МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1991

УДК 539.3

КИМ ИН БОН

МЕТОД РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Исследуется метод решения задачи о произвольном упругопластическом нагружении оболочки с помощью пошагового метода и метода последовательных приближений.

Задача теории малых упругопластических деформаций оболочки проанализирована в [1], задача об оболочке в приращениях деформаций и напряжений при сложном нагружении рассматривалась в [2] и других работах [1].

1. Основные уравнения. Уравнение состояния [3] записывается в виде

$$\mathbf{e}^{\cdot}=A\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}+B\boldsymbol{\sigma} \tag{1.1}$$

$$A=\sin\vartheta/(\sigma_u L),\quad B=(v_u/\sigma_u)\cos\vartheta+(\sigma_u^{\cdot}/\sigma_u^2 L)\sin\vartheta$$

$$L\equiv -L_1(\vartheta,\sigma_u),\quad \sigma_u=\Psi(\vartheta,\sigma_u),\quad \vartheta=\arccos\boldsymbol{\sigma}^{\circ}\mathbf{e}^{\cdot\circ}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\circ}=\boldsymbol{\sigma}/\sigma_u,\quad \mathbf{e}^{\cdot\circ}=\mathbf{e}^{\cdot}/v_u,\quad v_u=({}^2/_3\varepsilon_{ij}^{\cdot}\varepsilon_{ij}^{\cdot})^{1/2}$$

Для удобства вычисления введем (h — толщина оболочки):

$$A^{\vee}=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}A\,dz,\qquad B^{\vee}=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}B\,dz \tag{1.2}$$

Учитывая несжимаемость материалов, получим следующие основные уравнения:

уравнение равновесия

$$D_0\Delta^2 w-h\Delta_R f=q+{}^1/_9h^3\Delta(\psi^{\vee}+D^{\vee}D)\Delta_+w \tag{1.3}$$

$$\Delta_R=k_2(\partial^2/\partial x^2)+k_1(\partial^2/\partial y^2),\quad \Delta(\ )\Delta_+w=(\partial^2/\partial x^2)\left[(\ )\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[(\ )\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(\ )\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

где $D_0={}^1/_9Eh^3$ — цилиндрическая жесткость, w — скорость прогиба оболочки, f — функция скоростей напряжений, q — скорость изменения поперечной нагрузки, $k_1=1/R_1$, $k_2=1/R_2$, R_1, R_2 — главные радиусы кривизн оболочки по направлениям x, y:

$$\psi^{\vee}=3G-E^{\vee},\quad E^{\vee}=1/A^{\vee},\quad D^{\vee}=B^{\vee}/A^{\vee}$$

$$D(\ )=\exp\left(-\int\limits_0^t D^{\vee}\,dt\right)\int\limits_0^t E^{\vee}\exp\int\limits_0^{\xi}D^{\vee}\,d\xi(\ )\,dt$$

[1] *Дао Зуй Бик.* Исследование краевой задачи локальной теории упругопластических процессов: Дис. д-ра физ.-мат. н. М., 1987. 218 с.

уравнение совместности

$$^1/_3\Delta^2 f/G+\Delta_R w=-\Delta(\chi^\vee+B^\vee B)\Delta_- f,\quad \chi^\vee={}^1/_9\psi^\vee/G^{-2}$$

$$B(\ )=\int\limits_0^t(\ )\,dt,\quad \Delta(\ )\Delta_- f=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(\ )\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]+$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left[(\ )\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(\ )\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]\qquad(1.4)$$

2. Метод решения. Метод решения уравнений (1.3) и (1.4) делится на три этапа.

1. Применение пошагового метода. Разобьем интервал времени $[0,T]$ на n равных промежутков

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_l<t_{l+1}<\ldots<t_n=T$$
$$t_l=\tau l,\quad \tau=T/n\qquad(2.1)$$

Для любого фиксированного $t=t_l$ уравнения (1.3) и (1.4) будут

$$D_0\Delta^2 w_l-h\Delta_R f_l=q_l+{}^1/_9h^3\Delta(\psi_l^\vee+D_l^\vee D_l)\Delta_+ w_l\qquad(2.2)$$
$$^1/_3\Delta^2 f_l/G+\Delta_R w_l=\Delta(\chi_l^\vee+B_l^\vee B_l)\Delta_- f_l,\quad f_l=f(t_l)$$

Дифференциальные операторы $\Delta(\ )\Delta_\pm$ имеют следующие свойства

$$\Delta(A_1\pm A_2)\Delta_\pm=\Delta A_1\Delta_\pm\pm\Delta A_2 A_\pm\qquad(2.3)$$
$$\Delta(\alpha A)\Delta_\pm=\alpha\Delta A\Delta_\pm,\quad \alpha\Delta^2=\Delta\alpha\Delta_\pm,\quad \alpha=\mathrm{const}$$

Для любой функции $f(t)$ в (2.2):

$$D_l f(t)=\exp\left(-\int\limits_0^{t_l}D^\vee\,dt\right)\int\limits_0^{t_l}E^\vee\exp\left(\int\limits_0^{\xi}D^\vee\,d\xi\right)f(t)\,dt\approx$$
$$\approx\exp\left(-\sum_{i=1}^{l}D_i^\vee\tau\right)\sum_{i=1}^{l}\left(E_i^\vee\exp\left(\sum_{j=1}^{i}D_j^\vee\tau\right)f_i\right)\tau=\qquad(2.4)$$
$$=\exp\left(-\sum_{i=1}^{l}D_i\tau\right)\sum_{i=1}^{l-1}\left(E_i^\vee\exp\left(\sum_{j=1}^{i}D_j^\vee\tau\right)f_i\right)\tau+$$
$$+\exp\left(-\sum_{i=1}^{l}D_i^\vee\tau\right)E_l^\vee\exp(D_l^\vee\tau)f_l\tau$$

Если выразим

$$H_l=\exp\left(-\sum_{i=1}^{l}D_i^\vee\tau\right)\sum_{i=1}^{l-1}\left(E_i^\vee\exp\left(\sum_{j=1}^{i}D_j^\vee\tau\right)f_i\right)\tau$$
$$\beta_l=\exp\left(-\sum_{i=1}^{l}D_i^\vee\tau\right)E_l^\vee\exp(D_l^\vee\tau)\tau\qquad(2.5)$$

то

$$D_l f(t)=H_l+\beta_l f_l\qquad(2.6)$$

$$B_l f(t)=\int\limits_0^{t_l}f(t)\,dt\approx\sum_{i=1}^{l}f_i\tau=B_l'+\tau f_l\qquad(2.7)$$

$$B_l' = \sum_{i=1}^{l-1} f_i\tau \tag{2.8}$$

на l-м шаге по времени $t, E_l^\vee, D_l^\vee$ определяются так $E_l^\vee = E(\sigma_{u(l)}, L_l, \boldsymbol{\sigma}^{\bullet}_{l-1}, \mathbf{e}^{\bullet}_{l-1})$, $D_l^\vee = D(\sigma_{n(l)}, L_l, \boldsymbol{\sigma}^{\bullet}_{l-1}, \mathbf{e}^{\bullet}_{l-1})$. На каждом интервале $[t_{l-1}, t_l)\sigma_u$ аппроксимируется законом $\sigma_{u(l)} = \Phi(\varepsilon_{u(l)})$, т. е. траектория нагружения аппроксимируется простыми нагружениями.

Учитывая (2.6), (2.7), получим в (2.2):

$$\Delta(\psi_l^\vee + D_l^\vee D_l)\Delta_+ w_l = \Delta(\psi_l^\vee + D_l^\vee \beta_l)\Delta_+ w_l + H_l^\vee$$

$$\Delta(\chi_l^\vee + B_l^\vee B_l)\Delta_- f_l = \Theta_l + \Delta(\chi_l^\vee + \tau B_l^\vee)\Delta_- f$$

$$H_l^\vee = {}^1/_9 h^3 \Delta(D_l^\vee H_l \Delta_+ w_{l-1}),\ \Theta_l = \Delta B_l' \Delta_- f_{l-1}$$

Поэтому можем записать (2.2) следующим образом

$$D_0\Delta^2 w - h\Delta_R f = Q + {}^1/_9 h^3 \Delta(\psi^\vee + D^\vee\beta)\Delta_+ w \tag{2.9}$$

$$ {}^1/_3 \Delta^2 f/G + \Delta_R w = -\Theta - \Delta(\chi^\vee + \tau B^\vee)\Delta_- f,\ Q = g + H^\vee$$

Индекс l здесь опускаем для удобства. На l-м шаге по времени Q, Θ известны. Пошаговым методом по времени $\boldsymbol{\sigma}^\bullet$, $\mathbf{e}^\bullet$, $\sigma_u^\bullet$, $e_u^\bullet$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{e}$, σ_u, e_u определяются следующим образом:

$$Y_{l+1} = Y_l + \tau Y_l^\bullet \tag{2.10}$$

$$Y = \{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}, e_u, \sigma_u\}, \qquad Y_l = \int_0^{t_l} Y^\bullet dt \approx \sum_{i=1}^{l} Y_i^\bullet \tau$$

Если известны $\mathbf{e}_l^\bullet$, $\mathbf{e}_l$, $\boldsymbol{\sigma}_l^\bullet$, $\boldsymbol{\sigma}_l$, то можно из (2.10) найти $\mathbf{e}_{l+1}$, $\boldsymbol{\sigma}_{l+1}$. При этом на $(l+1)$-м шаге $\mathbf{e}^\bullet_{l+1}$, $\boldsymbol{\sigma}^\bullet_{l+1}$ определяются из соотношения

$$\boldsymbol{\sigma}_{l+1} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{l+1} D_i^\vee \tau\right) \sum_{i=1}^{l+1} E_i^\vee \exp\left(\sum_{j=1}^{i} D_j^\vee \tau\right) \mathbf{e}_i^\bullet \tau$$

2. Применение метода последовательных приближений. Для любых фиксированных x_0, y_0 уравнения (2.9) имеют эллиптический вид, если

$$d_1 = D_0 - {}^1/_9 h^3 (\psi^\vee(x_0, y_0) + D^\vee(x_0, y_0)\beta(x_0, y_0)) \neq 0$$

$$d_2 = {}^1/_3 G^{-1} + (\chi^\vee(x_0, y_0) + \tau B^\vee(x_0, y_0)) \neq 0$$

Для решения уравнений (2.9) воспользуемся следующей схемой [4]:

$$M^\wedge \frac{w^{n+1} - w^n}{\alpha} = Q - L_1^\wedge(w^n, f^n), \qquad M^\wedge \frac{f^{n+1} - f^n}{\alpha} = \Theta - L_2^\wedge(w^n, f^n) \tag{2.11}$$

$$L_1^\wedge(w, f) = D_0\Delta^2 w - h\Delta_R f - {}^1/_9 h^3 \Delta(\psi^\vee + D^\vee\beta)\Delta_+ w \tag{2.12}$$

$$L_2^\wedge(w, f) = {}^1/_3 G^{-1}\Delta^2 f + \Delta_R w + D(\chi^\vee + \tau B^\vee)\Delta_- f$$

где α — итерационный параметр, а M соответствует либо Δ^2, либо $-\Delta$.

Рассмотрим теперь сходимость (2.11), т. е. найдем такой параметр α, при котором (2.11) сходится. Здесь, конечно, трудно точно определить α, потому что в эти уравнения входят неизвестные. Но α можно определить по нормам с учетом свойств уравнения состояния. Для пластинки в (2.12) $\Delta_R f = 0$, $\Delta_R w = 0$. При этом $L_1^\wedge(w, f) = L_1^\wedge(w)$, $L_2^\wedge(w, f) = L_2^\wedge(f)$. Для первого уравнения (2.11) [4]:

$$0<\alpha\leqslant 2/(\gamma_1+\gamma_2) \tag{2.13}$$

$$\gamma_1=\sup_w\frac{(L_1\hat{}(w,w))}{(M\hat{}(w,w))},\qquad \gamma_2=\inf_w\frac{(L\hat{}(w,w))}{M\hat{}(w,w)}$$

Здесь $L_1\hat{}$, $L_2\hat{}$ являются положительно определенными при $D_0-{}^1/_9h^3(\psi\check{}+D\check{}\beta)>0$. Если принять $M\hat{}=\Delta^2$, то

$$(L_1\hat{}w,\ w)\leqslant C_1(\Delta^2 w,\ w)$$

$$C_1=\sup_{\sigma_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot}}\left\{D_0-\frac{h^3}{9}(\psi\check{}+D\check{}\beta)\right\}>0$$

Следовательно

$$\gamma_1=\sup_w\frac{(L_1\hat{}w,w)}{(\Delta^2 w,w)}=C_1\frac{(\Delta^2 w,w)}{(\Delta^2 w,w)}=C_1 \tag{2.14}$$

С другой стороны

$$(L_1\hat{}w,\ w)\geqslant C_2(\Delta^2 w,\ w) \tag{2.15}$$

$$C_2=\inf_{\sigma_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot}}\left\{D_0-\frac{h^3}{9}(\psi+D\beta)\right\}>0$$

$$\gamma_2=\inf_w\frac{(L_1\hat{}w,w)}{(\Delta^2 w,w)}=C_2\frac{(\Delta^2 w,w)}{(\Delta^2 w,w)}=C_2$$

Из (2.14), (2.15) получим следующее условие сходимости

$$0<\alpha\leqslant 2/(C_1+C_2) \tag{2.16}$$

Аналогично можно определить α для второго уравнения (2.11).

Рассмотрим случай $\Delta_R w\neq 0$, $\Delta_R f\neq 0$, т. е. оболочку, а не пластинку. Если $\Delta_R f=k_2\sigma_2^{\cdot}+k_1\sigma_1^{\cdot}=k_2p_2+k_1p_1$ (здесь p_1, p_2 — скорости внешних продольных сил), то эта проблема сводится к случаю пластинки.

Рассмотрим общий случай. Подставляя $\boldsymbol{\sigma}=D\mathbf{v}$ в (1.1), получим $\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}=D\check{}\mathbf{v}$, $D\check{}=E\check{}-D\check{}D$, откуда следует $\sigma_{ij}^{\cdot}=D\check{}(v_{ij0}+z\partial^2 w/\partial x_i\partial x_j)$. Если пренебречь деформацией срединной поверхности v_{ij0}, то

$$\sigma_{ij}^{\cdot}=D\check{}(z\partial^2 w/\partial x_i\partial x_j)$$

Если $\partial^2 w/\partial x^2\geqslant 0$, $\partial^2 w/\partial y^2\geqslant 0$, то

$$k_2\sigma_2^{\cdot}+k_1\sigma_1^{\cdot}=k_2D\check{}(z\partial^2 w/\partial y^2)+$$
$$+k_1D\check{}(z\partial^2 w/\partial x^2)\geqslant -{}^1/_2hD_0(k_1\partial^2 w/\partial x^2+k_2\partial^2 w/\partial y^2)$$

$$D_0=\sup_{\sigma_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot}}D\check{}>0 \tag{2.17}$$

Учитывая (2.17), получим

$$L_1\hat{}(w,\ f)=\Delta^2[D_0-{}^1/_9h^3(\psi\check{}+D\check{}\beta)]\Delta_+w-h\Delta_R f\leqslant$$
$$\leqslant\Delta[D_0-{}^1/_9h^3(\psi\check{}+D\check{}\beta)]\Delta_+w+{}^1/_2h^2D_0k\Delta w=L_1\hat{}'(w)$$

$$k=\max\{k_1,\ k_2\} \tag{2.18}$$

С другой стороны

$$k_2\sigma_2^{\cdot}+k_1\sigma_1^{\cdot}=k_2D\check{}(z\partial^2 w/\partial y^2)+k_1D\check{}(z\partial^2 w/\partial x^2)\leqslant hkD_0\Delta w \tag{2.19}$$

Из этого и определения $L_1\hat{}(w,\ f)$:

$$L_1\hat{}(w,\ f)\geqslant\Delta[D_0-{}^1/_9h^3(\psi+D\beta)]\Delta_+w-hkD_0\Delta w=L_1\hat{}''(w) \tag{2.20}$$

Следовательно, в этом случае

$$\gamma_1=\frac{(L_1^{\wedge\prime}w,w)}{(\Delta^2w,w)}=C_1\frac{(\Delta^2w,w)}{(\Delta^2w,w)}-\frac{h^2}{2}D_0k\frac{(-\Delta w,w)}{(\Delta^2w,w)} \tag{2.21}$$

По неравенству Фридрихса [5]:

$$(\Delta^2w,w)=\int\limits_F\left[\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)^2\right]dF\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_F\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dF=\varepsilon_0(-\Delta w,w)$$

откуда примем $(-\Delta w,\ w)/(\Delta^2 w,\ w)=1/\varepsilon_0$. Учитывая (2.21), получим

$$\gamma_1=C_1+{}^1/{}_2h^2D_0k/\varepsilon_0 \tag{2.22}$$

$$\gamma_2=\frac{(L_1^{\wedge\prime\prime}w,w)}{(\Delta^2w,w)}=C_2\frac{(\Delta^2w,w)}{(\Delta^2w,w)}-h^2D_0k\frac{(-\Delta w,w)}{(\Delta^2w,w)}=C_2-h^2D_0k/\varepsilon_0 \tag{2.23}$$

Аналогично для второго уравнения можно определить α. На каждом n-м шаге итерационного процесса решается линейное уравнение вида

$$\begin{gathered}M^\wedge w^{n+1}=M^\wedge w^n-\alpha[L_1^\wedge(w^n,\ f^n)-Q]\\ M^\wedge f^{n+1}=M^\wedge f^n-\alpha[L_2^\wedge(w^n,\ f^n)+\Theta]\end{gathered} \tag{2.24}$$

где $M^\wedge$ соответствует или Δ^2, или $-\Delta$. Здесь правая часть известна на каждом шаге. На n-м шаге $\psi^\vee$, $D^\vee$, $E^\vee$, $\chi^\vee$, которые входят в $L_1^\wedge$, $L_2^\wedge$ как неизвестные, определяются следующим образом

$$\psi_l^{\vee n}=3G-E_l^{\vee n},\quad E_l^{\vee n}=E^\vee(\sigma_{u,\ (l)}^n,\ L_l^n,\sigma_{l-1}^{\cdot n-1},\ e_{l-1}^{\cdot n-1})$$

$$D_l^{\vee n}=D^\vee(\sigma_{u,\ (l)}^n,\ L_l^n,\ \sigma_{l-1}^{\cdot n-1},\ e_{l-1}^{\cdot n-1}),\ \chi_l^{\vee n}=\psi_l^{\vee n}/(9G^2)$$

3. Применение известных методов теории упругости. Для решения линейных уравнений (2.24) n-го шага можно применить различные известные методы теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Бабамурадов К. Ш., Ильюшин А. А., Кабулов В. К.* Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент: ФАН, 1987. 288 с.
3. *Ленский В. С., Ленский Э. В.* Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 111—115.
4. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1981. 343 с.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Сев. Корея

Поступила в редакцию
22.III.1991