МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1991

УДК 539.37

А. А. ПОЗДНЯКОВ

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В МЯГКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрена плоская задача о равновесии сыпучей среды, заключенной в мембрану, на горизонтальной поверхности. Предполагается, что внутри объема среды реализуется предельное напряженное состояние с семействами прямолинейных характеристик. Построена замкнутая система уравнений для определения основных параметров равновесного состояния. Получены аналитические решения, позволяющие найти форму, длину и натяжение оболочки как функции погонного веса среды. Решение описывает активное и пассивное состояния среды, а также случай заполнения оболочки жидкостью.

1. Рассмотрим помещенную на горизонтальную поверхность механическую систему «сыпучая среда в оболочке». Требуется определить при заданных свойствах элементов системы размеры и натяжение оболочки. Математическая модель строится с учетом следующих допущений: оболочка цилиндрическая, длинная, безмоментная, невесомая; для напряженного состояния среды во всем объеме выполняется условие предельного равновесия в форме Кулона.

На фиг. 1 показаны: симметричное поперечное сечение системы; фиксированная (z, y) и естественная (s, n) системы координат; длина дуги s отсчитывается от полюса оболочки 0. Вводятся обозначения: H, Y — габаритные размеры сечения; l — полупериметр сечения; $2a$ — размер сечения поверхности контакта оболочки с основанием; γ, $2G$, φ — удельный и погонный веса и угол внутреннего трения сыпучей среды (при $\varphi=0$ — жидкости); T — натяжение оболочки; θ — отклонение касательной к оболочке от горизонтали; p_0 — добавочное давление внутри объема, возникающее в результате обжатия среды растянутой оболочкой.

Дифференцирование по координате s обозначается точкой над соответствующей переменной. Другие обозначения и выбор знаков ясны из фиг. 2, где приведены схемы нагрузок, действующих на элементы среды (I) и оболочки (II) в активном (a) и пассивном ($б$) состояниях (внешнее давление отсутствует). Сжимающие нормальные напряжения и давление принимаются положительными. Касательные напряжения на поверхности оболочки считаются положительными, если совпадают по направлению с координатной осью s.

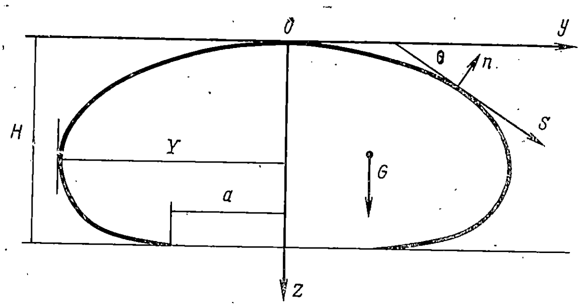
Система разрешающих уравнений задачи описывает форму оболочки

$$\dot{y}=\cos\theta,\quad \dot{z}=\sin\theta \tag{1.1}$$

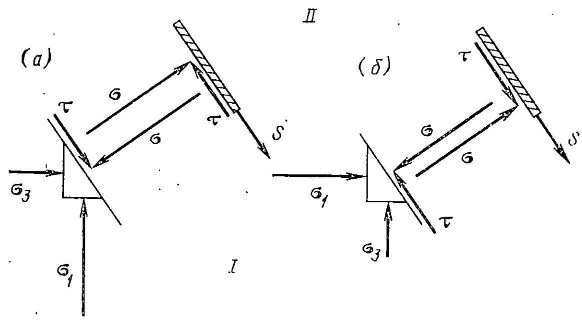
и ее равновесие [1]:

$$\dot{T}=-\tau,\quad T\dot{\theta}=\sigma \tag{1.2}$$

Связь геометрических и силовых характеристик устанавливается следующим предположением. Допустим, что в среде реализуется предельное напряженное состояние по схеме Рэнкина [3] с семействами прямоли-



Фиг. 1



Фиг. 2

нейных характеристик, на которых выполняется условие Кулона, причем главные площадки ориентированы горизонтально и вертикально. Главные напряжения на этих площадках σ_1 и σ_3 ($\sigma_1 > \sigma_3$) в зависимости от состояния среды задаются в виде (активное — первая строка, пассивное — вторая):

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = p_0 + \gamma z, \quad \sigma_3 = k_- \sigma_1 \\ &\sigma_3 = p_0 + \gamma z, \quad \sigma_1 = k_+ \sigma_3 \end{aligned} \qquad (1.3)$$

где первыми указаны вертикальные напряжения, а $k_\pm = \operatorname{tg}^2(^1/_4\pi + ^1/_2\varphi)$ — коэффициент давления. В дальнейшем для единообразия выкладок удобно активное состояние среды задавать формальным приписыванием углу трения отрицательного значения и использовать безиндексный коэффициент давления

$$k = \operatorname{tg}^2(^1/_4\pi + ^1/_2\varphi) \qquad (1.4)$$

При $k=1$ получается соответствующая задача гидростатики.

Напряжения σ и τ в (1.2) на площадке с углом наклона θ определяются стандартным образом через σ_1 и σ_3 по соответствующему кругу Мора

$$\sigma = ^1/_2(\sigma_1 + \sigma_3) - ^1/_2(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta, \quad \tau = ^1/_2(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta \qquad (1.5)$$

С учетом (1.3)—(1.5) система уравнений (1.1), (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} &T^{\bullet} = (p_0 + \gamma z)(1-k)\sin\theta\cos\theta \\ &T\theta^{\bullet} = (p_0 + \gamma z)(\cos^2\theta + k\sin^2\theta) \\ &y^{\bullet} = \cos\theta, \quad z^{\bullet} = \sin\theta \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает изменение напряженно-деформационного состояния оболочки на криволинейном участке ($0 \leqslant s \leqslant l-a$). Для прямолинейного участка ($l-a \leqslant s \leqslant \leqslant l$) уравнения значительно упрощаются и будут использованы вместе с условиями на контактной поверхности только в п. 3. Система (1.6) дополняется краевыми условиями

$$T(0)=T_0, \ z(0)=y(0)=\theta(0)=0 \tag{1.7}$$

$$z(l-a)=H, \ y(l-a)=a, \ \theta(l-a)=\pi \tag{1.8}$$

В (1.6)—(1.8) параметры p_0, T_0, H, a, l пока неизвестны, однако они связаны условием равенства площади, охваченной оболочкой, величине $2G/\gamma$ и условием равновесия всей конструкции

$$(p_0+\gamma H)a=G \tag{1.9}$$

Дальнейшее рассмотрение задачи удобно проводить в безразмерном виде. Характерными величинами назначаются размер H и давление γH. Вводятся обозначения

$$\lambda=p_0/\gamma H, \quad \zeta=\lambda+z/H \tag{1.10}$$

за остальными безразмерными переменными оставляются старые обозначения. Тогда задача (1.6)—(1.9) приводится к виду

$$T^{\cdot}=\zeta(1-k)\sin\theta\cos\theta \tag{1.11}$$

$$T\theta^{\cdot}=\zeta(\cos^2\theta+k\sin^2\theta), \quad y^{\cdot}=\cos\theta, \quad \zeta^{\cdot}=\sin\theta$$

$$\zeta(0)=\lambda, \ y(0)=\theta(0)=0 \tag{1.12}$$

$$\zeta(l-a)=1+\lambda, \quad y(l-a)=a, \quad \theta(l-a)=\pi$$

$$(1+\lambda)a=G \tag{1.13}$$

2. Интегрирование системы (1.11) с условиями (1.12)—(1.13) удается выполнить аналитически. Деление первого уравнения на второе дает дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$T^{-1}dT/d\theta=(1-k)\sin\theta\cos\theta/(\cos^2\theta+k\sin^2\theta)$$

Его решение при условии $T(0)=T_0$ имеет вид

$$T=T_0(1+(k-1)\sin^2\theta)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что при $\theta=\pi$ натяжение оболочки также равно T_0, т. е. принимает экстремальное значение. Другое экстремальное значение $T_0k^{-1/2}$ натяжение принимает при $\theta=\pi/2$. Оно максимально при активном ($k<1$) предельном равновесии среды и минимально при пассивном ($k>1$). При равновесии жидкости натяжение мембраны постоянно и равно T_0 (роль мембраны при этом может играть поверхностный слой, тогда T_0 — поверхностное натяжение, p_0 — давление насыщенных паров).

Комбинирование второго и четвертого уравнений из (1.11) с подстановкой (2.1) приводит к уравнению

$$d\zeta/d\theta=T_0\sin\theta/(\zeta(\cos^2\theta+k\sin^2\theta)^{3/2})$$

Его интегрирование при условии $\zeta(0)=\lambda$ дает связь переменных ζ и θ:

$$1-{}^1/_2kT_0^{-1}(\zeta^2-\lambda^2)=\cos\theta\,(k+(1-k)\cos^2\theta)^{-1/2} \tag{2.2}$$

Отсюда с учетом условия $\zeta(\pi)=1+\lambda$ выводится зависимость между параметрами задачи

$$T_0={}^1/_4k(1+2\lambda) \tag{2.3}$$

Физический смысл связи (2.3) заключается в выполнении условий равновесия в горизонтальном направлении для отсеченной «правой» части конструкции (фиг. 1). Подстановка (2.3) в (2.2) позволяет после элементарных преобразований выразить угол наклона оболочки θ в зависимости от безразмерной глубины ζ:

$$\operatorname{ctg}\theta=k^{1/2}\eta/\xi,\ \xi=((\mu^2-\zeta^2)(\zeta^2-\lambda^2))^{1/2} \tag{2.4}$$
$$\eta={}^1/_2(\mu^2+\lambda^2)-\zeta^2,\quad \mu=1+\lambda$$

С учетом (2.3), (2.4) выражение (2.1) представляется в виде

$$T={}^1/_2(k(k\eta^2+\xi^2))^{1/2} \tag{2.5}$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (1.11) следует дифференциальное уравнение $dy/d\zeta=\operatorname{ctg}\theta$. С использованием (2.4) и условия $y(\lambda)=0$ оно интегрируется в форме

$$\int\limits_0^y dy=k^{1/2}\left({}^1/_2(\mu^2+\lambda^2)\int\limits_\lambda^\zeta \xi^{-1}\,d\zeta-\int\limits_\lambda^\zeta \xi^{-1}\zeta^2\,d\zeta\right)$$

Входящие в это выражение интегралы представляются через эллиптические интегралы I и II рода [4], окончательно форма криволинейного участка оболочки находится по формуле

$$y(\zeta)=k^{1/2}({}^1/_2\mu^{-1}(\mu^2+\lambda^2)F(\omega,\Lambda)-\mu E(\omega,\Lambda)+\xi/\zeta) \tag{2.6}$$

где модуль Λ и угол ω определяются через параметр λ:

$$\Lambda=(1+2\lambda)^{1/2}/(1+\lambda),\quad \omega=\arcsin((\zeta^2-\lambda^2)^{1/2}/(\zeta\Lambda)) \tag{2.7}$$

Отсюда, при $\zeta=\mu$, следует

$$a=k^{1/2}({}^1/_2\mu^{-1}(\mu^2+\lambda^2)K(\Lambda)-\mu E(\Lambda)) \tag{2.8}$$

где $K(\Lambda)$ и $E(\Lambda)$ — полные эллиптические интегралы I и II рода.

Согласно условию (1.13) справедливо равенство

$$(1+\lambda)^2((1-{}^1/_2\Lambda^2)K(\Lambda)-E(\Lambda))=Gk^{-1/2} \tag{2.9}$$

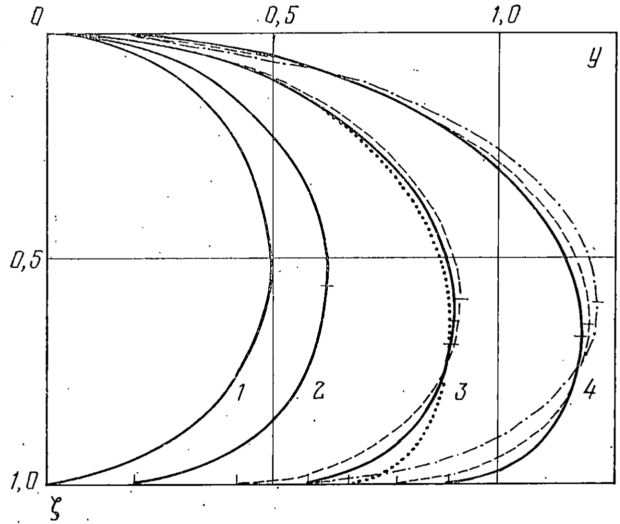
Если считать величину G заданной, то (2.22) есть трансцендентное уравнение для определения параметра λ. В нем все параметры, характеризующие свойства системы, сгруппированы в правой части, левая же часть представляет собой универсальную функцию переменной λ. Эта функция монотонно убывает от $+\infty$ при $\lambda\to0$ до $\pi/8$ при $\lambda\to\infty$; легко построить ее график или таблицу. Уравнение (2.11) удобно решать графически, когда $Gk^{-1/2}$ лежит в интервале значений от 0.5 до 2.5, иначе для повышения точности следует использовать таблицы или численные методы нахождения корней нелинейного уравнения.

Длина оболочки на криволинейном участке находится интегрированием четвертого уравнения системы (1.11), где $\sin\theta$ выражается через $\operatorname{ctg}\theta$ из формулы (2.4),

$$\int\limits_0^{l-a} ds=\int\limits_\lambda^\mu (1+|k|\eta^2/\xi^2)^{1/2}\,d\zeta$$

Заменой переменных $\zeta=({}^1/_2(\mu^2+\lambda^2)-\eta)^{1/2}$, $\rho=2\eta/(1+2\lambda)$ интеграл приводится к виду:

$$l-a={}^1/_2({}^1/_2(1+2\lambda))^{1/2}\int\limits_{-1}^{1}(1+m\rho^2)^{1/2}((\beta-\rho)(1-\rho^2))^{-1/2}\,d\rho$$
$$m=|k|-1,\quad (m\geqslant0),\quad \beta=(\mu^2+\lambda^2)/(1+2\lambda),\quad (\beta>1) \tag{2.10}$$



Фиг. 3

В явном виде интеграл в (2.10) берется только при $m=0$ (задача гидростатики). В общем случае он выражается через гиперэллиптические (абелевы) интегралы, но при заданных m и β его значение легко находится численным интегрированием.

3. Длину оболочки можно вычислить другим способом, расширив постановку задачи дополнительными гипотезами. Пусть оболочка имеет в нерастянутом (начальном) состоянии длину l_0 и деформируется вплоть до конечного состояния с длиной l упруго, так что справедлива линейная зависимость между деформацией и натяжением, относящимся к текущей конфигурации:

$$(\Delta s)^{\cdot}=T/Eh \tag{3.1}$$

где $\Delta s=s-s_0$ — удлинение участка оболочки, Eh — жесткость на растяжение.

Объединение четвертого уравнения из (1.11) с (3.1) и (2.5) дает дифференциальное уравнение $d(\Delta s)/d\xi={}^1/_2(Eh)^{-1}k^{1/2}(\xi^2+k\eta^2)/\xi$, решение которого представляется в виде

$$\int\limits_{l_0-a_0}^{l-a} d(\Delta s)={}^1/_2(Eh)^{-1}k^{1/2}\left[{}^1/_4k(1+2\lambda)^2\int\limits_{\lambda}^{\mu}\xi^{-1}\,d\xi-(k-1)\int\limits_{\lambda}^{\mu}\xi\,d\xi\right] \tag{3.2}$$

где a_0 — начальная длина прямолинейного участка оболочки. Удлинение $\Delta a=a-a_0$ можно вычислить с помощью (3.1), установив закон изменения натяжения T. Система (1.11) на участке контакта оболочки с основанием сводится к единственному уравнению

$$dT/dy=\tau_* \tag{3.3}$$

с условием $T(a)=T_0$, где $\tau_*=\tau_*(y)$ — распределение касательных напряжений на площадке контакта. Допустив, что здесь выполняется закон сухого трения $\tau_*=f\sigma=f(1+\lambda)$ (f — коэффициент трения), можно найти решение уравнения (3.3), а затем и (3.1):

$$\Delta a={}^1/_2(Eh)^{-1}a({}^1/_2k(1+2\lambda)-f(1+\lambda)a) \tag{3.4}$$

где a выражается формулой (2.10). С учетом (3.4) интегрирование (3.2) дает формулу для вычисления длины l:

$$l = l_0 + {}^1/_{12}(Eh)^{-1}k^{1/2}\mu[(3k\mu^2+(k-4)\lambda^2)K(\Lambda)-((5k-2)\mu^2-(k+2)\lambda^2)E(\Lambda)] \tag{3.5}$$

Во избежание громоздкости выражения формула приводится для случая $f=0$, т. е. когда отсутствует сцепление между оболочкой и основанием.

4. Таким образом, получено полное параметрическое решение поставленной задачи. Основные неизвестные представлены как функции глубины z из (1.10), зависящие как от параметра от дополнительного давления p_0. Конкретное значение этого параметра зависит от погонного веса среды, заключенной в мембрану, и от максимальной высоты конструкции.

Решение частной задачи при фиксированных безразмерных параметрах k, G сводится к следующей процедуре. Находится λ – корень уравнения (2.11). Строится граница поперечного сечения $y(\zeta)$ по формулам (2.8), (2.9); в частности, находятся габаритный размер $Y=y(\zeta_*)$, где согласно (2.2) $\zeta_*=({}^1/_2((1+\lambda)^2+\lambda^2))^{1/2}$, и длина прямолинейного участка $a=G/(1+\lambda)$. На границе строится эпюра натяжения по формуле (2.7). Длина растянутой оболочки находится или непосредственно по формуле (2.12), или выражается аналогично (3.5) через начальную длину и упругие свойства материала оболочки.

В качестве примера на фиг. 3 представлена форма оболочки, рассчитанная для значений G: 1 – $\pi/8$; 2 – 0,5; 3 – 0,75; 4 – 1,0. Сплошная кривая соответствует нулевому значению угла φ (гидростатика), штриховая – $\varphi=15°$, штрих-пунктирная – $\varphi=30°$, пунктирная – $\varphi=-15°$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. *Сергеев Б. И., Степанов П. М., Шумаков Б. Б.* Мягкие оболочки в гидротехническом строительстве. М.: Колос, 1984. 101 с.
3. *Косте Ж., Санглера Г.* Механика грунтов (практический курс). М.: Стройиздат, 1981. 455 с.
4. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Тюмень

Поступила в редакцию
29.I.1990