

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

Ю. Н. ТАМУРОВ

ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ВКЛЮЧЕНИЯМИ
В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ СЖИМАЕМОМ
МАТЕРИАЛЕ ЗАПОЛНИТЕЛЯ

Обобщается подход, изложенный применительно к задачам устойчивости и колебаний оболочек с отверстиями в [1]. На основе энергетического метода формулируются уравнения движения и естественные граничные условия для трехслойных пологих оболочек. Полагается, что поперечное обжатие заполнителя происходит по закону параболы [2]. Для i -го внутреннего контура вводятся параметры k_i , $k_i^{(m)}$, $k_i^{(c)}$ ($i=1, 2, \dots, N$), которые позволяют моделировать различные варианты неоднородности (прямоугольное отверстие или инородное включение) в нелинейно-упругом по [3] заполнителе. Для свободно опертой оболочки, используя процедуру Бубнова – Галеркина и метод малого параметра, получены рекуррентные системы уравнений относительно амплитуд прогибов срединных поверхностей слоев.

1. Моделирование неоднородности заполнителя. Рассматривается трехслойная пологая оболочка, конструкция которой изображена на фигуре. Перфорированный заполнитель заменяется сплошной моделью – аналогом [1], в котором параметры упругости G и массы m_3 претерпевают разрывы. Аналогично полагается для включений с параметрами G_{iB} и m_{iB} , заполняющих отверстия. Суммируя упругие и массовые параметры соответственно, и вводя обозначения $k_i=1-G_{iB}/G$, $k_i^{(m)}=1-m_{iB}/m_3$, для заполнителя с включениями записывается:

$$G_\Gamma = G\gamma_\Gamma(x; y), \quad m_3^* = m_3\gamma_m(x; y) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\Gamma(x; y) = 1 - \sum_{i=1}^N k_i [\Gamma_0(x-x_{1i}; y-y_{1i}) - \Gamma_0(x-x_{2i}; y-y_{1i}) - \\ - \Gamma_0(x-x_{1i}; y-y_{2i}) + \Gamma_0(x-x_{2i}; y-y_{2i})] \\ \gamma_m(x; y) = \gamma_\Gamma(k_i \rightarrow k_i^{(m)}) \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.2)$$

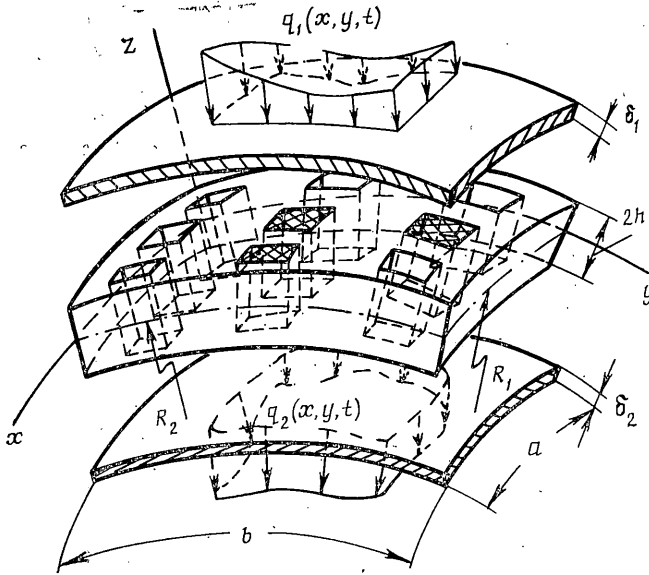
где $\Gamma_0(\dots; \dots)$ – единичная функция Хевисайда от двух переменных; x_{1i} , x_{2i} , y_{1i} и y_{2i} – координаты, фиксирующие контурные линии i -го отверстия.

С помощью параметров k_i и $k_i^{(m)}$ реализуется один из возможных случаев: 1) сплошная область – $k_i=k_i^{(m)}=0$; 2) отверстие – $k_i=k_i^{(m)}=1$; 3) включение – $k_i, k_i^{(m)} \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

2. Напряжения. Полагается, что в рассматриваемой оболочке напряжения определяются по законам [3], [4]:

$$h \leq z \leq h + \delta_1: \quad \sigma_x = B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y, \quad \sigma_y = B_{22}\epsilon_y + B_{12}\epsilon_x \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = B_{66}\epsilon_{xy}, \quad \tau_{xz} = B_{55}\epsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = B_{44}\epsilon_{yz} \\ -h - \delta_2 \leq z \leq -h: \quad \sigma_{\dots}^* = \sigma_{\dots} (B_{\dots} \rightarrow B_{\dots}^*; \epsilon_{\dots} \rightarrow \epsilon_{\dots}^*), \\ \tau_{\dots}^* = \tau_{\dots} (B_{\dots} \rightarrow B_{\dots}^*; \epsilon_{\dots} \rightarrow \epsilon_{\dots}^*) \end{aligned}$$



$$-h \leq z \leq h: \sigma_{3x} = 3K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G_\Gamma\gamma(\Psi_0^2)(\varepsilon_{3x} - \varepsilon_0) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{3y} = \sigma_{3x}(x \rightarrow y), \quad \sigma_{3z} = \sigma_{3x}(x \rightarrow z), \quad \tau_{3xy} = G_\Gamma\gamma(\Psi_0^2)\varepsilon_{3xy}$$

$$\tau_{3xz} = \tau_{3xy}(xy \rightarrow xz), \quad \tau_{3yz} = \tau_{3xy}(xy \rightarrow yz), \quad \chi(\varepsilon_0) = 1 + \chi_2\varepsilon_0^2$$

$$\gamma(\Psi_0^2) = 1 + \gamma_2\Psi_0^2, \quad K = \frac{2}{3}G_\Gamma(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)^{-1}$$

где $B \dots, B^*$, ν_0 — константы упругости; Ψ_0^2 — квадрат интенсивности деформаций сдвига; ε_0 — среднее удлинение; χ_2 и γ_2 — константы, характеризующие степень физической нелинейности материала; G_Γ — определяется выражениями (1.1), (1.2).

3. Вариационная формулировка задачи. На основе принципа Лагранжа записывается вариационное уравнение относительно полной энергии деформации оболочки, составленной из материалов п.2:

$$\begin{aligned} \delta A = & \int \int \left[\int_h^{h+\delta_1} (K_1 \delta \varepsilon_x + K_2 \delta \varepsilon_y + K_4 \delta \varepsilon_{xy} + K_5 \delta \varepsilon_{xz} + K_6 \delta \varepsilon_{yz}) + \right. \\ & + \int_{-h}^h (K_{1\Gamma} \delta \varepsilon_{3x} + K_{2\Gamma} \delta \varepsilon_{3y} + K_{3\Gamma} \delta \varepsilon_{3z} + K_{4\Gamma} \delta \varepsilon_{3xy} + K_{5\Gamma} \delta \varepsilon_{3xz} + K_{6\Gamma} \delta \varepsilon_{3yz}) + \\ & \left. + \int_{-h-\delta_2}^{-h} (K_1^* \delta \varepsilon_x^* + K_2^* \delta \varepsilon_y^* + K_4^* \delta \varepsilon_{xy}^* + K_5^* \delta \varepsilon_{xz}^* + K_6^* \delta \varepsilon_{yz}^*) \right] dz - \\ & - q_1 \delta w_1(x; y) - q_2 \delta w_2(x; y) \} dx dy = 0 \quad (3.1) \end{aligned}$$

где $w_1(x; y)$, $w_2(x; y)$ — прогибы срединных поверхностей наружных слоев. В (3.1) обозначено:

$$K_1 = 2(B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y), \quad K_2 = 2(B_{22}\varepsilon_y + B_{12}\varepsilon_x), \quad K_4 = 2B_{66}\varepsilon_{xy}$$

$$K_5 = 2B_{35}\varepsilon_{xz}, \quad K_6 = 2B_{44}\varepsilon_{yz}, \quad K_{\dots}^* = K_{\dots}(B_{\dots} \rightarrow B_{\dots}^*; \varepsilon_{\dots} \rightarrow \varepsilon_{\dots}^*)$$

$$K_{1\Gamma} = \gamma_\Gamma(x; y) K_{31} = 2\gamma_\Gamma(x; y) G[\lambda^\circ(\varepsilon_{3x} + \nu(\varepsilon_{3y} + \varepsilon_{3z})) + 2a_{11}\varepsilon_{3x}^3 +$$

$$\begin{aligned}
& +^1/3(a_{15}-4a_{17})(\varepsilon_{3y}^3+\varepsilon_{3z}^3+3\varepsilon_{3x}^2(\varepsilon_{3y}+\varepsilon_{3z}))+2a_{13}\varepsilon_{3x}(\varepsilon_{3y}^2+\varepsilon_{3z}^2)+ \\
& +a_{15}\varepsilon_{3y}\varepsilon_{3z}(2\varepsilon_{3x}+\varepsilon_{3y}+\varepsilon_{3z})+^8/9\gamma_2(\varepsilon_{3xy}^2+\varepsilon_{3xz}^2+\varepsilon_{3yz}^2)(2\varepsilon_{3x}-\varepsilon_{3y}-\varepsilon_{3z})] \\
& K_{2\Gamma}=\gamma_{\Gamma}(x; y)K_{32}, K_{3\Gamma}=\gamma_{\Gamma}(x; y)K_{33} \\
& K_{4\Gamma}=\gamma_{\Gamma}(x; y)K_{34}=2\gamma_{\Gamma}(x; y)G\varepsilon_{3xy}[1+^4/3(\varepsilon_{3xy}^2+\varepsilon_{3xz}^2+\varepsilon_{3yz}^2)+ \\
& +^16/9\gamma_2(\varepsilon_{3x}^2+\varepsilon_{3y}^2+\varepsilon_{3z}^2-\varepsilon_{3x}\varepsilon_{3y}-\varepsilon_{3x}\varepsilon_{3z}-\varepsilon_{3y}\varepsilon_{3z})] \\
& K_{5\Gamma}=\gamma_{\Gamma}(x; y)K_{35}, K_{6\Gamma}=\gamma_{\Gamma}(x; y)K_{36}, K_{32}=K_{31}(x\leftrightarrow y) \\
& K_{33}=K_{31}(x\leftrightarrow z), K_{35}=K_{34}(y\leftrightarrow z), K_{36}=K_{34}(x\leftrightarrow z) \\
& a_{11}=^1/6a_{15}+^4/3a_{17}, a_{13}=^1/2a_{15}+2a_{17}, a_{15}=^4/9(1+\nu_0)(1-2\nu_0)^{-1}\chi_2 \\
& a_{17}=^8/9\gamma_2, \lambda^{\circ}=1+(1-2\nu_0)^{-1}, \nu=\nu_0/(1-\nu_0)
\end{aligned}$$

4. Кинематико-деформационные соотношения. Рассматриваемая задача приводится к двумерной путем выбора законов распределения перемещений по толщине оболочки. Для наружных слоев, составленных из материалов с низкой сдвиговой жесткостью, перемещения представляются в виде аналогичном [5]:

$$\begin{aligned}
u(x; y; z) &= \sum_{i=1}^4 u_i(x; y) \lambda_i(z), & u^*(x; y; z) &= \sum_{i=1}^4 u_i(x; y) \lambda_i^*(z) \\
v(x; y; z) &= \sum_{i=1}^4 v_i(x; y) \lambda_i(z), & v^*(x; y; z) &= \sum_{i=1}^4 v_i(x; y) \lambda_i^*(z) \\
w(x; y) &= \sum_{j=1}^3 p_j w_j(x; y), & w^*(x; y) &= \sum_{j=1}^3 p_j^* w_j(x; y)
\end{aligned} \quad (4.1)$$

$$u_1(x; y) = u(x; y; h + \delta_1/2), \quad u_2(x; y) = u^*(x; y; -h - \delta_2/2)$$

$$u_3(x; y) = u_z(x; y; h + \delta_1/2), \quad u_4(x; y) = u_{z^*}(x; y; -h - \delta_2/2)$$

$$\lambda_1(z) = \lambda_2^*(z) = 1, \quad \lambda_3(z) = z - h - \delta_1/2, \quad \lambda_4^*(z) = z + h + \delta_2/2, \quad p_1 = p_2^* = 1$$

остальные $\lambda_i(z) = \lambda_i^*(z) = 0$, $p_j = p_j^* = 0$. Перемещения v_1 , v_2 и углы поворота v_3 , v_4 получаются заменой $u(x; y; \dots)$ на $v(x; y; \dots)$.

Тангенциальные перемещения в слое $-h \leq z \leq h$ записываются аналогично уточненному закону [4], а для прогибов $w(x; y; -h \leq z \leq h)$ принят квадратичный закон изменения по толщине [2].

Перемещения u_i , v_i и w_j в дальнейшем принимаются за определяющие. Используются условия сопряжения слоев $z = \pm h$ при отсутствии проскальзывания. Тогда для перемещений заполнителя записывается

$$\begin{aligned}
u(x; y; -h \leq z \leq h) &= \sum_{i=1}^4 u_i(x; y) a_i(z) + \sum_{j=1}^3 w_{j,x} h_2(z) c_j(z) \\
v(x; y; -h \leq z \leq h) &= \sum_{i=1}^4 v_i(x; y) b_i(z) + \sum_{j=1}^3 w_{j,y} h_2(z) c_j(z) \\
w(x; y; -h \leq z \leq h) &= \sum_{j=1}^3 c_j(z) w_j(x; y), \quad a_1(z) = 1 + \alpha_1(z)
\end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
a_2(z) &= -\alpha_2(z), \quad a_3(z) = -1/2 \delta_1 (1 + \alpha_2(z)), \quad a_4(z) = -1/2 \delta_2 \alpha_2(z) \\
b_i(z) &= a_i(\alpha_2 \rightarrow \alpha_3), \quad h_2(z) = z - h(1 + 2\alpha_2(z)), \quad h_6(z) = z - h(1 + 2\alpha_3(z)) \\
c_1(z) &= 1/2 z h^{-1} (1 + z/h), \quad c_2(z) = -1/2 z h^{-1} (1 - z/h) \\
c_3(z) &= 1 - (z/h)^2, \quad \alpha_2(z) = [\Phi_1(z) - \Phi_1(h)] / [\Phi_1(h) - \Phi_1(-h)] \\
\alpha_3(z) &= [\Phi_2(z) - \Phi_2(h)] / [\Phi_2(h) - \Phi_2(-h)]
\end{aligned}$$

где $w_3(x; y)$ — прогиб срединной поверхности заполнителя; $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — функции, зависящие от законов изменения напряжений τ_{3xz} и τ_{3yz} по толщине.

Соотношения деформации-перемещения

$$\varepsilon_x = u_{,x} - w_1/R_1, \dots, \varepsilon_{yz} = v_{,z} - w_{1,y}, \varepsilon_z = 0 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_x^* = u_{,x}^* - w_2/R_1, \dots, \varepsilon_{yz}^* = v_{,z}^* - w_{2,y}, \varepsilon_z^* = 0$$

$\varepsilon_{3x} = u_{,x}(x; y; -h \leq z \leq h) - w(x; y; -h \leq z \leq h)/R_1, \dots, \varepsilon_{3z} = w_{,z}(x; y; -h \leq z \leq h)$ где R_1, R_2 — радиусы кривизны поверхности $z=0$.

5. Уравнения движения и граничные условия. Из вариационного уравнения (3.1) с учетом (4.1) — (4.3) в силу независимости вариаций $\delta u_i, \delta v_i, \delta w_j$ получается система 11-и уравнений, которая дополняется инерционными и диссипативными членами

$$T_{1s}(K_{1,x}) + T_{1s}(K_{4,y}) - T_{4s}(K_5) = 0 \quad (5.1)$$

$$T_{2s}(K_{2,y}) + T_{2s}(K_{4,x}) - T_{5s}(K_6) = 0 \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
& T_{3r}(K_1)/R_1 + T_{3r}(K_2)/R_2 - T_{3r}(K_{5,x}) - T_{3r}(K_{6,y}) - \int_{-h}^h \{ [h_2(K_{31,x}\gamma_\Gamma + K_{31}\gamma_{\Gamma,x})_{,x} + \\
& + h_6(K_{32,y}\gamma_\Gamma + K_{32}\gamma_{\Gamma,y})_{,y} + (h_2 + h_6)(K_{34,x}\gamma_\Gamma + K_{34}\gamma_{\Gamma,x})_{,y}] c_r - c_{r,z} K_{33}\gamma_\Gamma - \\
& - (h_2 c_r)_{,z} (K_{35,x}\gamma_\Gamma + K_{35}\gamma_{\Gamma,x}) - (h_6 c_r)_{,z} (K_{36,y}\gamma_\Gamma + K_{36}\gamma_{\Gamma,y}) \} dz + \\
& + (m_1^* w_{1,tt} + c_1^* w_{1,t}) p_r + (m_2^* w_{2,tt} + c_2^* w_{2,t}) p_r^* + \\
& + 1/3 (m_3^* w_{3,tt} + c_3^* w_{3,t}) p_r^{**} = q_1(x; y; t) p_r + q_2(x; y; t) p_r^* \quad (5.3)
\end{aligned}$$

$$m_{1,2}^* = m_{1,2} + m_3^*/6, \quad c_{1,2}^* = c_{1,2} + c_3^*/6, \quad c_3^* = \gamma_c(x; y) c_3$$

$$\gamma_c(x; y) = \gamma_\Gamma(k_i \rightarrow k_i^{(c)}), \quad k_i^{(c)} = 1 - c_{iB}/c_3, \quad p_1^{**} = p_2^{**} = 0, \quad p_3^{**} = 1$$

$$(s=1, \dots, 4; r=1, 2, 3; i=1, 2, \dots, N)$$

где m_1, m_2, c_1, c_2 — массовые и диссипативные характеристики наружных слоев; c_3 и c_{iB} — диссипативные характеристики заполнителя и включения. Здесь для заполнителя принят линейный закон распределения тангенциальных перемещений по толщине.

В контурном интеграле, полученном из (3.1), содержатся все возможные варианты граничных условий

$$\begin{aligned}
& \oint \left\{ \sum_{s=1}^4 [T_{1s}(K_4) \delta u_s dx + T_{1s}(K_1) \delta u_s dy + T_{2s}(K_2) \delta v_s dx + T_{2s}(K_4) \delta v_s dy] + \right. \\
& + \sum_{r=1}^3 \left\{ 1/2 \int_{-h}^h (h_2 + h_6) c_r \gamma_\Gamma K_{34} dz (\delta w_{r,x} dx + \delta w_{r,y} dy) + \right. \\
& + \int_{-h}^h c_2 h_6 \gamma_\Gamma K_{31} dz \delta w_{r,x} dy + \int_{-h}^h c_r h_6 \gamma_\Gamma K_{32} dz \delta w_{r,y} dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{-h}^h (h_6 c_r)_{,z} \gamma_{\Gamma} K_{36}^{-1/2} (h_2 + h_6) c_r (K_{34,x} \gamma_{\Gamma} + K_{34} \gamma_{\Gamma,x}) - \right. \\
& - h_6 c_r (K_{32,y} \gamma_{\Gamma} + K_{32} \gamma_{\Gamma,y}) \Big] dz - T_{3r} (K_6) \Big\} \delta w_r dx + \left\{ \int_{-h}^h [(h_2 c_r)_{,z} \gamma_{\Gamma} K_{35} - \right. \\
& - 1/2 (h_2 + h_6) c_r (K_{34,y} \gamma_{\Gamma} + K_{34} \gamma_{\Gamma,y}) - h_2 c_r (K_{31,x} \gamma_{\Gamma} + K_{31} \gamma_{\Gamma,x}) \Big] dz - \\
& \left. - T_{3r} (K_5) \Big\} \delta w_r dy \Big\} = 0 \tag{5.4}
\end{aligned}$$

В уравнения (5.1) – (5.4) введены операторы

$$\begin{aligned}
T_{1s} (K...) &= \left[\int_h^{h+\delta_1} K... \lambda_s + \int_{-h}^h \gamma_{\Gamma} K_{3...} a_s + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K... \lambda_s^* \right] dz \\
T_{2s} (K...) &= T_{1s} (a_s \rightarrow b_s), \quad T_{3r} (K...) = T_{1s} (\lambda_s \rightarrow p_r; a_s \rightarrow c_r; \lambda_s^* \rightarrow p_r^*) \\
T_{4s} (K...) &= T_{1s} (\lambda_s \rightarrow \lambda_{s,z}; a_s \rightarrow a_{s,z}; \lambda_s^* \rightarrow \lambda_{s,z}^*), \quad T_{5s} (K...) = T_{4s} (a_{s,z} \rightarrow b_{s,z})
\end{aligned}$$

Граничные условия, которые следуют из (5.4) состоят из суммы линейной и тождественной ей нелинейной частей. Поэтому при выборе координатных функций, аппроксимирующих перемещения и углы поворота, достаточно удовлетворить линейной (определяющей) части граничных условий.

Например, для случая свободного опирания контура при $x = \text{const}$ из условий $\delta u_i \neq 0$, $\delta w_{j,x} \neq 0$, $\delta w_j = \delta w_{j,y} = \delta v_i = 0$ получается, что

$$T_{1s} (K_1) = 0, \quad \int_{-h}^h c_r h_2 \gamma_{\Gamma} K_{31} dz = 0, \quad w_j = w_{j,y} = v_i = 0$$

Линеаризируя эти выражения приходим к обычным граничным условиям

$$x - \text{const}: v_i = u_{i,x} = w_j = w_{j,x} = w_{j,xx} = 0 \quad (i=1, \dots, 4; j=1, 2, 3) \tag{5.5}$$

Для кромок $y = \text{const}$ необходима замена ($u_i \rightleftharpoons v_i$; $x \rightleftharpoons y$).

6. Определяющие уравнения для свободно опертой оболочки. Функции перемещений, удовлетворяющие условиям (5.5) и внешние силы аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned}
u_i(x; y; t) &= f_i(t) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad v_i(x; y; t) = f_{i+k}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \tag{6.1} \\
w_j(x; y; t) &= \xi_j(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad q_{1;2}(x; y; t) = q_{1;2}^*(t) q_{1;2}(x; y)
\end{aligned}$$

Наличие неоднородностей в материале заполнителя, характеризуемых функцией $\gamma_{\Gamma}(x; y)$ не позволяет исключить координатные функции непосредственно после подстановки (6.1) в систему (5.1) – (5.3). Используя для этого процедуру Бубнова – Галеркина, линеаризованная по тригонометрическим функциям система приводится к определяющим уравнениям относительно амплитуд. Принимая во внимание, что одинаковые индексы не могут повторяться более одного раза, после сокращения на величину $ab/4$ записывается

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^4 \left\{ f_i(t) \left(L_{1si} + L_{1si}^{(\gamma)} + \sum_{kj}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) L_{1shji} \right) + f_{i+k}(t) \left(L_{2si} + L_{2si}^{(\gamma)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{kj}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) L_{2shji} \right) \right\} + \sum_k^3 \xi_k(t) (L_{3sk} + L_{3sk}^{(\gamma)}) + \sum_{kjl}^3 \xi^k(t) \xi_j(t) \xi_l(t) (L_{3shji} + L_{3shjl}^{(\gamma)}) = 0 \tag{6.2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 \left\{ f_i(t) \left(L_{4si} + L_{4si}^{(\gamma)} + \sum_{kj}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) L_{4skji} \right) + f_{i+4}(t) \left(L_{5si} + L_{5si}^{(\gamma)} + \sum_{kj}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) L_{5skji} \right) \right\} + \sum_k^3 \xi_k(t) (L_{6sk} + L_{csh}^{(\gamma)}) + \sum_{kjl}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) \xi_l(t) (L_{6skjl} + L_{6skjl}^{(\gamma)}) = 0 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} & [(m_1 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{1,t}(t) + (c_1 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{1,t}(t)] p_r + [(m_2 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{2,t}(t) + \\ & + (c_2 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{2,t}(t)] p_r^{*+2/3} + (m_3 I_{7\Gamma} \xi_{3,t}(t) + c_3 I_{8\Gamma} \xi_{3,t}(t)) p_r^{*+*} + \sum_{i=1}^4 \left\{ f_i(t) (L_{7ri} + \right. \\ & \left. + L_{7ri}^{(\gamma)} + \sum_{kj}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) L_{7rhji} \right) + f_{i+4}(t) \left(L_{8ri} + L_{8ri}^{(\gamma)} + \sum_{kj}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) L_{8rhji} \right) \left. \right\} + \\ & + \sum_k^3 \xi_k(t) (L_{9rk} + L_{9rk}^{(\gamma)}) + \sum_{kjl}^3 \xi_k(t) \xi_j(t) \xi_l(t) (L_{9rhjl} + L_{9rhjl}^{(\gamma)}) = q_1(t) p_r + q_2(t) p_r^* \quad (6.4) \end{aligned}$$

$$L_{1si}^{(\gamma)} = L_{2si}^{(\gamma)} (\alpha_m \rightleftharpoons \beta_n; \nu \rightarrow 1; b_i \rightarrow a_i), \quad L_{2si}^{(\gamma)} = 2G (\alpha_m I_{2\Gamma} - \beta_n \lambda^{\circ} \nu N_{1\Gamma}) \int a_s(z) b_i(z) dz$$

$$L_{3sk}^{(\gamma)} = G I_{1\Gamma} \int a_s(z) \varepsilon_k^4 dz, \quad L_{4si}^{(\gamma)} = 2G (\beta_n I_{5\Gamma} - \alpha_m \lambda^{\circ} \nu I_{4\Gamma}) \int b_s(z) a_i(z) dz$$

$$L_{5si}^{(\gamma)} = L_{4si}^{(\gamma)} (\alpha_m \rightleftharpoons \beta_n; \nu \rightarrow 1; a_i \rightarrow b_i), \quad L_{csh}^{(\gamma)} = G I_{4\Gamma} \int b_s(z) \varepsilon_k^2 dz$$

$$L_{7ri}^{(\gamma)} = -2G I_{1\Gamma} \int c_r(z) a_{i,z}(z) dz, \quad L_{8ri}^{(\gamma)} = -2G I_{4\Gamma} \int c_r(z) b_{i,z}(z) dz$$

$$L_{9rk}^{(\gamma)} = -4/(ab) G \int c_r(z) (I_{1\Gamma} \varepsilon_k^5 + I_{4\Gamma} \varepsilon_k^6) dz$$

$$L_{3skjl}^{(\gamma)} = L_{3sh}^{(\gamma)} (\varepsilon_k^4 \rightarrow \Phi_{kjl}^4), \quad L_{6skjl}^{(\gamma)} = L_{6sh}^{(\gamma)} (\varepsilon_k^2 \rightarrow \Phi_{kjl}^2)$$

$$L_{9rhjl}^{(\gamma)} = L_{9ri}^{(\gamma)} (\varepsilon_k^5 \rightarrow \Phi_{kjl}^5; \varepsilon_k^6 \rightarrow \Phi_{kjl}^6)$$

$$q_{1;2}(t) = 4/(ab) q_{1;2}^*(t) \iint q_{1;2}(x; y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy$$

$$I_{0\Gamma} = 4/(ab) \iint \gamma_{\Gamma}(x; y) \sin^2 \alpha_m x \sin^2 \beta_n y dx dy,$$

$$I_{1\Gamma} = 2/(ab) \iint \gamma_{\Gamma,x}(x; y) \sin 2\alpha_m x \sin^2 \beta_n y dx dy$$

$$I_{2\Gamma} = 2/(ab) \iint \gamma_{\Gamma,y}(x; y) \cos^2 \alpha_m x \sin 2\beta_n y dx dy,$$

$$I_{3\Gamma} = 4/(ab) \iint \gamma_{\Gamma}(x; y) \cos^2 \alpha_m x \sin^2 \beta_n y dx dy$$

$$I_{4\Gamma} = I_{1\Gamma}(x \rightleftharpoons y; \alpha_m \rightleftharpoons \beta_n), \quad I_{5\Gamma} = I_{2\Gamma}(x \rightleftharpoons y; \alpha_m \rightleftharpoons \beta_n)$$

$$I_{6\Gamma} = I_{3\Gamma}(x \rightleftharpoons y; \alpha_m \rightleftharpoons \beta_n), \quad I_{7\Gamma} = I_{0\Gamma}(\gamma_{\Gamma} \rightarrow \gamma_m), \quad I_{8\Gamma} = I_{0\Gamma}(\gamma_{\Gamma} \rightarrow \gamma_c)$$

$$\varepsilon_k^4 = 2\lambda^{\circ} [\nu c_k, z(z) - (R_1^{-1} + \nu R_2^{-1}) c_k(z)]$$

$$\varepsilon_k^2 = \varepsilon_k^4 (R_1 \rightleftharpoons R_2), \quad \varepsilon_k^5 = -2\alpha_m c_k(z), \quad \varepsilon_k^6 = -2\beta_n c_k(z)$$

где a, b — размеры оболочки в плане; $\varepsilon_k^{1;2;5;6}$ и $\Phi_{kjl}^{1;2;5;6}$ — определяют нелинейно-упругие свойства и закон поперечного обжатия. Здесь интегрирование по z ведется от $-h$ до h , по x и y — от 0 до a и от 0 до b соответственно.

В (6.2)–(6.4) коэффициентами, содержащими импульсные функции при произведениях типа $f_i(t)\xi_k(t)\xi_j(t)$, пренебрегается. Остальные коэффициенты $L\dots$ представляют собой интегралы по слоям оболочки, учитывающие принятые механико-кинематические гипотезы. При этом в коэффициентах уравнений (6.2) интегралы $-h \leq z \leq h$ содержат выражения $I_{3\Gamma}$, а в уравнениях (6.3) и (6.4) выражения $I_{6\Gamma}$ и $I_{0\Gamma}$ соответственно.

Далее используется подход, аналогичный [6]. В правую часть уравнений (6.2), (6.3) переносятся выражения для амплитуд прогибов, после чего находится связь

$$f_i(t) = 1/\Delta \left[\sum_{h=1}^3 \xi_h(t) \Delta_i^h + \sum_{hjl}^3 \xi_h(t) \xi_j(t) \xi_l(t) \Delta_i^{hjl} \right] \quad (6.5)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{1si} + L_{1si}^{(\gamma)} & L_{2si} + L_{2si}^{(\gamma)} \\ L_{4si} + L_{4si}^{(\gamma)} & L_{5si} + L_{5si}^{(\gamma)} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

Определители $\Delta_i^h, \Delta_i^{hjl}$ следуют из Δ при замене i -го столбца на соответствующий столбец правой части.

С учетом (6.5) уравнения (6.4) принимают вид

$$\begin{aligned} & [(m_1 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{1,tt} + (c_1 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{1,t}] p_r + [(m_2 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{2,tt} + \\ & + (c_2 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{2,t}] p_r^{**} + \frac{2}{3} (m_3 I_{7\Gamma} \xi_{3,tt} + c_3 I_{8\Gamma} \xi_{3,t}) p_r^{**} + \sum_{h=1}^3 \Lambda_h^{(r)} \xi_h + \\ & + \sum_{hjl}^3 \Lambda_{hjl}^{(r)} \xi_h \xi_j \xi_l + \sum_{hijlmn}^3 \Lambda_{hijlmn}^{(r)} \xi_h \xi_j \xi_l \xi_m \xi_n = q_1(t) p_r + q_2(t) p_r^{**} \quad (r=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь $\Lambda^{(r)}$ — коэффициенты, которые зависят как от неоднородности, характеризующей импульсными функциями, так и от принятых в работе гипотез

$$\Lambda_k^{(r)} = 1/\Delta \sum_{i=1}^8 \Delta_i^k (L_{7ri} + L_{7ri}^{(\gamma)}) + L_{9rk} + L_{9rk}^{(\gamma)} \quad (k=1, 2, 3)$$

$$\Lambda_{hjl}^{(r)} = 1/\Delta \sum_{i=1}^8 \Delta_i^{hjl} (L_{7ri} + L_{7ri}^{(\gamma)}) + L_{9rhjl} + L_{9rhjl}^{(\gamma)} \quad (k=j=l=1, 2, 3)$$

$$\Lambda_{hijlmn}^{(r)} = 1/\Delta \sum_{i=1}^8 \Delta_i^{hijlmn} L_{7rnmni} \quad (k=j=l=m=n=1, 2, 3)$$

Остальные коэффициенты определяются аналогично.

Система уравнений (6.6) приводится к виду, удобному для практического использования. Амплитуды ξ_1, ξ_2, ξ_3 разлагаются по степеням малого физического параметра $\lambda = \gamma_2 G_{\Gamma}^{-2} K / (G_{\Gamma} + 3K)$ [3], после чего записываются (здесь Σ по $k=1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{10,tt} + (c_1 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{10,t} + \Sigma \Lambda_k^{(1)} \xi_{k0} = q_1(t) \\ & (m_2 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{20,tt} + (c_2 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{20,t} + \Sigma \Lambda_k^{(2)} \xi_{k0} = q_2(t) \\ & \frac{2}{3} m_3 I_{7\Gamma} \xi_{30,tt} + \frac{2}{3} c_3 I_{8\Gamma} \xi_{30,t} + \Sigma \Lambda_k^{(3)} \xi_{k0} = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$(m_1 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{1\mu, tt} + (c_1 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{1\mu, t} + \sum \Lambda_h^{(1)} \xi_{h\mu} = \Pi_{1\mu}(t) \quad (6.8)$$

$$(m_2 + m_3 I_{7\Gamma}/6) \xi_{2\mu, tt} + (c_2 + c_3 I_{8\Gamma}/6) \xi_{2\mu, t} + \sum \Lambda_h^{(2)} \xi_{h\mu} = \Pi_{2\mu}(t)$$

$${}^2/3 m_3 I_{7\Gamma} \xi_{3\mu, tt} + {}^2/3 c_3 I_{8\Gamma} \xi_{3\mu, t} + \sum \Lambda_h^{(3)} \xi_{h\mu} = \Pi_{3\mu}(t) \quad (\mu=1, 2, 3, \dots)$$

где μ — номер приближения в разложении по параметру.

В правой части системы (6.8) обозначено ($r=1, 2, 3$):

$$\Pi_{r\mu}^*(t) = -1/\lambda \left[\sum_{kjl} \Lambda_{kjl}^{(r)} \Phi_{\mu-1} + \sum_{kjlmn} \Lambda_{kjlmn}^{(r)} \Psi_{\mu-1} \right]$$

$$\Phi_0 = \xi_{h0} \xi_{j0} \xi_{t0}, \quad \Phi_1 = \xi_{h0} \xi_{j0} \xi_{t1} + \xi_{t0} \xi_{j0} \xi_{h1} + \xi_{h0} \xi_{t0} \xi_{j1}$$

$$\Phi_2 = \xi_{h0} \xi_{j0} \xi_{t2} + \xi_{t0} \xi_{j0} \xi_{h2} + \xi_{h0} \xi_{t0} \xi_{j2} + \xi_{j0} \xi_{h1} \xi_{t1} +$$

$$+ \xi_{h0} \xi_{j1} \xi_{t1} + \xi_{t0} \xi_{h1} \xi_{j1}, \quad \Phi_3, \Phi_4, \Phi \dots = R(\xi_{h0}, \dots, \xi_{t\dots}, \dots)$$

$$\Psi_0 = \Phi_0 \xi_{m0} \xi_{n0}, \quad \Psi_1 = \Phi_0 (\xi_{m0} \xi_{n1} + \xi_{m1} \xi_{n0}) + \Phi_1 \xi_{m0} \xi_{n0}$$

$$\Psi_2 = \Phi_0 (\xi_{m0} \xi_{n2} + \xi_{m1} \xi_{n1} + \xi_{m2} \xi_{n0}) + \Phi_1 (\xi_{m0} \xi_{n1} + \xi_{m1} \xi_{n0}) + \Phi_2 \xi_{m0} \xi_{n0}$$

$$\Psi_3, \Psi_4, \Psi \dots = R^*(\xi_{m0}, \dots, \xi_{n\dots}, \Phi_0, \dots, \Phi_3, \dots)$$

Частный случай. Рассматривается заполнитель для которого $k_i = k_i^{(m)} = k_i^{(c)} = 0$ ($i=1, 2, \dots, N$). Тогда интегралы от импульсных функций $I_{1\Gamma}; 2\Gamma; 4\Gamma; 5\Gamma = 0$, $I_{0\Gamma}; 3\Gamma; 6\Gamma; 7\Gamma; 8\Gamma = 1$ и уравнения (6.6) сводятся к полученным в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение, 1981. 191 с.
2. Рябенков Н. Г. К расчету клеевых соединений оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. № 12. С. 104–112.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
5. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вищ. шк., 1978. 159 с.
6. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщенной теории трехслойных пологих оболочек с учетом обжатия физически нелинейного заполнителя // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 12. С. 39–45.

Запорожье

Поступила в редакцию
13.X.1989