с возрастанием $n$ сходится как ряд с общим членом $s_n=\alpha n^{-4}$.

При $M_1=0$ уравнение (1.5) сводится к уравнению

$$\frac{1}{p^2}-2\frac{M_2}{ml}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2\pi^2a^2/4l^2-p^2}=0 \tag{1.6}$$

определяющему частоты колебаний стержня с массой на конце по характеристикам стержня со свободным концом. В отличие от уравнения (1.5) ряд в уравнении (1.6) сходится как $i^{-2}$. Путем использования разложения для $\mathrm{tg}\,z$ [15]:

$$\mathrm{tg}\,z=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2z}{(2i-1)^2\pi^2/4-z^2}$$

уравнение (1.6) можно записать в виде (при $n\to\infty$): $(pl/a)\,\mathrm{tg}\,(pl/a)=$ $=ml/M_2$. Последнее представляет собой характеристическое уравнение при точном решении задачи.

Можно показать, что к аналогичным результатам в части сходимости рядов характеристического уравнения приводит задача о продольных колебаниях стержня с линейно-упругой опорой на конце при варьировании жесткости последней.

Рассмотрим задачу определения частот поперечных колебаний однородного консольно закрепленного стержня, имеющего на конце массу $M_2$ по частотам и формам колебаний стержня с массой $M_1$ на конце. Искомые частоты находятся из уравнения вида (1.4). Для оценки сходимости ряда в характеристическом уравнении рассмотрим следующую краевую задачу

$$\eta^{IV}(x)-k^4\eta(x)=0,\ \eta(0)=\eta'(0)=\eta''(l)=0,\ \eta'''(l)=k^4M_1m^{-1}\eta(l)$$

Собственные значения задачи удовлетворяют уравнению

$$1+\cos kl \operatorname{ch} kl=kM_1m^{-1}(\operatorname{sh} kl\cos kl-\sin kl\operatorname{ch} kl)$$

С учетом этого уравнения, а также соотношения [13]:

$$4k\int_0^l X_m^2\,dx=|3X_mX_m'''+kxX_m^2-2kxX_m'X_m'''-X_m'X_m''+kx(X_m'')^2|_0^l$$

где $X'$, $X''$, $X'''$ — последовательные производные $X$ по $kx$, при $k\to\infty$ получим $\eta_i(l)=O(1/i)$, $\eta_i'(l)=O(i)$, $a_i=O(1)$ и ряд в характеристическом уравнении (1.4) сходится как $i^{-6}$. В частном случае, при $M_1=0$, как и выше, сходимость ряда в уравнении (1.4) ухудшается. Он сходится как $i^{-4}$.

Таким образом, наличие сосредоточенных включений в исходной конструкции в виде масс (а также моментов инерции и жесткостей) улучшает сходимость ряда в характеристическом уравнении.

2. При специальном выборе величин изменения масс и жесткостей конструкции можно сохранить неизменными собственные формы ее колебаний. Покажем это на примере свободных колебаний конструкции. Решение системы уравнений колебаний, как известно, сводится к решению следующего матричного уравнения [14]:

$$C\varkappa=\omega^2A\varkappa \tag{2.1}$$

Матричное уравнение, соответствующее колебаниям конструкции с измененными свойствами, имеет вид

$$(C+\Delta C)\varkappa^*=\omega^{*2}(A-\Delta A)\varkappa^* \tag{2.2}$$

Пусть величины изменения масс и жесткостей удовлетворяют условиям

$$\Delta A=\varepsilon A,\ \Delta C=\omega_0^2(A+\Delta A) \tag{2.3}$$

где $\varepsilon$, $\omega_0^2$ — коэффициенты пропорциональности. Подставляя выражения (2.3) для $\Delta A$ и $\Delta C$ в соотношение (2.2), будем иметь

$$C\varkappa^*=(\omega^{*2}-\omega_0^2)(1+\varepsilon)A\varkappa^* \tag{2.4}$$

Из сравнения соотношений (2.4) и (2.1) следует, что собственные формы колебаний исходной и измененной конструкции совпадают ($\varkappa^*=\varkappa$), а собственные частоты связаны зависимостью

$$\omega^2=(\omega^{*2}-\omega_0^2)(1+\varepsilon) \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, что если величины изменения масс и жесткостей подчинить условию $\Delta C\varkappa^*=\omega^{*2}\Delta A\varkappa^*$, то имеет место также равенство частот колебаний исходной и измененной конструкции: $\omega^*=\omega$.

3. В качестве примера рассмотрим колебания конструкции, состоящей из несущего твердого тела массы $m_0$ и присоединенных к нему $n$ осцилляторов с массами $m_i$ и жесткостями $k_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$). На конструкцию накладываются связи, имеющие жесткости $C_i$ и массы $\mu_i=\varepsilon m_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Уравнения свободных колебаний конструкции имеют вид

$$Mx_0^{\cdot\cdot}+Cx_0+\sum_{i=1}^n(m_i^*x_i^{\cdot\cdot}+C_ix_i)=0$$

$$m_i^* x_i^{\cdot\cdot} + (k_i + C_i) x_i + m_i^* x_0^{\cdot\cdot} + C_i x_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i^*, \qquad C = \sum_{i=0}^{n} C_i, \qquad m_i^* = (1+\varepsilon) m_i$$

Собственные частоты колебаний определяются из следующего характеристического уравнения

$$C - M\omega^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(C_i - m_i^* \omega^{*2})^2}{k_i + C_i - m_i^* \omega^{*2}} = 0 \tag{3.1}$$

Положим

$$C_0/m_0^* = C_1/m_1^* = \ldots = C_n/m_n^* = \omega_0^2$$

Тогда характеристическое уравнение (3.1) сводится к виду

$$m_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i k_i}{k_i - m_i \omega^2} = 0 \tag{3.2}$$

где $\omega$ удовлетворяет соотношению (2.5).

К особенностям уравнения (3.2) относится то, что определяемые из него частоты $\omega$ не зависят от параметров присоединенных связей, а обусловлены характеристиками самой конструкции, т. е. они являются ее собственными частотами. Формы колебаний конструкции со связями и без связей в этом случае совпадают.

4. Рассмотрим конструкцию, представляющую собой систему упруго связанных друг с другом абсолютно твердых модулей с заданными массами и моментами инерции. Конструкция вывешивается с помощью упругого подвеса, состоящего из амортизаторов, которые присоединяются к каждому модулю и вносят дополнительные массы и жесткости. Выведем условия, которым должны удовлетворять параметры амортизаторов, чтобы не оказывать влияние на форму колебаний конструкции.

Движение каждого модуля при колебаниях конструкции полностью характеризуется перемещением произвольно выбранной точки модуля (полюса) и вращением относительно этой точки. Если в качестве полюса выбрать центр масс модуля, а оси координат направить вдоль главных осей инерции модуля, то уравнение его колебаний можно записать в виде

$$A^* q^{\cdot\cdot} + C^* q = F^* l^{i\omega t} \tag{4.1}$$

$$A^* = \begin{Vmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & a_{1\varphi} & a_{1\theta} \\ 0 & M_2 & 0 & a_{2\psi} & 0 & a_{2\theta} \\ 0 & 0 & M_3 & a_{3\psi} & a_{3\varphi} & 0 \\ 0 & a_{2\psi} & a_{3\psi} & J_1 & a_{\psi\varphi} & a_{\psi\theta} \\ a_{1\varphi} & 0 & a_{3\varphi} & a_{\psi\varphi} & J_2 & a_{\varphi\theta} \\ a_{1\theta} & a_{2\theta} & 0 & a_{\psi\theta} & a_{\varphi\theta} & J_3 \end{Vmatrix}, \quad q = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \psi \\ \varphi \\ \theta \end{Vmatrix}$$

$$C^* = \begin{Vmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & c_{1\varphi} & c_{1\theta} \\ 0 & C_2 & 0 & c_{2\psi} & 0 & c_{2\theta} \\ 0 & 0 & C_3 & c_{3\psi} & c_{3\varphi} & 0 \\ 0 & c_{2\psi} & c_{3\psi} & c_{\psi} & c_{\psi\varphi} & c_{\psi\theta} \\ c_{1\varphi} & 0 & c_{3\varphi} & c_{\psi\varphi} & c_{\varphi} & c_{\varphi\theta} \\ c_{1\theta} & c_{2\theta} & 0 & c_{\psi\theta} & c_{\varphi\theta} & c_{\theta} \end{Vmatrix}, \quad F^* = \begin{Vmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ L_1^* \\ L_2^* \\ L_3^* \end{Vmatrix}$$

Коэффициенты уравнений, отражающие инерционные свойства модуля и амортизаторов, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
&M_1=M_0+\sum_{i=1}^{n_1}M_{1i}, && J_1=J_{11}+\sum_{i=1}^{n_3}M_{3i}y_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}M_{2i}z_i^2\\
&M_2=M_0+\sum_{i=1}^{n_2}M_{2i}, && J_2=J_{22}+\sum_{i=1}^{n_1}M_{1i}z_i^2+\sum_{i=1}^{n_3}M_{3i}x_i^2\\
&M_3=M_0+\sum_{i=1}^{n_3}M_{3i}, && J_3=J_{33}+\sum_{i=1}^{n_2}M_{2i}x_i^2+\sum_{i=1}^{n_1}M_{1i}y_i^2\\
&a_{1\varphi}=\sum_{i=1}^{n_1}M_{1i}z_i, \quad a_{2\theta}=\sum_{i=1}^{n_2}M_{2i}x_i, && a_{3\psi}=\sum_{i=1}^{n_3}M_{3i}y_i\\
&a_{1\theta}=-\sum_{i=1}^{n_1}M_{1i}y_i, \quad a_{2\psi}=-\sum_{i=1}^{n_2}M_{2i}z_i, && a_{3\varphi}=-\sum_{i=1}^{n_3}M_{3i}x_i\\
&a_{\varphi\theta}=-\sum_{i=1}^{n_1}M_{1i}y_iz_i, \quad a_{\theta\psi}=-\sum_{i=1}^{n_2}M_{2i}z_ix_i, && a_{\psi\varphi}=-\sum_{i=1}^{n_3}M_{3i}x_iy_i
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Коэффициенты уравнений, связанные с упругими свойствами присоединенных амортизаторов, имеют вид

$$\begin{aligned}
&C_1=\sum_{i=1}^{n_1}C_{1i}, && c_\psi=\sum_{i=1}^{n_3}C_{3i}y_i^2+\sum_{i=1}^{n_2}C_{2i}z_i^2\\
&C_2=\sum_{i=1}^{n_2}C_{2i}, && c_\varphi=\sum_{i=1}^{n_1}C_{1i}z_i^2+\sum_{i=1}^{n_3}C_{3i}x_i^2\\
&C_3=\sum_{i=1}^{n_3}C_{3i}, && c_\theta=\sum_{i=1}^{n_2}C_{2i}x_i^2+\sum_{i=1}^{n_1}C_{1i}y_i^2\\
&c_{1\varphi}=\sum_{i=1}^{n_1}C_{1i}z_i, \quad c_{2\theta}=\sum_{i=1}^{n_2}C_{2i}x_i, && c_{3\psi}=\sum_{i=1}^{n_3}C_{3i}y_i\\
&c_{1\theta}=-\sum_{i=1}^{n_1}C_{1i}y_i, \quad c_{2\psi}=-\sum_{i=1}^{n_2}C_{2i}z_i, && c_{3\varphi}=-\sum_{i=1}^{n_3}C_{3i}x_i\\
&c_{\varphi\theta}=-\sum_{i=1}^{n_1}C_{1i}y_iz_i, \quad c_{\theta\psi}=-\sum_{i=1}^{n_2}C_{2i}z_ix_i, && c_{\psi\varphi}=-\sum_{i=1}^{n_3}C_{3i}x_iy_i
\end{aligned}\tag{4.3}$$

В формулах (4.2), (4.3) использованы обозначения $M_0$, $J_{11}$, $J_{22}$, $J_{33}$ — масса и осевые моменты инерции модуля; $M_{ki}$, $C_{ki}$ ($k=1, 2, 3$) — масса и жесткость $i$-го амортизатора, присоединяемого к модулю при его движении в $k$-м направлении; $n_k$ — число амортизаторов, присоединяемых к модулю при его движении в $k$-м направлении.

Из анализа уравнения (4.1) следует, что движение модуля с амортизаторами аналогично движению модуля без амортизаторов, если выполняются условия:

$$\frac{C_1}{M_1}=\frac{C_2}{M_2}=\frac{C_3}{M_3}=\frac{c_\psi}{J_1}=\frac{c_\varphi}{J_2}=\frac{c_\theta}{J_3}=\omega_0^2 \tag{4.4}$$

$$\frac{M_1}{M}=\frac{M_2}{M}=\frac{M_3}{M}=\frac{J_1}{J_{11}}=\frac{J_2}{J_{22}}=\frac{J_3}{J_{33}}=1+\varepsilon \tag{4.5}$$

$$a_{1\varphi}=a_{1\theta}=a_{2\theta}=a_{2\psi}=a_{3\psi}=a_{3\varphi}=0 \tag{4.6}$$

$$a_{\varphi\theta}=a_{\theta\psi}=a_{\psi\varphi}=0 \tag{4.7}$$

$$c_{1\varphi}=c_{1\theta}=c_{2\theta}=c_{2\psi}=c_{3\psi}=c_{3\varphi}=0 \tag{4.8}$$

$$c_{\varphi\theta}=c_{\theta\psi}=c_{\psi\varphi}=0 \tag{4.9}$$

$$\frac{F_1^*}{F_1}=\frac{F_2^*}{F_2}=\frac{F_3^*}{F_3}=\frac{L_1^*}{L_1}=\frac{L_2^*}{L_2}=\frac{L_3^*}{L_3}$$

Через $F_1^*, F_2^*, F_3^*, L_1^*, L_2^*, L_3^*$ и $F_1, F_2, F_3, L_1, L_2, L_3$ обозначены амплитудные значения сил и моментов, действующих на модуль со стороны смежных модулей при колебаниях конструкции с амортизаторами и без амортизаторов, соответственно.

Условия (4.4), (4.5) являются условиями пропорциональности жесткостей, масс и моментов инерции амортизаторов массе и моментам инерции модуля. Из них следует также, что при движении модуля в каждом из трех ортогональных направлений к нему должны присоединяться амортизаторы с одинаковыми массами и жесткостями. Условия (4.6), (4.7) свидетельствуют о совпадении центра масс амортизаторов с центром масс модуля и о равенстве нулю центробежных моментов инерции амортизаторов. Условия (4.8), (4.9) накладывают ограничения на выбор жесткостей амортизаторов. В частности, эти условия выполняются при симметричном относительно координатных плоскостей расположения амортизаторов.

Условия (4.4)—(4.9) имеют место для каждого модуля конструкции. Из условий совместности колебаний модулей следует, что коэффициенты пропорциональности $\omega_0^2$ и $\varepsilon$ должны быть одинаковыми для всех модулей.

Таким образом, выбор параметров системы вывешивания в соответствии с условиями (4.4)—(4.9) обеспечивает равенство форм колебаний конструкции с амортизаторами и без амортизаторов. При этом собственные частоты колебаний конструкции без амортизаторов определяются из соотношения (2.5).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Микишев Г. Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
2. *Snyder V. W.* Structural modification and modal analysis — a survey // Int. J. Anal. and Exp. Modal Anal. 1986. 1. No. 1. P. 45—52.
3. *Смрчек А. В.* Экспериментальное определение частот собственных колебаний авиационных конструкций методом компенсирующей жесткости. М.: Изд-во ЦАГИ. 1939. Вып. 411. 14 с.
4. *Лазарян В. А., Гронский В. И., Ковалев И. Е., Тихомиров А. М.* О компенсации влияния присоединенных масс и связей при экспериментальных исследованиях механических систем // Прикл. механика. 1974. Т. 10. Вып. 3. С. 75—80.
5. *Berman A., Giasante N.* The determination of free-body responses of a structure from constrained test data // AIAA Paper. No. 73—191. P. 1—6.
6. *Loiseau H.* Essais de vibration de maquettes et de structures de faibles dimensions // La Recherche Aerospatiale. 1979. No. 3. P. 191—206.
7. *Zaghlool S. A.* Single-station time-domain (SSTD) vibration testing technique: : theory and application // J. Sound and Vibr. 1980. V. 72. No. 2, P. 205—233.
8. *Berman A.* System identification of structural dynamic models-theoretical and practical bounds. AIAA/ASME/ASCE/AKS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers. Part 2. 1984. Palm Springs. California. P. 123—129.

9. *Coppolino R. W., Stroud R. C., Bendet J. S.* Integrated dynamic test/analysis process overview // SAE Techn. Pap. Ser. 1986. No. 861792. P. 1–19.
10. *Шмаков В. П.* Построение корректирующих функций в методе Бубнова – Галеркина // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 80–92.
11. *Лиходед А. И.* О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 180–188.
12. *Аминов В. Р.* Об экспериментальном определении основных динамических характеристик упругого космического аппарата // Вопр. упр. движением косм. летат. аппаратов. Тр. 19 Чтений, посвящен. разраб. науч. наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. М.: ИИЕТ АН СССР. 1986. С. 50–55.
13. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959, 440 с.
14. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
15. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1957. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию 11.I.1989