МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 539.3:534.1

В. Н. БАКУЛИН, В. А. ПОТОПАХИН

РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

В инженерной практике широко используются многослойные конструкции, из которых наиболее распространенными являются трехслойные оболочки с легким заполнителем [1], оболочки состоящие из чередующихся несущих и связующих слоев с существенно различными свойствами [2], оболочки с толстостенным заполнителем [3], оболочки с периодической структурой [4, 5].

Для расчетов таких конструкций наиболее обоснованным является использование трехмерных уравнений для каждого из слоев.

В работе приведены трехмерные уравнения, описывающие поведение многослойных упругих, вязкоупругих, термоупругих оболочек с произвольной структурой и рассмотрены методы их решения при действии на оболочки динамических нагрузок и высокоинтенсивных тепловых потоков.

1. Рассмотрим многослойную оболочку, отнесенную к криволинейной ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3, состоящую из слоев постоянной толщины. Для каждого слоя считаем справедливыми: уравнения движения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x_1}[\sigma_{11}(1+e_{11})H_2H_3]+\sigma_{11}\left(\frac{1}{2}e_{12}+\omega_3\right)\frac{\partial H_1}{\partial x_2}H_3+\sigma_{11}\left(\frac{1}{2}e_{13}-\omega_2\right)\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\\
+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{22}\left(\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3\right)H_1H_3\right]-\sigma_{22}(1+e_{22})\frac{\partial H_2}{\partial x_1}H_3+\\
+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3\right)H_2H_3\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}[\sigma_{12}(1+e_{11})H_1H_3]+\\
+\sigma_{12}(1+e_{22})\frac{\partial H_1}{\partial x_2}H_3-\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}+\omega_3\right)\frac{\partial H_2}{\partial x_1}H_3+\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{23}+\omega_1\right)\frac{\partial H_1}{\partial x}H_2+\\
+\frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{13}H_1H_2)+\sigma_{13}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2-\sigma_{33}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}H_2+\left(F_1-\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}\right)H_1H_2H_3=0 \quad (1\rightleftarrows 2)\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{11}\left(\frac{1}{2}e_{13}-\omega_2\right)H_2H_3\right]-\sigma_{11}(1+e_{11})\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\\
+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{22}\left(\frac{1}{2}e_{23}+\omega_1\right)H_1H_3\right]-\sigma_{22}(1+e_{22})\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1+\\
+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{23}+\omega_1\right)H_2H_3\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{13}-\omega_2\right)H_1H_3\right]-\\
-\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3\right)\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2-\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}+\omega_3\right)\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1+\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{13}H_2H_3)+\\
+\sigma_{13}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}H_2+\frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{23}H_1H_3)+\sigma_{23}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}H_1+
\end{gathered}
\quad (1)
$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{33}H_1H_2)+\left(F_3-\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right)H_1H_2H_3=0$$

соотношения для деформаций

$$\varepsilon_{11}=e_{11}+{}^1/_2[e_{11}{}^2+({}^1/_2e_{12}+\omega_3)^2+({}^1/_2e_{13}-\omega_2)^2]\quad(1\rightleftarrows 2)$$

$$\varepsilon_{12}=e_{12}+e_{11}({}^1/_2e_{12}-\omega_3)+e_{22}({}^1/_2e_{12}+\omega_3)+({}^1/_2e_{13}-\omega_2)({}^1/_2e_{23}+\omega_1)\qquad(2)$$

$$\varepsilon_{13}=e_{13},\ \varepsilon_{23}=e_{23},\ \varepsilon_{33}=e_{33}$$

$$e_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_2+\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_3\qquad(1,2,3)$$

$$2\omega_1=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(H_3u_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(H_2u_2)\right]\qquad(1,2,3)\qquad(3)$$

выражения закона Гука (слои являются ортотропными)

$$\varepsilon_{11}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}+a_{16}\sigma_{12}\quad(1\rightleftarrows 2,3)$$

$$\varepsilon_{12}=a_{16}\sigma_{11}+a_{26}\sigma_{22}+a_{36}\sigma_{33}+a_{66}\sigma_{12}\qquad(4)$$

$$\varepsilon_{13}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{13}\quad(1\rightleftarrows 2;\ 4\rightleftarrows 5)$$

Систему уравнений (1)—(4) дополним условиями на граничных поверхностях оболочки при $x_1=x_1{}^*$:

$$\sigma_{11}(1+e_{11})+\sigma_{12}({}^1/_2e_{12}-\omega_3)=\sigma_{11}{}^*$$

$$\sigma_{11}({}^1/_2e_{12}+\omega_3)+\sigma_{12}(1+e_{22})=\sigma_{12}{}^*\quad(1\rightleftarrows 2)$$

$$\sigma_{11}({}^1/_2e_{13}-\omega_2)+\sigma_{12}({}^1/_2e_{23}+\omega_1)+\sigma_{13}=\sigma_{13}{}^*$$

$$u_1=u_1{}^*,\ u_2=u_2{}^*,\ u_3=u_3{}^*\qquad(5)$$

$$\text{при } x_3=x_3{}^\pm:\ \sigma_{13}=\sigma_{13}{}^\pm,\ u_1=u_1{}^\pm\quad(1\rightleftarrows 2,3)$$

условиями идеального механического контакта слоев

$$\text{при } x_3=x_{3,\,l}:\ \sigma_{13,\,l}=\sigma_{13,\,l+1},\ u_{1,\,l}=u_{1,\,l+1}\quad(1\rightleftarrows 2,3)\qquad(6)$$

а также начальными условиями

$$u_1=u_1|_{t=0},\ \partial u_1/\partial t=\partial u_1/\partial t|_{t=0}\quad(1\rightleftarrows 2,3)\qquad(7)$$

В формулах (1)—(7) ($\sigma_{11}, \ldots \sigma_{33}$), ($\varepsilon_{11}, \ldots \varepsilon_{33}$), ($u_1, u_2, u_3$), ($F_1, F_2, F_3$), ($a_{11}, \ldots a_{66}$), ρ — соответственно напряжения, деформации, перемещения, объемные нагрузки, коэффициенты податливости, плотность, H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ляме. Уравнения (1)—(3), (5) получены из известных нелинейных уравнений [6] при допущении о том, что деформации ε_{13}, ε_{23}, ε_{33} являются линейными функциями перемещений.

В случае, когда для слоев оболочки справедливыми являются соотношения линейной теории вязкоупругости, имеем [7]:

$$\varepsilon_{11}=a_{11}\sigma_{11}+\int_0^t\sigma_{11}b_{11}(t-\tau)\,d\tau+a_{12}\sigma_{22}+\int_0^t\sigma_{22}b_{12}(t-\tau)\,d\tau+$$

$$+a_{13}\sigma_{33}+\int_0^t\sigma_{33}b_{13}(t-\tau)\,d\tau+a_{16}\sigma_{12}+\int_0^t\sigma_{12}b_{16}(t-\tau)\,d\tau\qquad(1\rightleftarrows 2,3)$$

$$(8)$$

$$\varepsilon_{12}=a_{16}\sigma_{11}+\int_0^t\sigma_{11}b_{16}(t-\tau)\,d\tau+a_{26}\sigma_{22}+\int_0^t\sigma_{22}b_{26}(t-\tau)\,d\tau+$$

$$+a_{36}\sigma_{33}+\int_0^t \sigma_{33}b_{36}(t-\tau)\,d\tau+a_{66}\sigma_{12}+\int_0^t \sigma_{12}b_{66}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\varepsilon_{13}=a_{45}\sigma_{23}+\int_0^t \sigma_{23}b_{45}(t-\tau)\,d\tau+a_{55}\sigma_{13}+\int_0^t \sigma_{13}b_{55}(t-\tau)\,d\tau \quad (1\rightleftarrows 2;\ 4\rightleftarrows 5)$$

где b_{ij} — ядра ползучести разностного типа.

При действии на многослойную оболочку высокоинтенсивных тепловых потоков для описания ее поведения используем соотношения теории связанной термоупругости при этом уравнения (1)—(3) дополняются: выражением закона Гука

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}+a_{16}\sigma_{12}+\alpha_{11}T \quad (1\rightleftarrows 2,\ 3)\\ &\varepsilon_{12}=a_{16}\sigma_{11}+a_{26}\sigma_{22}+a_{36}\sigma_{33}+a_{66}\sigma_{12}+\alpha_{12}T\\ &\varepsilon_{13}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{13}+\alpha_{13}T \quad (1\rightleftarrows 2)\end{aligned} \tag{9}$$

уравнением теплопроводности

$$\begin{aligned} \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=&-\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2H_3q_{11})+\frac{\partial}{\partial x_2}(H_1H_3q_{22})+\frac{\partial}{\partial x_3}(H_1H_2q_{33})\right]-\\ &-T_0\left[\alpha_{11}\frac{\partial\sigma_{11}}{dt}+\alpha_{22}\frac{\partial\sigma_{22}}{dt}+\alpha_{33}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial t}+\alpha_{12}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}+\alpha_{23}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial t}+\alpha_{13}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial t}\right]+\rho q\end{aligned} \tag{10}$$

$$q_{11}=-\frac{1}{H_1}\Omega_{11}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\frac{1}{H_2}\Omega_{12}\frac{\partial T}{\partial x_2}-\frac{1}{H_3}\Omega_{13}\frac{\partial T}{\partial x_3} \quad (1\rightleftarrows 2,\ 3) \tag{11}$$

В этом случае граничные (5), (6) и начальные (7) условия дополняются следующими условиями

$$\begin{aligned} &\text{при } x_1=x_1^*:\ T=T^*,\ q_{11}=q_{11}^* \quad (1\rightleftarrows 2)\\ &\text{при } x_3=x_3^{\pm}:\ T=T^{\pm},\ q_{33}=q_{33}^{\pm}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{при } x_3=x_{3,l}:\ T_l=T_{l+1},\ q_{33,l}=q_{33,l+1} \tag{13}$$

$$\text{при } t=0:\ T=T|_{t=0}. \tag{14}$$

В формулах (9)—(14) $(\alpha_{11},\dots\alpha_{33})$, $(\Omega_{11},\dots\Omega_{33})$, c_p, $(T,\ T|_{t=0})$, $(q_{11},\dots q_{33})$, q соответственно коэффициенты температурного расширения, коэффициенты теплопроводности, теплоемкость, текущее и начальное значения температур, компоненты теплового потока, интенсивность объемных источников тепла.

После подстановки соотношений для деформаций (2), соответственно, в выражения закона Гука (4), уравнения (8), выражения закона Гука для термоупругого тела (9) и далее в уравнения движения (1) получим системы уравнений, описывающие поведение упругой, вязкоупругой, термоупругой многослойных оболочек в перемещениях.

Однако решение трехмерных уравнений динамики оболочек в перемещениях связано со значительными трудностями, поэтому в настоящее время отсутствуют методы, которые можно было одинаково успешно применять для расчетов упругих, линейно вязкоупругих и термоупругих многослойных оболочек.

Для построения таких методов расчета выберем в качестве неизвестных функции $\bar\sigma=\{\sigma_{13},\ \sigma_{23},\ \sigma_{33},\ u_1,\ u_2,\ u_3\}$ или $\bar\sigma_1=\{\sigma_{13},\ \sigma_{23},\ \sigma_{33},\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ q_{33},\ T\}$, через которые выражаются условия контакта слоев, соответственно для упругой (вязкоупругой) и термоупругой оболочек, проведем преобразования систем уравнений (1)—(4); (1)—(3), (8); (1)—(3), (9)—(11) таким образом, чтобы из них получить шесть уравнений относительно неизвестных $\bar{\sigma}$ для упругих (вязкоупругих) оболочек и восемь уравнений относительно функций $\bar{\sigma}_1$ для термоупругих оболочек. В результате преобразований, аналогичных выполненным в работах [8, 9], получим, например, для каждого слоя термоупругой оболочки следующую систему уравнений

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}[\sigma_{11}(1+e_{11})H_2H_3]-\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\sigma_{11}\left(\frac{1}{2}e_{12}+\omega_3\right)-$$
$$-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{11}\left(\frac{1}{2}e_{13}+\omega_3\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{22}\left(\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3\right)H_1H_3\right]+$$
$$+\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\sigma_{22}(1+e_{22})-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3\right)H_2H_3\right]-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}[\sigma_{12}(1+e_{11})H_1H_3]-\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\sigma_{12}(1+e_{12})+$$
$$+\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}+\omega_3\right)-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{23}+\omega_1\right)-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\left(2\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1\right)\sigma_{13}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\sigma_{33}-\left(F_1-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)H_3 \qquad (1\rightleftarrows 2)$$

$$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{11}\left(\frac{1}{2}e_{13}-\omega_2\right)H_2H_3\right]+$$
$$+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{11}(1+e_{11})-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{22}\left(\frac{1}{2}e_{23}+\omega_1\right)H_2H_3\right]+$$
$$+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\sigma_{22}(1+e_{22})-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{23}+\omega_1\right)H_2H_3\right]-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{13}-\omega_2\right)H_1H_3\right]+\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1\right)\times$$
$$\times\sigma_{12}\left(\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{13}H_2H_3)-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\sigma_{13}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{23}H_2H_3)-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\sigma_{23}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1\right)\sigma_{33}-\left(F_3-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)H_3$$

(15)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}u_3-\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_1+a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{13}+\alpha_{13}T \qquad (1\rightleftarrows 2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}u_1-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}u_2+a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}+a_{36}\sigma_{12}+\alpha_{33}T$$

$$\frac{\partial q_{33}}{\partial x_3}=-H_3\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2H_3q_{11})-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(H_1H_3q_{22})-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1\right)q_{33}-T_0\left(\alpha_{11}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}+\alpha_{22}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}+\alpha_{33}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial t}+\right.$$

$$+\alpha_{12}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}+\alpha_{23}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial t}+\alpha_{13}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial t}\Big)H_3+qH_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3}=-\frac{H_3}{\Omega_{33}}q_{33}-\frac{H_3}{H_1}\frac{\Omega_{13}}{\Omega_{33}}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\frac{H_3}{H_2}\frac{\Omega_{23}}{\Omega_{33}}\frac{\partial T}{\partial x_2}$$

Здесь напряжения σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} являются заданными функциями физико-механических параметров слоев, перемещений u_1, u_2, u_3, напряжения σ_{33}, полученным из выражений закона Гука (9) и соотношений для деформаций (2), (3), компоненты теплового потока q_{11}, q_{22} определяются теплофизическими характеристиками слоев, температурой T, компонентой теплового потока q_{33} с использованием зависимостей (11).

Отбросив в уравнениях (15) нелинейные слагаемые, полагая, кроме того, $H_3=1$, получим линейную систему уравнений

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=-\frac{1}{H_1}\Big(\Delta_{1,11}\frac{\partial}{\partial x_1}e_{11}+\Delta_{2,11}\frac{\partial}{\partial x_1}e_{22}+\Delta_{3,11}\frac{\partial}{\partial x_1}e_{12}+$$

$$+A_{1,11}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_1}+A_{2,11}\frac{\partial T}{\partial x_1}\Big)-\frac{1}{H_2}\Big(\Delta_{1,12}\frac{\partial}{\partial x_2}e_{11}+\Delta_{2,12}\frac{\partial}{\partial x_2}e_{22}+$$

$$+\Delta_{3,12}\frac{\partial}{\partial x_2}e_{12}+A_{1,12}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_2}+A_{2,12}\frac{\partial T}{\partial x_2}\Big)+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\left(-\Delta_{1,11}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\Delta_{1,22}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-2\Delta_{1,12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)e_{11}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\left(-\Delta_{2,11}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\Delta_{2,22}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-2\Delta_{2,12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)e_{22}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\left(-\Delta_{3,11}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Delta_{3,22}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-2\Delta_{3,12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)e_{12}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\left(-A_{1,11}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+A_{1,22}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-2A_{1,12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)\sigma_{33}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\left(-A_{2,11}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+A_{2,22}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-2A_{2,12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)T-$$

$$-\left(\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)\sigma_{13}-\left(F_1-\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}\right)\qquad(1\rightleftarrows2)$$

$$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\sigma_{13}-$$

$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\sigma_{23}+\left(-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}A_{1,11}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial x_3}A_{1,22}\right)\sigma_{33}+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\Delta_{1,11}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H^2}{\partial x_3}\Delta_{1,22}\right)e_{11}+$$

$$+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\Delta_{2,11}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\Delta_{2,22}\right)e_{22}+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\Delta_{3,11}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\Delta_{3,22}\right)e_{12}+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}A_{2,11}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}A_{2,22}\right)T-\left(F_3-\rho\frac{\partial^2u_3}{\partial t^2}\right)\qquad(16)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_1+a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{13}+\alpha_{13}T\qquad(1\rightleftarrows2)$$

$$\partial u_3/\partial x_3=n_{1,33}e_{11}+n_{2,33}e_{22}+n_{3,33}e_{12}+m_{1,33}\sigma_{33}+m_{2,33}T$$

$$\frac{\partial q_{33}}{\partial x_3}=-\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}H_2\left[\frac{1}{H_1}\left(\Omega_{11}-\frac{\Omega_{13}^2}{\Omega_{33}}\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_2}\left(\Omega_{12}-\frac{\Omega_{13}\Omega_{23}}{\Omega_{33}}\right)\frac{\partial T}{\partial x_2}-\frac{\Omega_{13}}{\Omega_{33}}q_{33}\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}H_1\left[\frac{1}{H_1}\left(\Omega_{12}-\frac{\Omega_{13}\Omega_{23}}{\Omega_{33}}\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{H_2}\left(\Omega_{22}-\frac{\Omega_{23}^2}{\Omega_{33}}\right)\frac{\partial T}{\partial x_2}-\frac{\Omega_{23}}{\Omega_{33}}q_{33}\right]-\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}H_2+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}H_1\right)q_{33}\right\}-$$

$$-T_0\left[(\alpha_{11}\Delta_{1,11}+\alpha_{22}\Delta_{1,22}+\alpha_{12}\Delta_{1,12})\frac{\partial}{\partial t}e_{11}+(\alpha_{11}\Delta_{2,11}+\alpha_{22}\Delta_{22,2}+\right.$$

$$+\alpha_{12}\Delta_{2,12})\frac{\partial}{\partial t}e_{22}+(\alpha_{11}\Delta_{3,11}+\alpha_{22}\Delta_{3,22}+\alpha_{12}\Delta_{3,12})\frac{\partial}{\partial t}e_{12}+(\alpha_{11}A_{1,11}+\alpha_{22}A_{1,22}+$$

$$\left.+\alpha_{12}A_{1,12}+\alpha_{33})\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial t}+\alpha_{13}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial t}+\alpha_{23}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial t}+\alpha_{11}A_{2,11}+\alpha_{22}A_{2,22}+\alpha_{12}A_{2,12})\frac{\partial T}{\partial t}\right]+$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3}=-\frac{1}{\Omega_{33}}q_{33}-\frac{1}{H_1}\frac{\Omega_{13}}{\Omega_{33}}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\frac{1}{H_2}\frac{\Omega_{23}}{\Omega_{33}}\frac{\partial T}{\partial x_2}$$

где e_{11}, e_{12}, e_{22} — деформации, определяемые по формулам (3). Коэффициенты при неизвестных в системе уравнений (16) определяются физико-механическими параметрами слоев. Из (15), (16) можем получить несвязанные системы уравнений термоупругости многослойных оболочек. Для этого необходимо в седьмом уравнении (15), (16) отбросить слагаемые, содержащие T_0. При этом получаем системы шести уравнений, описывающие термоупругое состояние оболочки с помощью функций $\bar{\sigma}_0$ и системы двух уравнений, характеризующие тепловое состояние оболочки функциями q_{33}, T. Эти системы являются несвязанными и должны решаться отдельно.

Для многослойной оболочки, слои которой являются линейновязкоупругими, получаем системы уравнений аналогичные (15), (16), однако в этом случае коэффициенты при производных от функций $\bar{\sigma}_0$ по координатам x_1, x_2 будут иметь интегралы аналогичные (8).

Уравнения (15), (16) справедливы для оболочек с произвольной структурой. Вместе с тем, в практике широко используются многослойные конструкции, имеющие большое число слоев периодической структуры. Для таких конструкций коэффициенты в уравнениях (15), (16) являются быстро осциллирующими функциями, это обстоятельство делает практически невозможным численное решение уравнений, описывающих поведение конструкций периодической структуры, так как приходится брать слишком мелкую сетку, чтобы по крайней мере несколько узлов разностной схемы попали на каждый элементарный слой [4, 5]. В работах [4, 5] показана возможность асимптотического исследования рассмотренных задач. Применим метод осреднения [4, 5] для связанных систем уравнений термоупругости (15), (16), описывающих поведение многослойной оболочки при действии высокоинтенсивных тепловых потоков.

Представим функции, входящие в уравнения (15), (16), в виде (l — период структуры):

$$\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_0(x_3,\ \xi)+\varepsilon\bar{\sigma}_1(x_3,\ \xi)+\varepsilon^2\bar{\sigma}_2(x_3,\ \xi) \qquad (17)$$

$$\xi=x_3/l$$

Здесь $\bar{\sigma}_i(x_3,\ \xi)$ — периодические по ξ функции с периодом 1.

После подстановки (17) в системы уравнений (15), (16), приравнивания к нулю слагаемых порядка ε^{-1}, ε^0 и проведения интегрирования по ξ от 0 до 1 уравнений, полученных в результате приравнивания к нулю слагаемых порядка ε^0, получим осредненные уравнения связанной термоупругости для многослойных оболочек периодической структуры. Осредненные системы уравнений имеют такую же структуру как и исходные (15), (16). Отличие их от исходных состоит в том, что коэффициенты при производных в них получены интегрированием по ξ от 0 до 1 коэффициентов исходной системы уравнений.

Аналогичным образом получаются осредненные уравнения для слоистых вязкоупругих оболочек периодической структуры.

2. Приведем методы решения полученных систем уравнений для упругих, вязкоупругих, термоупругих многослойных оболочек.

В качестве примера рассмотрим многослойную цилиндрическую ортотропную оболочку с осями ортотропии, совпадающими с осями координат x_1, x_2, x_3, описываемую уравнениями связанной термоупругости (16).

Представим неизвестные функции в системе уравнений (16), а также параметры нагрузок, температур и тепловых потоков, действующих на оболочку, в виде двойных тригонометрических рядов

$$\{u_1, \sigma_{13}, \sigma_{13}^{\pm}\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{u_{1,mn}, \sigma_{13,mn}, \sigma_{13,mn}^{\pm}\}\cos\frac{m\pi}{l}x_1(\cos nx_2+\sin nx_2)$$

$$\{u_2, \sigma_{23}, \sigma_{23}^{\pm}\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{u_{2,mn}, \sigma_{23,mn}, \sigma_{23,mn}^{\pm}\}\sin\frac{m\pi}{l}x_1(\sin nx_2+\cos nx_2)$$

$$\{u_3, \sigma_{33}, q_{33}, T, \sigma_{33}^{\pm}, q_{33}^{\pm}, T^{\pm}, q(x_3)\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{u_{3,mn}, \sigma_{33,mn}, q_{33,mn}, T_{mn}, \sigma_{33,mn}^{\pm}, q_{33,mn}^{\pm}, T_{mn}^{\pm}, q_{mn}(x_3)\}\sin\frac{m\pi}{l}x_1(\cos nx_2+\sin nx_2) \qquad (18)$$

Раскладывая, кроме того, производные по времени в (16) в конечные разности

$$\partial\bar{\sigma}/\partial t=[3\bar{\sigma}(t_s)-4\bar{\sigma}(t_{s-1})+\bar{\sigma}(t_{s-2})]/2\tau$$
$$\partial^2\bar{\sigma}/\partial t^2=[2\bar{\sigma}(t_s)-5\bar{\sigma}(t_{s-1})+4\bar{\sigma}(t_{s-2})-\bar{\sigma}(t_{s-3})]/\tau^2 \qquad (19)$$

после подстановки (18), (19) в (16) приходим на каждом временном шаге t_s для каждой пары волновых чисел m, n к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\sigma_{13}(t_s)}{dx_3} = -\frac{1}{x_3}\sigma_{13}(t_s)-A_{1,11}\Omega_m\sigma_{33}(t_s)+\left(\Delta_{1,11}\Omega_m^2+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{3,12}n^2\right)u_1(t_s)-$$
$$-\frac{1}{x_3}(\Delta_{2,11}+\Delta_{3,12})\Omega_m nu_2(t_s)-\frac{1}{x_3}\Delta_{2,11}\Omega_m u_3(t_s)-A_{2,11}\Omega_m T(t_s)-F_1(t_s)+$$
$$+\rho[2u_1(t_s)-5u_1(t_{s-1})+4u_1(t_{s-2})-u_1(t_{s-3})]/\tau^2$$

$$\frac{d\sigma_{23}(t_s)}{dx_3} = -\frac{2}{x_3}\sigma_{23}(t_s)+\frac{1}{x_3}A_{1,22}n\sigma_{33}(t_s)-\frac{1}{x_3}(\Delta_{1,22}+\Delta_{3,12})\Omega_m nu_1(t_s)+$$
$$+\left(\Delta_{3,12}\Omega_m^2+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}n^2\right)u_2(t_s)+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}nu_3(t_s)+$$

$$+\frac{1}{x_3}A_{2,22}nT(t_s)-F_2(t_s)+\rho[2u_2(t_s)-5u_2(t_{s-1})+4u_2(t_{s-2})-u_2(t_{s-3})]/\tau^2$$

$$\frac{d\sigma_{33}(t_s)}{dx_3}=\Omega_m\sigma_{13}(t_s)-\frac{1}{x_3}n\sigma_{23}(t_s)+\frac{1}{x_3}(-1+A_{1,22})\sigma_{33}(t_s)-$$

$$-\frac{1}{x_3}\Delta_{1,22}\Omega_m u_1(t_s)+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}nu_2(t_s)+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}u_2(t_s)+$$

$$+\frac{1}{x_3}A_{2,22}T(t_s)-F_3(t_s)+\rho[2u_3(t_s)-5u_3(t_{s-1})+4u_3(t_{s-2})-u_3(t_{s-3})]/\tau^2$$

$$du_1(t_s)/dx_3=a_{55}\sigma_{13}(t_s)-\Omega_m u_3(t_s) \qquad (20)$$

$$\frac{du_2(t_s)}{dx_3}=a_{44}\sigma_{23}(t_s)+\frac{1}{x_3}u_2(t_s)+\frac{1}{x_3}nu_3(t_s)$$

$$du_3(t_s)/dx_3=m_{1,33}\sigma_{33}(t_s)-n_{1,33}\Omega_m u_1(t_s)+\frac{1}{x_3}n_{2,33}nu_2(t_s)+$$

$$+\frac{1}{x_3}n_{2,33}u_3(t_s)+m_{2,33}T(t_s)$$

$$dq_{33}(t_s)/dx_3=-T_0\{(\alpha_{11}A_{1,11}+\alpha_{22}A_{1,22}+\alpha_{33})[3\sigma_{33}(t_s)-4\sigma_{33}(t_{s-1})+$$

$$+\sigma_{33}(t_{s-2})]/2\tau-(\alpha_{11}\Delta_{1,11}+\alpha_{22}\Delta_{1,22})\Omega_m[3u_1(t_s)-4u_1(t_{s-1})+u_1(t_{s-2})]/2\tau+$$

$$+\frac{1}{x_3}(\alpha_{11}\Delta_{2,11}+\alpha_{22}\Delta_{2,22})n[3u_2(t_s)-4u_2(t_{s-1})+u_2(t_{s-2})]/2\tau+$$

$$+\frac{1}{x_3}(\alpha_{11}\Delta_{2,11}+\alpha_{22}\Delta_{2,22})[3u_3(t_s)-4u_3(t_{s-1})+u_3(t_{s-2})]/2\tau+$$

$$+(\alpha_{11}A_{2,11}+\alpha_{22}A_{2,22})[3T(t_s)-4T(t_{s-1})+T(t_{s-2})]/2\tau-$$

$$-\left(\Omega_{11}\Omega_m^2+\frac{1}{x_3^2}\Omega_{22}n^2\right)T(t_s)-\rho c_p[3T(t_s)-4T(t_{s-1})+T(t_{s-2})]/2\tau-$$

$$-\frac{1}{x_3}q_{33}(t_s)+q(x_3,t_s)$$

$$\frac{dT(t_s)}{dx_3}=-\frac{1}{\Omega_{33}}q_{33}(t_s)\left(\Omega_m=\frac{m\pi}{l}\right)\quad(n\rightleftarrows-n)$$

Для решения системы уравнений (20) используем метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова [8—10], который позволяет автоматически удовлетворять условиям идеального механического и теплового контакта слоев.

Аналогичным образом проводится решение уравнений динамики упругих многослойных оболочек, при этом в системе уравнений (16) отбрасываются седьмое и восьмое уравнения, а также температурные слагаемые в первых шести уравнениях.

Для решения системы уравнений, описывающей вязкоупругое поведение многослойных оболочек при динамическом нагружении, представим неизвестные функции, а также параметры нагрузки в виде рядов Фурье по времени [11, 12]:

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,t)=\{(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{13}),(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{23},\varepsilon_{13}),(u_1,u_2,u_3),$$

$$(F_1,F_2,F_3)\}=\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(x_1,x_2,x_3)\exp\left(i\frac{k\pi}{T}t\right) \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (1)—(3), (8), отбрасывая нелинейные слагаемые и проводя преобразования полученной системы уравнений к виду аналогичному (16) и далее представляя функции $\bar{\sigma}$ рядами (18), приходим для каждой тройки чисел k, m, n к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\sigma_{13}/dx_3=-\sigma_{13}/x_3-A_{1,11}\Omega_m\sigma_{33}+\left(\Delta_{1,11}\Omega_m^2+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{3,12}n^2-\rho k^2\right)u_1-$$

$$-\frac{1}{x_3}(\Delta_{2,11}+\Delta_{3,12})\Omega_m n u_2-\frac{1}{x_3}\Delta_{2,11}\Omega_m u_3-F_1$$

$$\frac{d\sigma_{23}}{dx_3}=-\frac{2}{x_3}\sigma_{23}+\frac{1}{x_3}A_{1,22}n\sigma_{33}-\frac{1}{x_3}(\Delta_{1,22}+\Delta_{3,12})\Omega_m n u_1+$$

$$+\left(\Delta_{3,12}\Omega_m^2+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}n^2-\rho k^2\right)u_2+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}n u_3-F_2$$

$$\frac{d\sigma_{23}}{dx_3}=\Omega_m\sigma_{13}-\frac{1}{x_3}n\sigma_{23}+\frac{1}{x_3}(-1+A_{1,22})\sigma_{33}-\frac{1}{x_3}\Delta_{1,22}\Omega_m u_1+$$

$$+\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}n u_2+\left(\frac{1}{x_3^2}\Delta_{2,22}-\rho k^2\right)u_3-F_3 \tag{22}$$

$$du_1/dx_3=a_{55}{}^{\vee}\sigma_{13}-\Omega_m u_3,\quad \frac{du_2}{dx_3}=a_{44}{}^{\vee}\sigma_{23}+\frac{1}{x_3}u_2+\frac{1}{x_3}nu_3$$

$$\frac{du_3}{dx_3}=m_{1,33}\sigma_{33}-n_{1,33}\Omega_m u_1+\frac{1}{x_3}n_{2,33}nu_2+\frac{1}{x_3}n_{2,33}u_3$$

В системе уравнений (22) коэффициенты $A_{i,l,s}$, $\Delta_{i,l,s}$, $n_{i,l,s}$ определяются параметрами $a_{ls}{}^{\vee}$ равными

$$a_{ls}{}^{\vee}=a_{ls}+b_{ls},\quad b_{ls}=\int\limits_0^{\infty}b_{ls}(t)\exp\left(-i\frac{k\pi}{T}\right)dt \tag{23}$$

Для решения полученной системы уравнений используем метод дискретной ортогонализации.

При решении задач вязкоупругости по времени методом рядов Фурье начальные условия считаются нулевыми, функции $\bar{\sigma}$ на граничных поверхностях $x_3=x_3{}^{\pm}$ задаем в виде

$$\bar{\sigma}^{\pm}(x_1,x_2,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\sigma}_k{}^{\pm}(x_1,x_2)\exp\left(i\frac{k\pi}{T}t\right) \tag{24}$$

Коэффициенты $\bar{\sigma}_k{}^{\pm}(x_1,x_2)$, например, для случая действия на оболочку периодической последовательности импульсов нормального давления $\sigma_{33}(x_1,x_2)$ в течение времени $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ с периодом $2T$ для случая нечетной функции $\sigma_{33}(t)$, а также при $T>2t_1$ и $t_1>(t_2-t_1)$ имеют вид [11]:

$$\sigma_{33,k}(x_1,x_2,t)=\frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_2}\sigma_{33}(x_1,x_2,t)\sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right)dt \tag{25}$$

Метод рядов Фурье позволяет получить решение при периодических воздействиях на оболочку. Вместе с тем, если выбрать период следования импульсов таким, чтобы влиянием предыдущих импульсов на напряженно-деформированное состояние, порожденное последующими импульсами, можно было пренебречь, то можем получить решение, соответствующее одному воздействию на оболочку. В инженерной практике встречаются случаи воздействия динамических нагрузок, тепловых потоков на многослойные оболочки, нагруженные статическим внутренним (внешним) давлением или осевыми силами. Для расчетов многослойных оболочек при названных условиях нагружения применим метод линеаризации исходных нелинейных уравнений (15).

Считаем, что многослойная оболочка, описываемая первыми шестью уравнениями из системы уравнений (15) (т. е. не учитывается эффект связанности процессов распространения тепла и деформирования оболочки), имеет предварительное напряженно-деформированное состояние, возникающее под действием статических нагрузок. В результате приложения дополнительных импульсных нагрузок, тепловых потоков оболочка получает отклонение от предварительного напряженно-деформированного состояния.

Полное напряженно-деформированное состояние оболочки представим [13]:

$$\Phi=\Phi_0+\Phi(t) \tag{26}$$

$(\Phi=\{(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}), (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}), (u_1, u_2, u_3)\})$
где Φ — вектор компонент предварительного напряженно-деформированного состояния; $\Phi(t)$ — вектор компонент дополнительного напряженно-деформированного состояния, возникающего при отклонении от предварительного состояния в результате действия импульсных нагрузок, тепловых потоков.

Подставив выражения (26) в уравнения (15), вычтя из полученных уравнений для суммарного напряженно-деформированного состояния уравнения, описывающие предварительное напряженно-деформированное состояние и, следовательно, тождественно удовлетворяющиеся, получим соотношения, описывающие поведение оболочки в отклоненном состоянии.

В отклоненных состояниях, достаточно близких к предварительному, дополнительные перемещения, деформации, напряжения в оболочке малы, поэтому нелинейными слагаемыми можно пренебречь и ограничиться линейными.

Полагая, кроме того, перемещения и деформации оболочки в предварительном состоянии равными нулю, приходим для каждого слоя оболочки к системе уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} &= L_1-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{H_2}{H_1}\sigma_{11,0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_3\right)\right]-\\
&-\frac{1}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\sigma_{22,0}\left(-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{11,0}\left(-\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\\
&+\frac{1}{H_1H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\sigma_{22,0}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}u_3\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\times\\
&\times\left[\frac{H_1}{H_2}\sigma_{22,0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}u_2\right)\right]-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{H_2}\sigma_{12,0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}u_2\right)\right]-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{12,0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_3\right)\right]+\\
&+\frac{1}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\sigma_{12,0}\left(-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\frac{1}{H_1H_2^2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\sigma_{12,0}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}u_1+\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}u_3\Big)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{12,0}\left(-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}u_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\quad (1\rightleftarrows 2) \qquad (27)$$

$$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=L_3+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{11,0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_3\right)-$$

$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{H_2}{H_1}\sigma_{11,0}\left(-\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right]+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\sigma_{22,0}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial H_2}{\partial x_3}u_3\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{H_1}{H_2}\sigma_{22,0}\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}u_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right]+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{12,0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}u_2\right)+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\sigma_{12,0}\left(-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}u_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{12,0}\left(-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}u_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sigma_{12,0}\frac{1}{H_1}\left(-\frac{\partial H_1}{\partial x_3}u_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$\partial u_1/\partial x_3=L_4,\qquad \partial u_2/\partial x_3=L_5,\qquad \partial u_3/\partial x_3=L_6$$

Здесь L_i ($i=1-6$) — комплексы, имеющие вид правых частей в системе уравнений (16); $\sigma_{11,0}$, $\sigma_{12,0}$, $\sigma_{22,0}$ — напряжения в оболочке, вызванные ее предварительным нагружением.

Полное напряженно-деформированное состояние многослойной оболочки является суммой предварительного и дополнительного, определяемого из решения системы уравнений (27), а также путем использования выражений закона Гука для определения напряжений σ_{11}, σ_{12}, σ_{22}.

Поскольку уравнения (27), описывающие дополнительное напряженно-деформированное состояние предварительно нагруженных многослойных оболочек при термосиловом нагружении, имеют такую же структуру как и уравнения оболочек без предварительного нагружения (16), то, следовательно, для их решения используем одинаковые методы.

Ниже были рассмотрены методы расчета многослойных оболочек постоянной толщины. Однако в практике широко применяются многослойные конструкции, у которых граничные поверхности слоев являются функциями координат x_1, x_2. Это связано как с особенностями назначения конструкций, так и с воздействием высокоинтенсивных тепловых потоков, приводящих, например, к уменьшению толщины наружного слоя.

В качестве примера таких конструкций рассмотрим термоупругий многослойный цилиндр, у которого внешняя поверхность x_3^+ и поверхности раздела l и $(l+1)$ слоев в цилиндрической системе координат x_1, x_2, x_3 описываются уравнениями

$$x_3^+=x_3^*+\varepsilon f(x_1,x_2),\quad x_{3,l}=\overset{*}{x}_{3,l}+\varepsilon\omega_l f_l(x_1,x_2) \qquad (28)$$

$$x_3^*,\ \overset{*}{x}_{3,l}=\text{const}>0,\quad |\omega_l|\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\ll 1,\quad (l=1,2,\ldots,N)$$

Внутренняя поверхность x_3^- полагается гладкой.

Для описания поведения многослойного цилиндра используем систему уравнений (16). Допустим, что требуется определить напряженное состояние цилиндра под действием компонент вектора $\bar{\sigma}^\pm$, приложенных на поверхностях $x_3^\pm$, которые предполагаются такими, что искомые функции $\bar{\sigma}$ в системе уравнений (15) являются аналитическими функциями по x_3 и, следовательно, допускают разложение в ряды Тейлора в окрестностях $x_3=x_3^\pm$, $x_3=x_{3,l}$. Такая постановка задачи позволяет искать функции $\bar{\sigma}$ в виде рядов по неотрицательным степеням параметра ε [14, 15]. Представляя также направляющие косинусы, входящие в краевые условия в напряжениях, и заданные функции $\bar{\sigma}^+$, $\bar{\sigma}^-$ указанными рядами и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε в j-м приближении получаем [16] граничные условия на x_3^-:

$$\bar{\sigma}^{(j)}\big|_{x_3=x_3^-}=\bar{\sigma}_0^{(j)} \tag{29}$$

граничные условия на x_3^+:

$$N_1^{(j)}\big|_{x_3=x_3^+}=\{u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}, T^{(j)}\}\big|_{x_3=x_3^+}=N_1^{+(j)}-\sum_{s=1}^{j} L_1^{(s)}N_1^{(j-s)}\Big|_{x_3=x_3^*}$$

$$N_k^{(j)}\big|_{x_3=x_3^+}=\{\sigma_{13}^{(j)}, \sigma_{23}^{(j)}, \sigma_{33}^{(j)}\}\big|_{x_3=x_3^+}=N_k^{+(j)}-$$

$$-\sum_{s=1}^{j}[D_1^{(s)}\sigma_{3k}^{(j-s)}+D_2^{(s)}\sigma_{2k}^{(j-s)}+D_3^{(s)}\sigma_{1k}^{(j-s)}\}\Big|_{x_3=x_3^*} \tag{30}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3)\ (\sigma_{33}\rightleftarrows q_{33})$$

условия сопряжения на $x_{3,\,l}$

$$N_1^{(j)}\big|_{x_3=x_{3,\,l+1}}=N_1^{(j)}\big|_{x_3=x_{3,\,l}}-\sum_{s=1}^{j} L_1^{(s)}N_1^{(j-s)}\Big|_{x_3=x_{3,\,l}^*}$$

$$N_k^{(j)}\big|_{x_3=x_{3,\,l+1}}=N_k^{(j)}\big|_{x_3=x_{3,\,l}}\Big\{\sum_{s=1}^{j}[D_{1l}^{(s)}(\sigma_{3k,\,l}^{(j-s)}-\sigma_{3k,\,l+1}^{(j-s)})+$$

$$+D_{2l}^{(s)}(\sigma_{2k,\,l}^{(j-s)}-\sigma_{2k,\,l+1}^{(j-s)})+D_{3l}^{(s)}(\sigma_{1k,\,l}^{(j-s)}-\sigma_{1k,\,l+1}^{(j-s)})]\Big\}\Big|_{x_3=x_{3,\,l}^*}\quad (k=1, 2, 3)\ (\sigma_{33}\rightleftarrows q_{33})$$

Здесь $\bar{\sigma}_0^{(j)}$, $N_1^{+(j)}$, $N_k^{+(j)}$ — коэффициенты разложения заданных функций в ряды по ε, дифференциальные операторы $L_1^{(s)}$, $D_1^{(s)}$, $D_2^{(s)}$, $D_3^{(s)}$ определяются видом функции $f(x_1, x_2)$ согласно [14].

Следовательно, исходная задача о термонапряженном состоянии слоистого цилиндра с поверхностями, ограничивающими слой в виде (28) свелась к рекуррентной последовательности j-задач с условиями на поверхностях x_3^+, $x_{3,\,l}$ для слоистого цилиндра с постоянными толщинами слоев. Для решения каждой из полученных j-задач можем использовать методы: конечных разностей по времени, двойных рядов Фурье по координатам x_1, x_2 дискретной ортогонализации по координате x_3, аналогично решению системы уравнений (16).

Для практического использования предложенных в работе методов разработан комплекс алгоритмов и программ расчета на ЭВМ на языке Фортран-IV напряженно-деформированного состояния многослойных оболочек при термосиловом нагружении, внедренный на ряде предприятий.

В качестве примера использования данного комплекса рассмотрим некоторые результаты расчетов для ортотропной цилиндрической оболочки с заполнителем с упругими характеристиками:

оболочка $a_{11}=5\cdot10^{11}$ м^2/Н; $a_{22}=3{,}3\cdot10^{-11}$ м^2/Н; $a_{12}=1{,}5\cdot10^{-11}$ м^2/Н; $a_{13}=a_{23}=-1{,}5\cdot10^{-11}$ м^2/Н; $a_{44}=5{,}6\cdot10^{-11}$ м^2/Н; $a_{55}=8{,}3\cdot10^{-11}$ м^2/Н; $a_{66}=4{,}1\times10^{-11}$ м^2/Н;

заполнитель $a_{11}=a_{22}=a_{33}=10^{-8}$ м^2/Н; $a_{12}=a_{13}=a_{23}=-3{,}5\cdot10^{-9}$ м^2/Н; $a_{44}=a_{55}=a_{66}=2{,}5\cdot10^{-8}$ м^2/Н.

Оболочка имеет длину $l=0{,}8$ м, толщину $h=0{,}002$ м, толщину заполнителя $h_3=0{,}03$ м, радиус канала заполнителя $x_3^-=0{,}168$ м.

Таблица 1

x_3	$u_{3,0}\cdot 10^4$	$\sigma_{33,0}\cdot 10^{-5}$	$\sigma_{22,0}\cdot 10^{-5}$
0,168	7,61	−10	−0,7
0,171	7,37	−9,84	−0,84
0,174	7,13	−9,68	−0,99
0,177	6,91	−9,54	−1,12
0,180	6,68	−9,39	−1,25
0,183	6,47	−9,26	−1,37
0,186	6,26	−9,13	−1,49
0,189	6,05	−9,0	−1,6
0,192	5,85	−8,88	−1,71
0,195	5,65	−8,77	−1,81
0,198	5,46	−8,66	−1,9
0,1984	5,45	−6,91	859
0,1988	5,45	−5,17	858
0,1996	5,44	−1,71	855
0,2	5,43	0	854

Таблица 2

x_3	$u_1\cdot 10^7$	$u_3\cdot 10^5$	$\sigma_{11}\cdot 10^{-6}$	$\sigma_{22}\cdot 10^{-6}$	$\sigma_{13}\cdot 10^{-3}$	$\sigma_{33}\cdot 10^{-5}$
0,168	−4,7	−1,61	$-2{,}74\cdot 10^{-3}$	$-1{,}11\cdot 10^{-2}$	0 0	0
0,178	−5,32	−1,95	$-6{,}56\cdot 10^{-2}$	$-7{,}51\cdot 10^{-2}$	−3,62	−1,16
0,188	−9,62	−2,8	$-8{,}89\cdot 10^{-2}$	−0,1	−4,46	−1,58
0,198	−9,73	−3,71	$-8{,}90\cdot 10^{-2}$	−0,1	−2,05	−1,54
0,19867	−9,07	−3,71	−1,76	−6,57	−1,27	−1,7
0,19933	−8,42	−3,7	−1,79	−6,54	−0,59	−1,86
0,2	−7,76	−3,7	−1,82	−6,51	0	−2,0

На оболочку с заполнителем, предварительно нагруженную равномерным внутренним давлением $\sigma_{33}^{-}=10^6$ Н/м², действует внешнее импульсное давление $\sigma_{33}^{+}=\overset{+}{\sigma}_{33,0}\, f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(t)$, где $\overset{+}{\sigma}_{33,0}=2\cdot 10^6$ Н/м²; $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, $f_3(t)$ — функции, характеризующие изменение внешнего давления соответственно в продольном, окружном направлениях и во времени. Принимаем эти функции в следующем виде

$$f_1(x_1)=\begin{cases}1, & l/2-s/2\leqslant x_1\leqslant l/2+s/2\\ 0, & x_1>l/2+s/2,\quad x_1<l/2-s/2,\quad (s=l/2)\end{cases}$$

$$f(x_2)=\begin{cases}1, & -\pi/2\leqslant x_2\leqslant \pi/2\\ 0, & x_2<-\pi/2,\quad x_2>\pi/2\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant \Delta t\\ 0, & t>\Delta t\quad (\Delta t=2\cdot 10^{-4}\text{с})\end{cases}$$

В таблице 1 показано распределение прогибов $u_{3,0}$ напряжений $\sigma_{33,0}$, $\sigma_{22,0}$ по толщине оболочки с заполнителем ($x_3=0{,}168\div 0{,}2$ м) в точке с координатами $x_1=l/2$, $x_2=0$ при действии статического внутреннего давления.

Под действием внешнего импульсного давления в каждой точке оболочки происходят колебания около положения равновесия, определяемого предварительным статическим нагружением.

Во время действия импульса давления (при $t=0-2\cdot 10^{-4}$ с) в предварительно напряженной оболочке происходят вынужденные колебания, переходящие при $t>2\cdot 10^{-4}$ с в свободные.

Таблица 3

x_3	$u_1\cdot10^7$	$u_3\cdot10^5$	$\sigma_{11}\cdot10^{-6}$	$\sigma_{22}\cdot10^{-6}$	$\sigma_{13}\cdot10^{-3}$	$\sigma_{33}\cdot10^{-5}$
0,168	−14,5	−1,28	$-5{,}17\cdot10^{-3}$	$-8{,}46\cdot10^{-2}$	0	0
0,178	−10,43	−1,26	$1{,}9\cdot10^{-2}$	$-4{,}9\cdot10^{-2}$	2,52	0,51
0,188	−5,38	−1,22	$2{,}5\cdot10^{-2}$	$-2{,}98\cdot10^{-2}$	9,19	0,69
0,198	1,24	−1,17	$1{,}96\cdot10^{-2}$	$-1{,}85\cdot10^{-2}$	0,15	0,71
0,19867	1,46	−1,17	−5,06	−17,38	0,1	0,48
0,19933	1,69	−1,17	−5,12	−17,29	5,04	0,24
0,2	1,91	−1,17	−5,18	−17,19	0	0

Таблица 4

x_3	$u_1\cdot10^7$	$u_3\cdot10^5$	$\sigma_{11}\cdot10^{-6}$	$\sigma_{22}\cdot10^{-6}$	$\sigma_{13}\cdot10^{-3}$	$\sigma_{33}\cdot10^{-5}$
0,168	−4,03	0,83	$2{,}79\cdot10^{-3}$	$5{,}51\cdot10^{-2}$	0	0
0,178	−4,89	0,82	$-1{,}85\cdot10^{-3}$	$4{,}09\cdot10^{-2}$	0,43	−0,18
0,188	−5,57	0,8	$-5{,}47\cdot10^{-3}$	$2{,}71\cdot10^{-2}$	0,52	−0,34
0,198	−6,2	0,77	$-8{,}71\cdot10^{-3}$	$1{,}38\cdot10^{-2}$	0,43	−0,49
0,19867	−6,25	0,77	4,44	12,2	−0,46	−0,33
0,19933	−6,3	0,77	4,5	12,1	−0,61	−0,16
0,2	−6,34	0,77	4,56	12,1	0	0

В таблицах 2—4 приведено распределение по толщине перемещений u_1, u_3, напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{13}, σ_{33}, характеризующих возмущенное напряженно-деформированное состояние оболочки, в точке с координатами $x_1=l/2$, $x_2=0$ в моменты времени соответственно $t=0{,}15\cdot10^{-3}$ с; $t=0{,}5\times\times10^{-3}$ с; $t=0{,}225\cdot10^{-2}$ с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прохоров Б. Ф., Кобелев В. Н.* Трехслойные конструкции в судостроении. Л.: Судостроение, 1972. 334 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. *Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1977. 332 с.
4. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М. Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
7. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 344 с.
8. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища школа, 1985. 190 с.
9. *Кобелев В. Н., Потопахин В. А.* Динамика многослойных оболочек. Ростов н/Д, Изд-во РГУ, 1985. 160 с.
10. Методы расчета оболочек. Теория оболочек переменной жесткости. Т. 4./Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с.
11. *Филиппов И. Г., Егорычев О. А.* Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. М.: Машиностроение, 1983. 269 с.
12. *Филиппов И. Г.* О некоторых математических методах решения динамических задач линейной теории вязкоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 206.
13. *Мяченков В. И., Мальцев В. П.* Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. М.: Машиностроение, 1984. 280 с.
14. *Немиш Ю. Н., Блошко Н. М.* Напряженное состояние упругих цилиндров с выточками. Киев: Наук. думка, 1987. 176 с.
15. *Гузь А. Н., Немиш Ю. Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. Киев: Вища школа, 1982. 352 с.
16. *Немиш Ю. Н., Матяш Ю. И.* Напряженное состояние многослойных толстостенных поперечно гофрированных цилиндров // Прикл. механика. 1984. Т. 19. № 6. С. 29—34.

Москва, Ростов н/Д

Поступила в редакцию 12.II.1990