МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 539.3

А. Х. БАРАОВ, Б. Н. СОКОЛОВ

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ ЗОНТИЧНОГО ТИПА

При проектировании отражающих поверхностей (антенн, зеркал) больших размеров существенную роль играет обеспечение высокой точности конструкции при ее малом весе и простоте изготовления. В качестве критерия точности в радиотехнике рассматривается среднеквадратичное отклонение рабочей поверхности антенны от параболоида вращения. Представляет интерес оценка предельных возможностей различных типов конструкций с точки зрения этого критерия и выбор наилучшей из них. В работе рассмотрена математическая модель конструкции зонтичного типа и найдена предельно достижимая точность отражающей поверхности, ей соответствующей. Статья продолжает исследования различных способов оптимальной аппроксимации параболоида вращения поверхностью пленок и мягких оболочек [1–3].

1. Постановка задачи. Рассматривается математическая модель антенны зонтичного типа [4], рабочая поверхность которой в раскрытом состоянии представляет собой натянутое на каркас сетеполотно. Отражающая поверхность определяется профилем дуг каркаса, их количеством и компонентами тензора натяжения сетеполотна. Необходимо подобрать профиль дуг каркаса и компоненты натяжения сетеполотна так, чтобы наилучшим образом приблизить рабочую поверхность к параболоиду вращения с заданным фокусным расстоянием.

Рассмотрим анизотропную мембрану, находящуюся в равновесии под действием приложенных на бесконечности заданных сил N_x, N_y, T. Прямоугольную систему координат O_{xy} всегда можно выбрать так, чтобы сдвиговые силы обратились в нуль, поэтому в дальнейшем будем полагать $T=0$. В результате прогибов, заданных на границе Γ некоторой области Ω мембрана отклонится от нейтрального положения. В случае $u\ll l$, т. е. когда прогиб мал по сравнению с характерным размером области Ω, уравнение равновесия мембраны принимает вид

$$N_x\partial^2u/\partial x^2+N_y\partial^2u/\partial y^2=0 \qquad (1.1)$$

Требуется определить прогиб на границе $u(x,\ y)|_\Gamma=u_0(x,\ y)$ обеспечивающий минимум квадратичного функционала

$$\Phi(u_0)=\iint\limits_\Omega [u(x,y)-f(x,y)]^2\,d\Omega \qquad (1.2)$$

где $f(x,\ y)$ — заданная функция.

2. Решение. Замена переменных $x'=x$, $y'=(N_xN_y^{-1})^{1/2}y$ переводит уравнение равновесия анизотропной мембраны (1.1) в уравнение Лапласа для области Ω', которая получается в результате растяжения (сжатия) области Ω в направлении оси ординат в $(N_xN_y^{-1})^{1/2}$ раз. Сохраняя прежние обозначения для новых переменных и новой области, будем в дальнейшем работать с уравнением Лапласа.

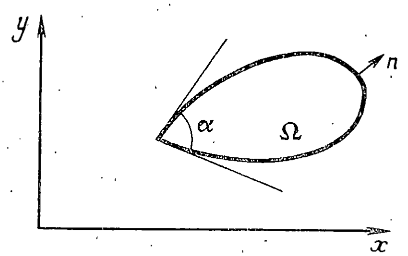
Допустим, что заданы прогибы $u(x, y)|_\Gamma=u_0(x, y)$ на границе Γ новой области Ω. Тогда имеем задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0, \quad u|_\Gamma=u_0 \tag{2.1}$$

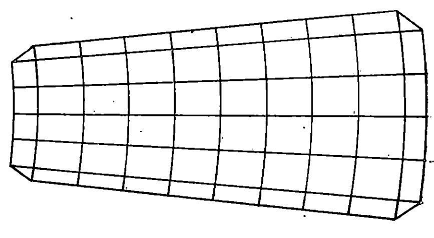
Приближенное решение задачи Дирихле может быть получено прямым методом граничных интегральных уравнений, согласно которому задача (2.1) сводится к следующему интегральному уравнению [5]:

$$(2\pi)^{-1}\alpha(x,y)u(x,y)+\fint_\Gamma u(\xi,\eta)\psi(x,y,\xi,\eta)d\Gamma=\fint_\Gamma v(\xi,\eta)\varphi(x,y,\xi,\eta)d\Gamma \tag{2.2}$$

где $\alpha(x, y)$ — угол между левосторонней и правосторонней касательными в граничной точке x, y, $\varphi=(2\pi)^{-1}\ln(R^{-1})$, $\psi=(2\pi)^{-1}\partial\ln(R^{-1})/\partial n$, $R=$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2}$, перечеркнутый знак интеграла означает его главное значение.

Неизвестной величиной в уравнении (2.2) является нормальная производная $v=\partial u/\partial n$, n — внешняя нормаль к границе области Ω (фиг. 1). После решения интегрального уравнения прогиб в любой внутренней области Ω находится простым интегрированием вдоль границы

$$u(x,y)=\int_\Gamma v(\xi,\eta)\varphi(x,y,\xi,\eta)d\Gamma-\int_\Gamma u(\xi,\eta)\psi(x,y,\xi,\eta)d\Gamma \tag{2.3}$$

Для нахождения приближенного решения интегрального уравнения (2.2) граница области разбивается на n прямолинейных отрезков, на каждом из которых прогиб берется постоянной величиной. Дискретный аналог интегрального уравнения (2.2):

$$^1/_2u_i+\psi_{ij}u_j=\varphi_{ij}v_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2.4}$$

$$\varphi_{ij}=\fint_{\Gamma_j}\varphi(x_i,y_i,\xi,\eta)d\Gamma, \qquad \psi_{ij}=\fint_{\Gamma_j}\psi(x_i,y_i,\xi,\eta)d\Gamma$$

где x_i, y_j — координаты середины i-го отрезка Γ_i.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (2.4) представим в виде

$$v_i=a_{ij}u_j, \quad a_{ij}=\varphi_{ik}^{-1}(^1/_2\delta_{kj}+\psi_{kj}) \tag{2.5}$$

Приближенное значение прогиба в любой внутренней точке области Ω получаем из (2.3) с учетом (2.5):

$$u(x,\ y)=(a_{ji}\varphi_j(x,\ y)-\psi_i(x,\ y))u_i=\chi_i(x,\ y)u_i \tag{2.6}$$

$$\varphi_i(x,y)=\int_{\Gamma_i}\varphi(x,y,\xi,\eta)d\Gamma, \qquad \psi_i(x,y)=\int_{\Gamma_i}\psi(x,y,\xi,\eta)d\Gamma$$

$$\chi_i(x,\ y)=a_{ji}\varphi_j(x,\ y)-\psi_i(x,\ y)$$

Теперь мы можем приступить к минимизации исходного функционала (1.2). Подставляя (2.6) в подынтегральное выражение в правой части (1.2) и интегрируя, получаем вместо функционала функцию многих переменных

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Omega_{ik} u_i u_k - 2\theta_i u_i + \text{const}$$

$$\Omega_{ik} = \iint_\Omega \chi_i(x, y) \chi_k(x, y) d\Omega$$

$$\theta_i = \iint_\Omega \chi_i(x, y) f(x, y) d\Omega, \qquad \text{const} = \iint_\Omega f^2(x, y) d\Omega$$

Условие минимума функции $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$:

$$\partial\Phi/\partial u_i = \Omega_{ik} u_k - \theta_i = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2.7}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (2.7) завершает приближенную минимизацию исходного функционала (1.2).

3. Пример. В качестве примера рассмотрим изотропную мембрану в кольцевом секторе с углом раствора $\gamma=\pi/12$, внутренним радиусом $r=6$ м. и внешним радиусом $R=10$ м. Пусть задан параболоид вращения с фокусным расстоянием $p=12$ м.

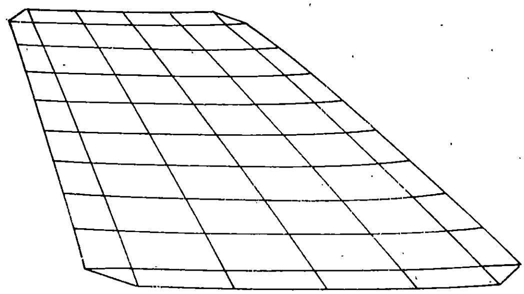
$$f(x, y) = (R^2 - x^2 - y^2)/4p \tag{3.1}$$

Требуется выбором граничного прогиба мембраны минимизировать среднеквадратичное отклонение мембраны от поверхности параболоида.

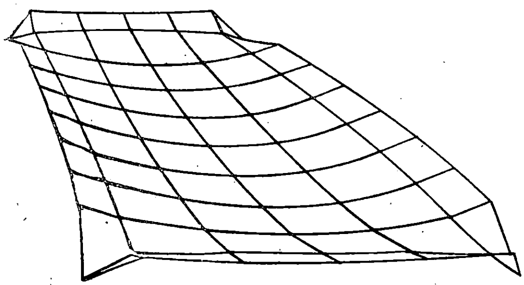
На фиг. 2 представлено разбиение границы кольцевого сектора на 28 прямолинейных отрезков и соответствующая такому разбиению сетка, выполненная на ЭВМ. На фиг. 3 изображена оптимальная форма поверхности мембраны, рассчитанная с помощью изложенного выше метода. Максимальное отклонение рассчитанной поверхности от параболоида вращения не превышает 0,032 м. Такое малое расхождение двух поверхностей трудно заменить визуально, поэтому на фиг. 4 дана увеличенная в десятикратном размере разность между поверхностями мембраны и параболоида.

В приведенном примере на вариации граничных прогибов накладывалось одно ограничение, а именно, прогибы вдоль каждой из дуг кольцевого сектора полагались постоянными.

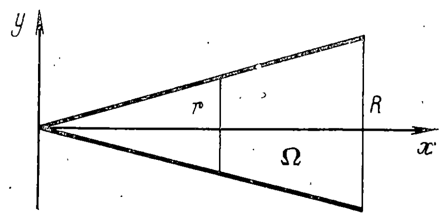
4. Предельная точность. Рабочая поверхность антенны зонтичного типа в раскрытом состоянии имеет в каждой точке седлообразную форму, т. е. по меридиану она выпукла, а по окружности — вогнута. А поскольку параболоид есть двояковыпуклая поверхность, ясно, что наилучшее приближение параболоида достигается в предельном случае, когда кривизна мембраны в окружном направлении стремится к нулю. Другими словами, идеальным является анизотропная мембрана, сила натяжения которой в окружном направлении стремится к бесконечности по отношению к силе меридионального натяжения. Но на характер натяжения сетеполотна накладываются некоторые ограничения, связанные с прочностными и структурными свойствами сетки, и с необходимостью исключить образование ряби при натяжении сетки. Тем не менее задача оптимизации формы анизотропной мембраны в идеальном предельном случае представляет интерес. Дело в том, что этот предельный случай является элементарным и допускает точное аналитическое решение, которое может быть использовано как для тестирования вычислительной процедуры, так и для оценки достоверности получаемой экспериментальным путем величины среднеквадратичного отклонения поверхности сетки от параболоида. В конце статьи приводится пример подобного тестирования. Для упомянутого предельного случая анизотропной мембраны имеем $N_x N_y^{-1} \to 0$.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Возьмем, например, в качестве области Ω равнобедренную трапецию (фиг. 5). Пусть приближаемая поверхность есть тот же параболоид вращения (3.1).

Если $N_x N_y^{-1}=0$, то из уравнения равновесия (1.1) следует $\partial^2 u/\partial y^2=0$, т. е. искомая функция не зависит от y (ввиду ее симметрии по y). Таким образом функционал (1.2) принимает вид

$$\Phi=\iint\limits_{\Omega}\left[u(x)-\frac{R^2-x^2-y^2}{4p}\right]^2 d\Omega \tag{4.1}$$

Введем обозначение

$$u_*(x)=u(x)-(R^2-x^2)/4p \tag{4.2}$$

Функционал (4.1) перепишем в виде

$$\Phi=\iint\limits_{\Omega}\left[u_*(x)+\frac{y^2}{4p}\right]^2 dx\,dy$$

Интегрирование по y дает

$$\Phi=2\int\limits_r^R x\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left[u_*^2(x)+x^2u_*(x)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)(6p)^{-1}\right]dx+\mathrm{const}$$

Проварьировав последний функционал, получаем

$$u_*(x)=-x^2\operatorname{tg}^2(\gamma/2)/12p \tag{4.3}$$

И, наконец, из (4.2) и (4.3) находим поверхность мембраны, доставляющую минимум функционалу (4.1):

$$u(x)=[3(R^2-x^2)-x^2\operatorname{tg}^2(\gamma/2)](12p)^{-1}$$

Среднеквадратичное отклонение найденной поверхности от параболоида вращения

$$\sigma = \left[\Omega^{-1} \iint\limits_{\Omega} \left[3y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2 (12p)^{-2}\, d\Omega\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

Вычисление (4.4) не представляет труда

$$\sigma = R^2 \operatorname{tg}^2 (\gamma/2)\, [1 + (r/R^2) + (r/R)^4]^{1/2} / 6p (15)^{1/2} \tag{4.5}$$

Полученное значение σ — предельная (неулучшаемая) точность для анизотропной мембраны.

В [6] описывается космическая антенна рассматриваемого типа диаметром 15 м и фокусным расстоянием параболоида 9,32 м. Поверхность сетки разделена на 24 клина. Из упомянутой статьи не ясно, какой мембраной — изотропной или анизотропной — производилось моделирование сетеполотна. Для среднеквадратичной погрешности формы поверхности, рассчитанной методом конечных элементов, авторы приводят значение $\sigma = 0{,}18$ см, что в два с лишним раза меньше значения, получаемого по формуле (4.5) для предельно достижимой точности подобных антенн. Это говорит о том, что к численным результатам [6] следует относиться, по крайней мере, критически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banichuk N. V., Larichev A. D.* Optimal design problems for curvilinear shallow elements of structures // Optimal contr., applic. and methods, 1984. V. 5. N 3. P. 197–205.
2. *Соколов Б. Н.* Оптимизация формы поверхности анизотропной пленки.// Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 185–186.
3. *Иванова В. Ф., Соколов Б. Н.* Об оптимальной форме пологой мягкой осесимметричной оболочки. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 160–166.
4. *Гряник М. В., Ломан В. И.* Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 71 с.
5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
6. *Белвин У. К., Эдигхоффер Г. Г., Херштром К. Л.* Квазистатическое регулирование формы космической антенны диаметром 15 м. // Аэрокосмич. техника. 1990. № 2. С. 60–69.

Москва

Поступила в редакцию 23.I.1990